Análisis Matemático I

Pedro Sánchez Terraf

Ana Andrés Martín Agustín Luciana José Luis

FaMAF, 11 de marzo de 2024

Información Básica

Aula virtual

Aquí pondremos toda la información actualizada ("ANAMATEI24"):

https://famaf.aulavirtual.unc.edu.ar/course/view.php?id=249

y la usaremos para todas las comunicaciones de la materia.

Información Básica

Aula virtual

Aquí pondremos toda la información actualizada ("ANAMATEI24"):

https://famaf.aulavirtual.unc.edu.ar/course/view.php?id=249

y la usaremos para todas las comunicaciones de la materia.

Ejercicios y Parciales virtuales

- Traten en lo posible de instalar la app de Moodle en el celu.
- Por seguridad, también agenden la URL de arriba en el navegador.

Información Básica

Horario

Comenzaré ambos días entre 9:00 y 9:05, no demoren en llegar.

Información Básica

Horario

Comenzaré ambos días entre 9:00 y 9:05, no demoren en llegar.

Regularidad

Deberán aprobar 2 parciales o sus respectivos recuperatorios.

Información Básica

Horario

Comenzaré ambos días entre 9:00 y 9:05, no demoren en llegar.

Regularidad

Deberán aprobar 2 parciales o sus respectivos recuperatorios.

Fechas de Parciales

- Primer parcial: 24 de abril.
- Segundo parcial: 10 de junio.
- Recuperatorios: 19 de junio.

Libros y apuntes

- M. Spivak, *Cálculo infinitesimal* [7, 6].
- P. Kisbye et al., *Ingreso a Famaf: materiales de estudio* [2].
- PST, Apunte de la materia.

Libros y apuntes

- M. Spivak, *Cálculo infinitesimal* [7, 6].
- P. Kisbye et al., *Ingreso a Famaf: materiales de estudio* [2].
- PST, Apunte de la materia.

Tip: buscar `spivak calculus` en Google.

Contenidos estimados para hoy

1. ¿Para qué sirve?
2. Exactitud y los objetos matemáticos
3. Los números reales
   - Axiomas y consecuencias
   - El discurso matemático
4. Conclusión

¿Para qué sirven los números? (¿la Matemática?)

¿Para qué sirven los números? (¿la Matemática?)

Respuesta chot4

Para contar y medir

¿Para qué sirven los números? (¿la Matemática?)

Respuesta chot4

Para contar y medir

Contamos con $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$.

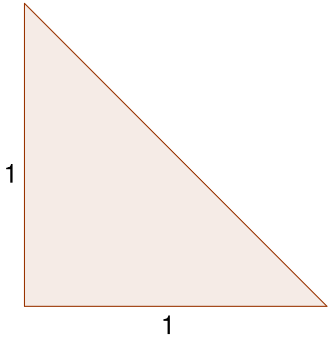
¿Para qué sirven los números? (¿la Matemática?)

Respuesta chot4

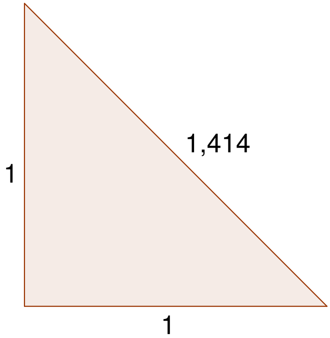
Para contar y medir

Contamos con $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$.
Medimos con **. . . ?**

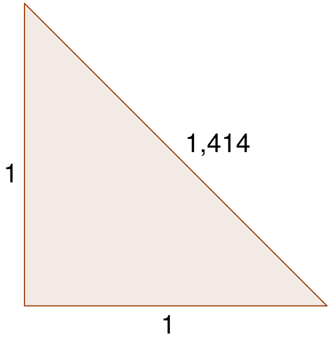
Midiendo



Midiendo



Midiendo



Si parto el lado inferior en 1000 pedazos iguales, la diagonal es aproximadamente igual a 1414 de esos pedazos.

Fracciones [4, 3] y decimales [9]

$$\frac{4}{3}, \frac{10}{7}, \frac{24}{17}, \frac{58}{41}, \frac{140}{99}, \frac{338}{239}, \frac{816}{577}, \frac{1970}{1393}, \frac{4756}{3363}, \frac{11482}{8119}, \frac{27720}{19601}, \frac{66922}{47321},$$

$$\frac{161564}{114243}, \frac{390050}{275807}, \frac{941664}{665857}, \frac{2273378}{1607521}, \frac{5488420}{3880899}, \frac{13250218}{9369319}, \frac{31988856}{22619537},$$

$$\frac{77227930}{54608393}, \frac{186444716}{131836323}, \frac{450117362}{318281039}, \frac{1086679440}{768398401}, \frac{2623476242}{1855077841} \ldots$$

Fracciones [4, 3] y decimales [9]

$$\frac{4}{3}, \frac{10}{7}, \frac{24}{17}, \frac{58}{41}, \frac{140}{99}, \frac{338}{239}, \frac{816}{577}, \frac{1970}{1393}, \frac{4756}{3363}, \frac{11482}{8119}, \frac{27720}{19601}, \frac{66922}{47321},$$
$$\frac{161564}{114243}, \frac{390050}{275807}, \frac{941664}{665857}, \frac{2273378}{1607521}, \frac{5488420}{3880899}, \frac{13250218}{9369319}, \frac{31988856}{22619537},$$
$$\frac{77227930}{54608393}, \frac{186444716}{131836323}, \frac{450117362}{318281039}, \frac{1086679440}{768398401}, \frac{2623476242}{1855077841} \dots$$

1.41421356237309504880168872420969807856967187537694807317 6
6797379907324784621070388503875343276415727350138462309122 9
7024924836055850737212644121497099935831413222665927505592 7
5579995050115278206057147010955997160597027453459686201472 8
5174186408891986095523292304843087143214508397626036279952 5
1407989687253396546331808829640620615258352395054745750287 7
5996172983557522033753185701135437460340849884716038689997 0
69900481503054402779031645424782306849293691862158057846 3...

Valores exactos

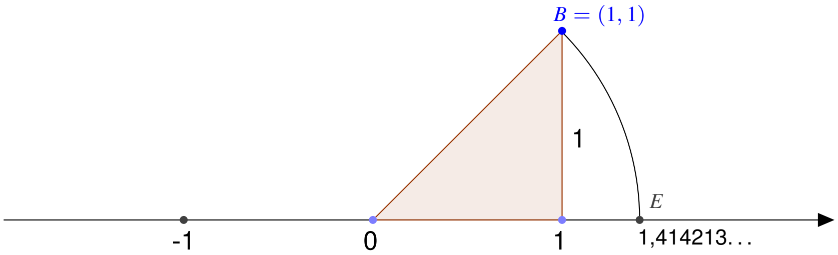
René Descartes (1637) [8]

1 punto = 1 número **real**

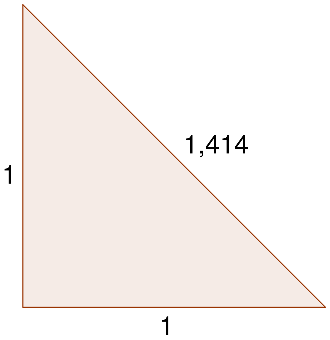
Valores exactos

René Descartes (1637) [8]

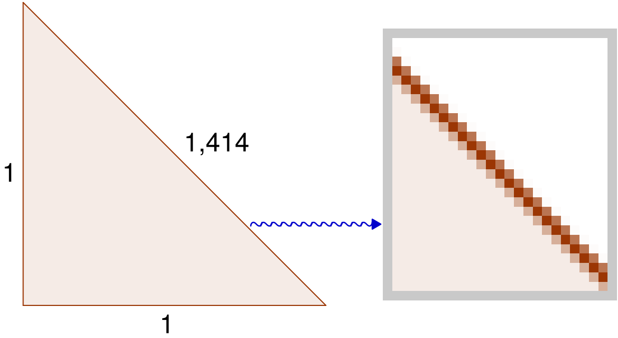
1 punto = 1 número **real**



En fin, la hipotenusa



En fin, la hipotenusa



¿Dónde están los objetos matemáticos?

Disclaimer

No sé la respuesta a esa pregunta.

¿Dónde están los objetos matemáticos?

Disclaimer

No sé la respuesta a esa pregunta.

Todas las anteriores son representaciones de objetos matemáticos.

¿Dónde están los objetos matemáticos?

Disclaimer

No sé la respuesta a esa pregunta.

Todas las anteriores son representaciones de objetos matemáticos.

Una solución

Trabajar con descripciones precisas, usando reglas claras y construyendo un discurso escrito ordenado.

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Los números reales

En primer lugar nos ponemos de acuerdo en qué propiedades esperamos que cumplan dichos objetos (sean geométricos o numéricos).

Los números reales

En primer lugar nos ponemos de acuerdo en qué propiedades esperamos que cumplan dichos objetos (sean geométricos o numéricos).

Queremos que el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales incluya a los otros conjuntos numéricos:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

Y queremos que tengan las mismas **operaciones** básicas: suma, resta, producto y división.

Los números reales: axiomas

El **cuerpo** de los números reales: un conjunto $\mathbb{R}$, las operaciones *binarias* de suma $(+)$ y producto $(\cdot)$, las operaciones *unarias* de **opuesto** $(-)$ e **inverso** $(^{-1})$ y dos *elementos distinguidos* diferentes 0 y 1.

Los números reales: axiomas

El **cuerpo** de los números reales: un conjunto $\mathbb{R}$, las operaciones *binarias* de suma $(+)$ y producto $(\cdot)$, las operaciones *unarias* de **opuesto** $(-)$ e **inverso** $({}^{-1})$ y dos *elementos distinguidos* diferentes 0 y 1.

Axiomas de cuerpo

P1	$\forall a\, b\, c \in \mathbb{R},$	$a + (b + c) = (a + b) + c.$	**Asoc.** $(+)$
P2	$\forall a,$	$a + 0 = a$ y $0 + a = a.$	**Neutro** $(+)$
P3	$\forall a,$	$a + (-a) = 0 = (-a) + a.$	**Opuesto**
P4	$\forall a\, b,$	$a + b = b + a.$	**Conmut.** $(+)$

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Los números reales: axiomas

El **cuerpo** de los números reales: un conjunto $\mathbb{R}$, las operaciones *binarias* de suma $(+)$ y producto $(\cdot)$, las operaciones *unarias* de **opuesto** $(-)$ e **inverso** $({}^{-1})$ y dos *elementos distinguidos* diferentes 0 y 1.

Axiomas de cuerpo

P1	$\forall a\, b\, c \in \mathbb{R},$	$a + (b + c) = (a + b) + c.$	**Asoc.** $(+)$
P2	$\forall a,$	$a + 0 = a$ y $0 + a = a.$	**Neutro** $(+)$
P3	$\forall a,$	$a + (-a) = 0 = (-a) + a.$	**Opuesto**
P4	$\forall a\, b,$	$a + b = b + a.$	**Conmut.** $(+)$
P5	$\forall a\, b\, c \in \mathbb{R},$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$	**Asoc.** $(\cdot)$
P6	$\forall a,$	$a \cdot 1 = a = 1 \cdot a.$	**Neutro** $(\cdot)$
P7	$\forall a,$	$a \neq 0$ implica $a \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} \cdot a.$	**Inverso**
P8	$\forall a\, b,$	$a \cdot b = b \cdot a.$	**Conmut.** $(\cdot)$

Los números reales: axiomas

El **cuerpo** de los números reales: un conjunto $\mathbb{R}$, las operaciones *binarias* de suma $(+)$ y producto $(\cdot)$, las operaciones *unarias* de **opuesto** $(-)$ e **inverso** $({}^{-1})$ y dos *elementos distinguidos* diferentes 0 y 1.

Axiomas de cuerpo

P1	$\forall a\, b\, c \in \mathbb{R},$	$a + (b + c) = (a + b) + c.$	**Asoc.** $(+)$
P2	$\forall a,$	$a + 0 = a$ y $0 + a = a.$	**Neutro** $(+)$
P3	$\forall a,$	$a + (-a) = 0 = (-a) + a.$	**Opuesto**
P4	$\forall a\, b,$	$a + b = b + a.$	**Conmut.** $(+)$
P5	$\forall a\, b\, c \in \mathbb{R},$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$	**Asoc.** $(\cdot)$
P6	$\forall a,$	$a \cdot 1 = a = 1 \cdot a.$	**Neutro** $(\cdot)$
P7	$\forall a,$	$a \neq 0$ implica $a \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} \cdot a.$	**Inverso**
P8	$\forall a\, b,$	$a \cdot b = b \cdot a.$	**Conmut.** $(\cdot)$
P9	$\forall a\, b\, c \in \mathbb{R},$	$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c).$	**Distributiva**

Las otras operaciones

Resta y División

$$b - a := b + (-a), \qquad\qquad b/a := b \cdot a^{-1}.$$

Las otras operaciones

Resta y División

$$b - a := b + (-a), \qquad b/a := b \cdot a^{-1}.$$

Podemos demostrar a partir de los axiomas:

1. (Propiedad **cancelativa** de $+$) Si $a + b = a + c$ entonces $b = c$.
2. (Unicidad del opuesto) Sea $a \in \mathbb{R}$, y supongamos que $n \in \mathbb{R}$ cumple que $a + n = 0 = n + a$. Entonces $n = -a$.
3. Para todo $a \in \mathbb{R}$, $-(-a) = a$.
4. (Unicidad del inverso) Igual que el ítem 2 pero con $(\cdot)$ y $^{-1}$.
5. Propiedad cancelativa del producto.
6. (Producto de opuestos) Para todos $a, b \in \mathbb{R}$, $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.
7. (Absorbente) Para todo $a \in \mathbb{R}$, $a \cdot 0 = 0$.

Teoremas y demostraciones

Organizamos nuestro discurso usando **teoremas**, **pruebas**, **lemas**, ...

Teoremas y demostraciones

Organizamos nuestro discurso usando **teoremas**, **pruebas**, **lemas**, ...

Lema

Para todo $a \in \mathbb{R}$, $a \cdot 0 = 0$.

Teoremas y demostraciones

Organizamos nuestro discurso usando **teoremas**, **pruebas**, **lemas**, . . .

Lema

Para todo $a \in \mathbb{R}$, $a \cdot 0 = 0$.

Corolario

No puede existir un inverso de 0.

Teoremas y demostraciones

Organizamos nuestro discurso usando **teoremas**, **pruebas**, **lemas**, ...

Lema

Para todo $a \in \mathbb{R}$, $a \cdot 0 = 0$.

Corolario

No puede existir un inverso de 0. *Es decir, no hay* x *tal que* $0 \cdot x = 1 = x \cdot 0$.

Organizamos nuestro discurso usando **teoremas**, **pruebas**, **lemas**, ...

Lema

Para todo $a \in \mathbb{R}$, $a \cdot 0 = 0$.

Corolario

No puede existir un inverso de 0. Es decir, no hay x tal que $0 \cdot x = 1 = x \cdot 0$.

Teorema

$a \cdot b = 0 \iff a = 0$ *ó* $b = 0$.

Orden de los reales

Los números reales son un **cuerpo ordenado**: además, tiene una relación binaria $<$ que cumple los siguientes.

Orden de los reales

Los números reales son un **cuerpo ordenado**: además, tiene una relación binaria $<$ que cumple los siguientes.

Axiomas de orden

P10	$\forall a\, b \in \mathbb{R}$,	$a < b$ ó $a = b$ ó $b < a$ (¡sólo una!)	**Tricotomía**
P11	$\forall a\, b\, c$,	$a < b$ y $b < c$ implican $a < c$	**Transitividad**

Orden de los reales

Los números reales son un **cuerpo ordenado**: además, tiene una relación binaria $<$ que cumple los siguientes.

Axiomas de orden

P10	$\forall a\, b \in \mathbb{R}$,	$a < b$ ó $a = b$ ó $b < a$ (¡sólo una!)	**Tricotomía**
P11	$\forall a\, b\, c$,	$a < b$ y $b < c$ implican $a < c$	**Transitividad**
P12(+)	$\forall a\, b\, c$,	$a < b$ implica $a + c < b + c$	**Monotonía** $(+)$
P12($\cdot$)	$\forall a\, b\, c$,	$a < b$ y $0 < c$ implican $a \cdot c < b \cdot c$	**Monotonía** $(\cdot)$

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Orden de los reales

Los números reales son un **cuerpo ordenado**: además, tiene una relación binaria $<$ que cumple los siguientes.

Axiomas de orden

P10	$\forall a\, b \in \mathbb{R}$,	$a < b$ ó $a = b$ ó $b < a$ (¡sólo una!)	**Tricotomía**
P11	$\forall a\, b\, c$,	$a < b$ y $b < c$ implican $a < c$	**Transitividad**
P12(+)	$\forall a\, b\, c$,	$a < b$ implica $a + c < b + c$	**Monotonía** $(+)$
P12($\cdot$)	$\forall a\, b\, c$,	$a < b$ y $0 < c$ implican $a \cdot c < b \cdot c$	**Monotonía** $(\cdot)$

Lema

Para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$, $\quad a < b \iff a + c < b + c.$

El terrorífico Menoroigual

P10	$\forall a\, b \in \mathbb{R},$	$a < b$ ó $a = b$ ó $b < a$ (¡sólo una!)	**Tricotomía**
P11	$\forall a\, b\, c,$	$a < b$ y $b < c$ implican $a < c$	**Transitividad**
P12(+)	$\forall a\, b\, c,$	$a < b$ implica $a + c < b + c$	**Monotonía** $(+)$
P12(·)	$\forall a\, b\, c,$	$a < b$ y $0 < c$ implican $a \cdot c < b \cdot c$	**Monotonía** $(\cdot)$

El terrorífico Menoroigual

P10	$\forall a\, b \in \mathbb{R},$	$a < b$ ó $a = b$ ó $b < a$ (¡sólo una!)	**Tricotomía**
P11	$\forall a\, b\, c,$	$a < b$ y $b < c$ implican $a < c$	**Transitividad**
P12(+)	$\forall a\, b\, c,$	$a < b$ implica $a + c < b + c$	**Monotonía** $(+)$
P12(·)	$\forall a\, b\, c,$	$a < b$ y $0 < c$ implican $a \cdot c < b \cdot c$	**Monotonía** $(\cdot)$

Definición

- $a \leq b := a < b$ ó $a = b$;

El terrorífico Menoroigual

P10	$\forall a\, b \in \mathbb{R}$,	$a < b$ ó $a = b$ ó $b < a$ (¡sólo una!)	**Tricotomía**
P11	$\forall a\, b\, c$,	$a < b$ y $b < c$ implican $a < c$	**Transitividad**
P12(+)	$\forall a\, b\, c$,	$a < b$ implica $a + c < b + c$	**Monotonía** $(+)$
P12(·)	$\forall a\, b\, c$,	$a < b$ y $0 < c$ implican $a \cdot c < b \cdot c$	**Monotonía** $(\cdot)$

Definición

- $a \leq b := a < b$ ó $a = b$;
- $a > b := b < a$;
- $a \geq b := a > b$ ó $a = b$

El terrorífico Menoroigual

P10	$\forall a\, b \in \mathbb{R}$,	$a < b$ ó $a = b$ ó $b < a$ (¡sólo una!)	**Tricotomía**
P11	$\forall a\, b\, c$,	$a < b$ y $b < c$ implican $a < c$	**Transitividad**
P12(+)	$\forall a\, b\, c$,	$a < b$ implica $a + c < b + c$	**Monotonía** $(+)$
P12(·)	$\forall a\, b\, c$,	$a < b$ y $0 < c$ implican $a \cdot c < b \cdot c$	**Monotonía** $(\cdot)$

Definición

- $a \leq b := a < b$ ó $a = b$;
- $a > b := b < a$;
- $a \geq b := a > b$ ó $a = b \iff$ no $(a < b)$.

El terrorífico Menoroigual

P10	$\forall a\, b \in \mathbb{R}$,	$a < b$ ó $a = b$ ó $b < a$ (¡sólo una!)	**Tricotomía**
P11	$\forall a\, b\, c$,	$a < b$ y $b < c$ implican $a < c$	**Transitividad**
P12(+)	$\forall a\, b\, c$,	$a < b$ implica $a + c < b + c$	**Monotonía** $(+)$
P12(·)	$\forall a\, b\, c$,	$a < b$ y $0 < c$ implican $a \cdot c < b \cdot c$	**Monotonía** $(\cdot)$

Definición

- $a \leq b := a < b$ ó $a = b$;
- $a > b := b < a$;
- $a \geq b := a > b$ ó $a = b \iff$ no $(a < b)$.

Lema (Monotonía $(+, \leq)$)

Para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \leq b \implies a + c \leq b + c$.

El terrorífico Menoroigual

P10	$\forall a\, b \in \mathbb{R}$,	$a < b$ ó $a = b$ ó $b < a$ (¡sólo una!)	**Tricotomía**
P11	$\forall a\, b\, c$,	$a < b$ y $b < c$ implican $a < c$	**Transitividad**
P12(+)	$\forall a\, b\, c$,	$a < b$ implica $a + c < b + c$	**Monotonía** $(+)$
P12(·)	$\forall a\, b\, c$,	$a < b$ y $0 < c$ implican $a \cdot c < b \cdot c$	**Monotonía** $(\cdot)$

Definición

- $a \leq b := a < b$ ó $a = b$;
- $a > b := b < a$;
- $a \geq b := a > b$ ó $a = b \iff$ no $(a < b)$.

Lema (Monotonía $(+, \leq)$)

Para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \leq b \implies a + c \leq b + c$.

Ejercicio (Trivial). Para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < b \implies a + c \leq b + c$.

Signo

Definición

- a es **positivo** $\iff a > 0$.
- a es **negativo** $\iff a < 0$.

0 no es ni negativo ni positivo.

Signo

Definición

- a es **positivo** $\iff a > 0$.
- a es **negativo** $\iff a < 0$.

0 no es ni negativo ni positivo.

Lema

- (Orden y Positividad) *Para todos los reales r y s, se da* $r < s \iff 0 < s - r$.
- (Signo del opuesto) $a < 0 \iff 0 < -a$, *y análogamente con* $\leq$.
  $a > 0 \iff 0 > -a$, *y análogamente con* $\geq$.
- (Signo del inverso) $a > 0 \iff a^{-1} > 0$;
  $a < 0 \iff a^{-1} < 0$.

Signo del cuadrado

- (Absorbente) Para todo $a \in \mathbb{R}$, $a \cdot 0 = 0$.
- (Producto de opuestos) Para todos $a, b \in \mathbb{R}$, $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.
- (Monotonía $(\cdot)$) $\forall a\, b\, c$, $a < b$ y $0 < c$ implican $a \cdot c < b \cdot c$.
- (Tricotomía) $\forall a\, b$, exactamente una de la siguientes vale: $a < b$ ó $a = b$ ó $b < a$.
- (Signo del opuesto) $a < 0 \iff 0 < -a$, y análogamente con $\leq$.

Signo del cuadrado

- (Absorbente) Para todo $a \in \mathbb{R}$, $a \cdot 0 = 0$.
- (Producto de opuestos) Para todos $a, b \in \mathbb{R}$, $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.
- (Monotonía $(\cdot)$) $\forall a\, b\, c$, $a < b$ y $0 < c$ implican $a \cdot c < b \cdot c$.
- (Tricotomía) $\forall a\, b$, exactamente una de la siguientes vale: $a < b$ ó $a = b$ ó $b < a$.
- (Signo del opuesto) $a < 0 \iff 0 < -a$, y análogamente con $\leq$.

Lema (Signo del cuadrado)

Para todo $a \in \mathbb{R}$,

1. $a \neq 0$ *implica* $a^2 > 0$.
2. $a^2 \geq 0$.

Signo del cuadrado

- (Absorbente) Para todo $a \in \mathbb{R}$, $a \cdot 0 = 0$.
- (Producto de opuestos) Para todos $a, b \in \mathbb{R}$, $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.
- (Monotonía $(\cdot)$) $\forall a\, b\, c$, $a < b$ y $0 < c$ implican $a \cdot c < b \cdot c$.
- (Tricotomía) $\forall a\, b$, exactamente una de la siguientes vale: $a < b$ ó $a = b$ ó $b < a$.
- (Signo del opuesto) $a < 0 \iff 0 < -a$, y análogamente con $\leq$.

Lema (Signo del cuadrado)

Para todo $a \in \mathbb{R}$,

1. $a \neq 0$ *implica* $a^2 > 0$.
2. $a^2 \geq 0$.

Corolario

$1 > 0$ *y* $2 \neq 0$.

Fuera de la parábola

Lema

$a \cdot b > 0 \iff (a > 0 \text{ y } b > 0)$ ó $(a < 0 \text{ y } b < 0)$.

Fuera de la parábola

Lema

$a \cdot b > 0 \iff (a > 0 \text{ y } b > 0) \text{ ó } (a < 0 \text{ y } b < 0).$

Ejemplo

Determinar los x tales que $(x-1)(x-3) > 0$.

Fuera de la parábola

Lema

$a \cdot b > 0 \iff (a > 0 \text{ y } b > 0) \text{ ó } (a < 0 \text{ y } b < 0).$

Ejemplo

Determinar los x tales que $(x-1)(x-3) > 0$.

Solución

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ó } x > 3\}$$

Fuera de la parábola

Lema

$a \cdot b > 0 \iff (a > 0 \text{ y } b > 0) \text{ ó } (a < 0 \text{ y } b < 0).$

Ejemplo

Determinar los x tales que $(x-1)(x-3) > 0$.

Solución

$$
\begin{aligned}
&\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ó } x > 3\} \\
= &\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}
\end{aligned}
$$

Fuera de la parábola

Lema

$a \cdot b > 0 \iff (a > 0 \text{ y } b > 0) \text{ ó } (a < 0 \text{ y } b < 0).$

Ejemplo

Determinar los x tales que $(x-1)(x-3) > 0$.

Solución

$$\begin{aligned} & \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ó } x > 3\} \\ = & \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\} \\ = & (-\infty, 1) \cup (3, \infty). \end{aligned}$$

Conclusión

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Ejercicios para hoy

Con lo visto esta clase, se pueden trabajar los Ejercicios 1 al 6 del P1.

Ejercicios para hoy

Con lo visto esta clase, se pueden trabajar los Ejercicios 1 al 6 del P1.

Ejercicios Extra

1. **Desde los axiomas.** Requieren más ingenio.
2. **Otros ejercicios.** Para reforzar los conceptos.

De estos últimos, pueden hacer del 28 al 31d con lo de hoy.

Ejercicios para hoy

Con lo visto esta clase, se pueden trabajar los Ejercicios 1 al 6 del P1.

Ejercicios Extra

1. **Desde los axiomas.** Requieren más ingenio.
2. **Otros ejercicios.** Para reforzar los conceptos.

De estos últimos, pueden hacer del 28 al 31d con lo de hoy.

Pregunta

Si partimos una recta en una "parte izquierda" y una "parte derecha", ¿cómo queda donde se partió? $\cdots$———?———$\cdots$

Ejercicios para hoy

Con lo visto esta clase, se pueden trabajar los Ejercicios 1 al 6 del P1.

Ejercicios Extra

1. **Desde los axiomas.** Requieren más ingenio.
2. **Otros ejercicios.** Para reforzar los conceptos.

De estos últimos, pueden hacer del 28 al 31d con lo de hoy.

Pregunta

Si partimos una recta en una “parte izquierda” y una “parte derecha”, ¿cómo queda donde se partió? $\cdots$ ——————?—————— $\cdots$

¿Hay dos “átomos” matemáticos en cada borde? ¿Astillas? ¿Médula ósea?

Bibliografía

[1] A. Colombres, “Seres sobrenaturales de la cultura popular argentina”, número 1 en Biblioteca de Cultura Popular, Ediciones del Sol, Buenos Aires, Argentina (2005).

[2] P. Kisbye, et al., “Ingreso a Famaf: materiales de estudio”, FaMAF (2017).

[3] OEIS Foundation Inc., a(n) = 2*a(n-1) + a(n-2), with a(0) = 1, a(1) = 2, a(2) = 4, `https://oeis.org/A052542`, (2023). Entry A052542 in The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences.

[4] OEIS Foundation Inc., Numerators of continued fraction convergents to sqrt(2), `https://oeis.org/A001333`, (2023). Entry A001333 in The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences.

[5] P. Sánchez Terraf, Los misterios de la diagonal, `https://www.youtube.com/watch?v=AgJt1YSijSI`, (2021). Charla para la actividad *Mes de la Ciencia* organizada por CeIMAF.

[6] M. Spivak, “Calculus”, W.A. Benjamin Inc, New York, NY, USA (1994), segunda edición.

[7] M. Spivak, “Cálculo infinitesimal”, Editorial Reverté S.A., Barcelona, España (1996), segunda edición.

[8] Wikipedia contributors, Analytic geometry — Wikipedia, The Free Encyclopedia, `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Analytic_geometry&oldid=1143062320`, (2023). [Online; accessed 12-March-2023].

[9] Wolfram, Búsqueda de “sqrt 2” en WolframAlpha, `https://www.wolframalpha.com/input?i=sqrt+2`, (2023).