Práctico 4

Para $a \in \mathbb{R}$, un *entorno* de a es un intervalo abierto (x, y) que contiene a a (i.e., $x < a < y$).

1. Sean $a \in \mathbb{R}$ y $X \subseteq \mathbb{R}$. Son equivalentes:

(a) X incluye un entorno de a;

(b) Existe $\delta > 0$ tal que $(a - \delta, a + \delta) \subseteq X$.

2. Probar que si f y g están definidas en sendos entornos de a (salvo quizá en a mismo), entonces $f + g$ y $f \cdot g$ también lo están.

3. En cada uno de los siguientes casos, para un $\varepsilon > 0$ dado, encontrar $\delta > 0$ tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$ para todo x que satisface $0 < |x - a| < \delta$.

(a) $\begin{cases} f(x) = x^4, \\ l = a^4. \end{cases}$

(b) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x}, \\ a = 1,\ l = 1. \end{cases}$

(c) $\begin{cases} f(x) = x^4 + \dfrac{1}{x}, \\ a = 1,\ l = 2. \end{cases}$

4. Demostrar por definición los siguientes límites.

(a) $\lim\limits_{x \to a} x = a$.

(b) Si $f(x)$ es constante e igual a $c \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$.

(c) $\lim\limits_{x \to a} x^2 = a^2$.

(d) $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a},\ a > 0$.

(e) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^2 - a^2}{x - a} = 2a$.

(f) $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

5. Calcular los siguientes límites en caso de existir. Justificar.

(a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$.

(b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$.

(c) $\lim\limits_{x \to y} \dfrac{x^n - y^n}{x - y}$.

(d) $\lim\limits_{h \to 0} \left(\dfrac{1}{h\sqrt{1 + h}} - \dfrac{1}{h} \right)$.

(e) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{a + h} - \sqrt{a}}{h} \quad (a > 0)$.

(f) $\lim\limits_{t \to 9} \dfrac{9 - t}{3 - \sqrt{t}}$.

(g) $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - \lfloor x \rfloor)$.

(h) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x \cos x}$.

Aclaración. Recordamos que las siguientes notaciones son equivalentes:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \searrow a} f(x) \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \nearrow a} f(x)$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \searrow -\infty} f(x) \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \nearrow \infty} f(x)$$

6. Trazar el gráfico de la función

$$g(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x < -1, \\ x + 2 & \text{si } -1 \le x < 1, \\ 4 & \text{si } x = 1, \\ 4 - x & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Además, determinar el valor de los siguientes límites cuando existan.

(a) $\lim_{x\searrow -1} g(x)$.
(b) $\lim_{x\nearrow -1} g(x)$.
(c) $\lim_{x\to -1} g(x)$.
(d) $\lim_{x\searrow 1} g(x)$.
(e) $\lim_{x\nearrow 1} g(x)$.
(f) $\lim_{x\to 1} g(x)$.
(g) $\lim_{x\searrow -\infty} g(x)$.
(h) $\lim_{x\nearrow \infty} g(x)$.

7. Demostrar por definición que no existen los siguientes límites.

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$.
(b) $\lim_{x\searrow 0} \operatorname{sen}(1/x)$.

8. Calcular los siguientes límites en caso de existir o ser $\pm\infty$. Justificar.

(a) $\lim_{y\nearrow \infty} \dfrac{3y-4}{6y+1}$.
(b) $\lim_{x\searrow -\infty} \dfrac{5x^3-2x+7}{4x^2-1}$.
(c) $\lim_{x\nearrow \infty} \dfrac{x^3+7x}{x^4-2}$.
(d) $\lim_{x\nearrow \infty} (\sqrt{x^2+1}-x)$.
(e) $\lim_{x\nearrow \infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

9. Demostrar las siguientes afirmaciones.

(a) $\lim_{x\to 3} \dfrac{1}{(x-3)^2} = \infty$, usando la definición de límite.
(b) Si $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe, entonces $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x^3)$.
(c) Si $\lim_{x\to 0} f(x^2)$ existe, entonces no necesariamente existe $\lim_{x\to 0} f(x)$.
(d) Si $\lim_{x\searrow 0} f(1/x)$ existe, entonces $\lim_{x\searrow 0} f(1/x) = \lim_{x\nearrow \infty} f(x)$.
(e) $\lim_{x\searrow 0} f(x) = \infty$ si y sólo si $\lim_{x\nearrow \infty} f(1/x) = \infty$.
(f) Existe $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $\lim_{x\to a} f(x)$ no existe para todo $a\in\mathbb{R}$.

10. Calcular los siguientes límites. Recordar que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$.

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{2x}{\operatorname{sen}(3x)}$.
(b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2(2x)}{x}$.
(c) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos(x)}$.
(d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x}$.
(e) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x-1}$.

11. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, y justificar. Asumir que las funciones f y g están definidas en un entorno de a o de 0 según corresponda.

(a) $\lim_{x\nearrow 0} f(x) = \lim_{x\searrow 0} f(-x)$.
(b) Si $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$ no existen, entonces $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$ no existe.
(c) Si $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, entonces $\lim_{x\to 0} g(x)\operatorname{sen}(\frac{1}{x}) = 0$.
(d) Si $\lim_{x\to a} |f(x)| = 0$, entonces $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.
(e) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h)$.