Práctico 1

1. Sean a, b, c números reales. Demostrar las siguientes afirmaciones:

(a) Si $a < b$, entonces $a + c \leq b + c$.

(b) Si $a < b$ y $c < d$, entonces $a + c < b + d$.

(c) Enunciar todas las variantes del ítem anterior cambiando algunos (o todos) los $<$ por $\leq$, y decidir cuáles son válidas. Para las que no lo son, dar un contraejemplo.

(d) Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.

2. Demostrar las siguientes, donde $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Si $a > 1$, entonces $a < a^2$.

(b) $ab > 0 \iff (a > 0 \text{ y } b > 0)$ ó $(a < 0 \text{ y } b < 0)$. Enunciar este resultado en palabras de la manera más sintética (y precisa) posible. Discutir con compañeros.

(c) Si $0 \leq a, b$, entonces $a < b \iff a^2 < b^2$. Deducir la versión con $\leq$ en ambos lugares.

3. Demostrar que para todos $a, s, h \in \mathbb{R}$ se dan:

(a) $a < (a + 1)^2$.

(b) $(s - h)^2 \geq s^2 - 2sh$.

4. Para cada una de las siguientes desigualdades, hallar el conjunto de todos los números reales x que las satisfacen y graficar el resultado en la recta real.

(a) $4 - x < 3 - 3x$.

(b) $x + 1 > x$.

(c) $x - 1 > x$.

(d) $x^2 > 9$.

(e) $19 - x^2 < 3$.

(f) $x^2 - 4x + 3 > 0$.

(g) $-\frac{3}{x} > 1$.

(h) $\frac{x-1}{x+1} > 0$.

(i) $\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} > 0$.

5. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando cada respuesta.

(a) Si $a < b$ y $c < d$ entonces $a - c < b - d$.

(b) Si $a < b$ y c no es negativo, entonces $ac < bc$.

(c) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y < 0$.

(d) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, xy > 0$.

6. (a) Probar que si $a^3 = 1$, entonces $a = 1$.

(b) Usar el inciso anterior para deducir que si $a^3 = b^3$, entonces $a = b$.

7. Expresar lo siguiente prescindiendo de las barras de valor absoluto, tratando por separado distintos casos cuando sea necesario. Intentar graficar los valores cada expresión en el plano cartesiano, donde la variable que aparece corresponde a las abscisas.

(a) $\big||x| - 1\big|$.

(b) $a - \big|a - |a|\big|$.

8. Demostrar las siguientes afirmaciones:

(a) $|x| = |-x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) $|xy| = |x||y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

(c) $|x^{-1}| = |x|^{-1}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$.

9. Resolver las siguientes ecuaciones.

(a) $|x-3| = c \quad (c \in \mathbb{R})$. (b) $|x-1||x+2| = 3$. (c) $|x-1| + |x+2| = 3$.

10. Resolver las siguientes desigualdades, interpretarlas en términos de distancias, y graficar en cada caso el conjunto de soluciones en la recta real.

(a) $|x-3| < 8$. (b) $|x-3| \geq 8$. (c) $|x-3| < 0$. (d) $|2x-3| > 1$.

11. Probar que se cumplen las siguientes desigualdades para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) $|x-y| \leq |x| + |y|$. (b) $|x-y| \geq |x| - |y|$. (c) $|x-y| \geq \big||x| - |y|\big|$.

12. Demostrar la *Desigualdad Triangular* con distancias en la recta: $d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b)$.

13. Decidir si los siguientes conjuntos están acotados superior o inferiormente.

(a) Los racionales positivos.
(b) Los enteros pares.
(c) Los enteros negativos.
(d) $\left\{n \in \mathbb{N} \mid 0 \leq \frac{1}{n} \leq 1\right\}$.

14. (a) Demostrar que si x es cota superior de A y $x \leq y$ entonces y es cota superior de A.
(b) Demostrar que si x es cota inferior de A y $\epsilon > 0$ entonces $x - \epsilon$ es cota inferior de A.

15. Para los conjuntos del ejercicio anterior, determinar si tienen máximo y/o mínimo.

16. Decidir si son verdaderas o falsas y justificar lo mejor que pueda.
(a) Para todo $A \subseteq \mathbb{R}$, A acotado $\implies$ A finito.
(b) Para todo $A \subseteq \mathbb{R}$, A finito $\implies$ A acotado.
(c) Para todo $A \subseteq \mathbb{N}$, A acotado $\implies$ A finito.
(d) Para todo $A \subseteq \mathbb{Q}$, A acotado $\implies$ A finito.
Usar lo anterior para deducir una caracterización de los subconjuntos acotados de $\mathbb{Z}$.

17. Probar que si A y B son subconjuntos de $\mathbb{R}$ acotados superiormente, entonces $A \cup B$ es acotado superiormente.

18. Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos de números reales tiene supremo, ínfimo, máximo o mínimo. Justificar con demostraciones.
(a) $[3, 8)$.
(b) $(-\infty, \pi)$.
(c) $\{6k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
(d) $\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z},\, n \neq 0\right\}$.
(e) $\left\{3 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$.
(f) $\left\{x \in \mathbb{Q} \mid -\frac{3}{4} \leq x \leq 0\right\}$.
(g) $\left\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 5\right\}$.

19. Sean A y B subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ tales que $x \leq y$ para todo $x \in A$, $y \in B$. Demostrar que:

(a) $\sup A \leq y$ para todo $y \in B$. (b) $\sup A \leq \inf B$.

En los próximos ejercicios, $X \setminus Y$ denota la resta de conjuntos.

20. Demostrar que $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ es denso.

21. Demostrar que si $D \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$ y D es denso, entonces A es denso.

22. Determinar si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ son densos.

(a) $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

(b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 100\}$.

(c) $\mathbb{R} \setminus (0, 2]$.

(d) $\{x + \sqrt{2} \mid x \in \mathbb{Q}\}$.

23. Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos de números reales tiene supremo, ínfimo, máximo o mínimo.

(a) $\left\{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < \sqrt{2}\right\}$.

(b) $\left\{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x \leq \sqrt{2}\right\}$.

24. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando cada respuesta.

(a) Si $\sup A \leq \inf B$, entonces $A \cap B = \emptyset$.

(b) Un conjunto formado por todos los números reales salvo un número finito de ellos es denso.

Ejercicios Extra

Desde los axiomas. Los siguientes ejercicios muestran cómo se pueden obtener todas las propiedades aritméticas de $\mathbb{R}$ a partir de los axiomas.

25. Demostrar las siguientes afirmaciones. Justificar **todos** los pasos, indicando las propiedades usadas.

(a) (*Propiedad Cancelativa de* $+$) Si $a + b = a + c$ entonces $b = c$.

(b) (*Unicidad del inverso*) Probar que si $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, cumplen que $a \cdot b = 1$ y $a \cdot c = 1$, entonces $b = c$.

(c) Enunciar y probar una Propiedad Cancelativa para el producto.

(d) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

(e) $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$, si $a, b \neq 0$. ¿Cómo debería ser si $\cdot$ no fuera conmutativo?

(f) Probar que $ab = 0$ si y sólo si $a = 0$ ó $b = 0$.

(g) Probar que $(-1)a = -a$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

(h) Probar que $(-1)(-1) = 1$.

(i) $(-a)(-b) = ab$, para todo par de números reales a, b.

26. Demostrar las siguientes afirmaciones. Justificar todos los pasos usando los axiomas y las propiedades probadas en el Ejercicio 25.

(a) $a(b - c) = ab - ac$, para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(b) $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$.

(c) Si $x^2 = y^2$, entonces $x = y$ ó $x = -y$.

El siguiente ejercicio discute la presentación original de los axiomas de orden en el libro de Spivak.

27. Sea $P := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x\}$, el conjunto de los números positivos.

(a) Probar que P satisface las siguientes propiedades:

(P10') Para todos los reales a, una y sólo una de las siguientes se cumple:

- $a = 0$;
- $a \in P$;
- $-a \in P$.

(P11') P es *cerrado bajo* $+$: para todos $a, b \in P$, $a + b \in P$. P es cerrado por

(P12') P cerrado bajo el producto: para todos $a, b \in P$, $a \cdot b \in P$.

(b) Recíprocamente, a partir de los axiomas (P1)–(P9) junto a la afirmación de que existe un conjunto $P \subseteq \mathbb{R}$ que satisface (P10')–(P12') y **definiendo** "$a < b$" como "$b - a \in P$", entonces se pueden demostrar los axiomas originales (P10)–(P12).

Otros ejercicios.

28. ¿Dónde está el error de la siguiente "demostración"?[1]
Supongamos $x = y$. Entonces,

$$\begin{aligned} x^2 &= xy, \\ x^2 - y^2 &= xy - y^2, \\ (x+y)(x-y) &= y(x-y), \\ x + y &= y, \\ 2y &= y, \\ 2 &= 1. \end{aligned}$$

29. Determinar cuáles $a \in \mathbb{R}$ son mayores, iguales o menores a su cuadrado. (Ayuda: usar el Ejercicio 2 (a)).

30. Demostrar las siguientes afirmaciones.

(a) Si $a^2 < b^2$ y $a > 0$, entonces $b < -a$ ó $a < b$.

(b) $0 < h < 1$ implica $(s+h)^2 \leq s^2 + (2s+1)h$.

31. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando cada respuesta.

(a) Si $ax = a$ para algún número $a \neq 0$, entonces $x = 1$.

(b) Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ cumplen que $a \cdot b = a \cdot c = 1$ entonces $b = c$. (Comparar con el Ejercicio 25 (b)).

(c) Si $a^2 = 1$, entonces $a = 1$ ó $a = -1$.

(d) Si $a^2 = b^2$, entonces $a^3 = b^3$.

(e) $\max\{x, -x\} = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Para un subconjunto de los reales X, sea X^u el conjunto de cotas superiores de X.

32. Si A y B subconjuntos de $\mathbb{R}$, caracterizar $(A \cup B)^u$ en términos de A^u y B^u.

33. Probar que para todo $A \subseteq R$ acotado, A^u es un intervalo.

[1] El primero: ¡no justificó qué hizo en cada paso!