

PARTE I

En esta primera parte, cada vez que se pida determinar una derivada, es necesario usar la definición y no las reglas usuales de derivación.

1. (a) Demostrar que si  $f(x) = 1/x$ , entonces  $f'(a) = -1/a^2$  para  $a \neq 0$ .  
 (b) Demostrar que la recta tangente a la gráfica de  $f$  en  $(a, 1/a)$  no corta la gráfica de  $f$  más que en el punto  $(a, 1/a)$ .  
 (c) Demostrar que si  $h(x) = \sqrt{x}$ , entonces  $h'(a) = a^{-1/2}/2$  para  $a > 0$ .  
 (d) Si  $f(x) = \lfloor x \rfloor$ , hallar  $f'$  donde sea posible.
2. Sea  $f$  una función derivable en el intervalo abierto  $(a, b)$  y  $c \in \mathbb{R}$ . En cada caso hallar  $g'$  en su respectivo dominio.

(a)  $g(x) = f(x + c)$ .                      (b)  $g(x) = f(cx)$ .                      (c)  $g(x) = f(x)^2$ .

3. Sea  $f$  una función derivable en  $a$ . Demostrar que  $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ .

PARTE II

A partir de ahora sí es posible usar las reglas usuales, aunque en algunos casos será necesario usar también la definición.

4. Calcular  $f'$ , donde  $f(x)$  viene dada por cada una de las siguientes expresiones.

(a) $3x^4 + 5x^3 - \pi x$ .	(e) $(x^3 - 2x + 1)^8$ .	(j) $\frac{1 + \sqrt{\sin(3x)}}{1 - x + x^5}$ .
(b) $(x^3 + 3)(2x^2 - 1)$ .	(f) $x^2 \cos(1/x)$ .	(k) $\frac{\sin(\sin^7(x))}{x}$ .
(c) $\frac{x^3}{x^2 + 1}$ .	(g) $(\tan(4x^2 + 1))^{\frac{4}{3}}$ .	(l) $\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$ .
(d) $\tan(x)$ .	(h) $\cos(x \sin(x))$ .	
	(i) $\cos(\sqrt{x^4 + 7})$ .	

5. (a) Sea  $h$  una función tal que  $|h(x)| \leq x^2$  para todo  $x$ . Demostrar que  $h$  es derivable en 0 y calcular  $h'(0)$ .  
 (b) Probar que la función

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

es derivable en todo  $\mathbb{R}$ . Además, calcular  $g'$  y probar que no es continua en 0.

6. Calcular  $f^{(n)}(x)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  de las siguientes funciones.

(a)  $f(x) = x^{10}$ .                      (b)  $f(x) = \cos(x)$ .                      (c)  $f(x) = 1/x$ .                      (d)  $f(z) = \sqrt{z}$ .

7. En cada uno de los siguientes casos encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva dada en el punto  $(x_0, y_0)$  indicado.

(a) $\begin{cases} y = 1 - 2x - 3x^2, \\ (x_0, y_0) = (-2, -7). \end{cases}$	(b) $\begin{cases} y = \frac{1}{\sqrt{x}}, \\ (x_0, y_0) = (1, 1). \end{cases}$	(c) $\begin{cases} y = \frac{x}{1-x}, \\ (x_0, y_0) = (0, 0). \end{cases}$
--	---	--

8. Decir en qué puntos es derivable la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1, \\ x^2 & \text{si } |x| < 1, \\ 2x + 1 & \text{si } 1 \leq x \leq 2, \\ 7 - x & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

9. (a) Supongamos que  $f(x) = xg(x)$  para alguna función  $g$  que es continua en 0. Demostrar que  $f$  es derivable en 0, y hallar  $f'(0)$  en términos de  $g$ .

(b) Supongamos que  $f$  es derivable en 0, y que  $f(0) = 0$ . Demostrar que  $f(x) = xg(x)$  para alguna función  $g$  continua en 0.

10. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

(a) Si  $f + g$  es derivable en  $a$ , entonces  $f$  y  $g$  son derivables en  $a$ .

(b) Si  $fg$  es derivable en  $a$ , entonces  $f$  y  $g$  son derivables en  $a$ .

(c) Si  $f$  es derivable en  $a$  y  $f(a) \neq 0$ , entonces  $|f|$  es derivable en  $a$ .

(d) Existe una función continua en  $\mathbb{R}$  que no es derivable en una cantidad infinita de puntos.

(e) Existe una función continua en  $\mathbb{R}$  que es derivable en 0 y no lo es en cualquier intervalo abierto que contiene al 0.

(f) Dados  $a < b$ , toda función continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ , se extiende a una función derivable en todo  $\mathbb{R}$ . (Para este ítem, considere continuidad lateral en los bordes, i.e.  $\lim_{x \searrow a} f(x) = f(a)$  y  $\lim_{x \nearrow b} f(x) = f(b)$ ).

11. Determinar  $(f^{-1})'(d)$  en los siguientes casos.

(a)  $f(x) = x^5 + 2$ ,  $d = 1$ .

(b)  $f(x) = \sqrt{4 - x}$ ,  $d = 3$ .

(c)  $f(x) = \tan(2x)$ ,  $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ ,  $d = 1$ .

12. (a) Se define la función  $\arcsen(s) : [-1, 1] \mapsto [-\pi/2, \pi/2]$  como la inversa de la función  $\sen(x)$  restringida al intervalo  $[-\pi/2, \pi/2]$ . Demuestre que  $\arcsen'(s) = \frac{1}{\sqrt{1 - s^2}}$ .

(b) Análogamente se define  $\text{arc cos}(s) : [-1, 1] \mapsto [0, \pi]$ . Demuestre que  $\text{arc cos}'(s) = \frac{-1}{\sqrt{1 - s^2}}$ .

(c) Se define ahora  $\arctan(s) : \mathbb{R} \mapsto [-\pi/2, \pi/2]$  como la inversa de la función  $\tan(x)$  restringida al intervalo  $[-\pi/2, \pi/2]$ . Demuestre que  $\arctan'(s) = \frac{1}{1 + s^2}$ .

### PARTE III

*En esta parte hay problemas que utiliza la derivada y su significado con aplicaciones a la física y la economía.*

13. El desplazamiento en metros de una partícula que se mueve en línea recta está dado por la ecuación de movimiento  $s = 4t^3 + 6t + 2$ , en donde  $t$  se mide en segundos. Encuentre la velocidad de la partícula en los tiempos  $t = a$ ,  $t = 1$ ,  $t = 2$  y  $t = 3$ .

14. El costo (en pesos) de producción de cierto artículo es  $c(x) = 5000 + 10x + 0,05x^2$ .

(a) Encuentre la razón de cambio medio de  $c$  respecto de  $x$  cuando el nivel de producción cambia de la siguiente manera:

- (i) de  $x = 100$  a  $x = 105$ .  
(ii) de  $x = 100$  a  $x = 101$ .
- (b) Encuentre la razón de cambio instantánea de  $c$  respecto de  $x$  cuando  $x = 100$ . (A esta razón se la llama costo marginal.)
- 15.** Si se lanza una pelota verticalmente hacia arriba con una velocidad de 80 metros/seg, entonces su altura después de  $t$  segundos es  $s = 80t - 16t^2$ .
- (a) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por la pelota?  
(b) ¿Cuál es la velocidad de la pelota cuando se encuentra a una altura de 96 metros sobre el nivel del suelo y se dirige hacia arriba? Idem si se dirige hacia abajo.

## PARTE IV: EJERCICIOS EXTRA

- 16.** (a) Demostrar usando la definición de derivada que si  $g(x) = 1/x^2$ , entonces  $g'(a) = -2/a^3$  para  $a \neq 0$ .  
(b) Demostrar que la tangente a la gráfica de  $g$  en  $(a, 1/a^2)$  corta a la gráfica de  $g$  en otro punto.
- 17.** Encontrar un polinomio  $P$  de segundo grado tal que  $P(2) = 5$ ,  $P'(2) = 3$  y  $P''(2) = 2$ .
- 18.** Considerar la función biyectiva  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = 6 - x - x^3$ . Hallar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de  $f^{-1}$  en el punto  $(-4, 2)$ .