Análisis Matemático I

Pedro Sánchez Terraf

Ana Andrés Martín Agustín Luciana José Luis

FaMAF, 20 de marzo de 2024

Universidad Nacional de Córdoba

1613 - 2013 400 AÑOS

Contenidos estimados para hoy

Repaso

Sección 4.1 del apunte del cursillo

- P. Kisbye et al., *Ingreso a Famaf: materiales de estudio* [1].

Funciones

Funciones

Componentes de una función f

- su conjunto de **salida** X (casi siempre $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{N}$);

Funciones

Componentes de una función f

- su conjunto de **salida** X (casi siempre $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{N}$);
- su conjunto de **llegada** Z (casi siempre $\mathbb{R}$);

Funciones

Componentes de una función f

- su conjunto de **salida** X (casi siempre $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{N}$);
- su conjunto de **llegada** Z (casi siempre $\mathbb{R}$);
- la **regla de asociación**: cómo transforma f a un **argumento** $x \in X$ en un **valor** $f(x) \in Z$.

Funciones

Componentes de una función f

- su conjunto de **salida** X (casi siempre $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{N}$);
- su conjunto de **llegada** Z (casi siempre $\mathbb{R}$);
- la **regla de asociación**: cómo transforma f a un **argumento** $x \in X$ en un **valor** $f(x) \in Z$.

¿Qué es realmente una función?

- Una relación (al final del apunte).

Funciones

Componentes de una función f

- su conjunto de **salida** X (casi siempre $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{N}$);
- su conjunto de **llegada** Z (casi siempre $\mathbb{R}$);
- la **regla de asociación**: cómo transforma f a un **argumento** $x \in X$ en un **valor** $f(x) \in Z$.

¿Qué es realmente una función?

- Una relación (al final del apunte).
- Un conjunto (en Spivak).

Funciones

Componentes de una función f

- su conjunto de **salida** X (casi siempre $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{N}$);
- su conjunto de **llegada** Z (casi siempre $\mathbb{R}$);
- la **regla de asociación**: cómo transforma f a un **argumento** $x \in X$ en un **valor** $f(x) \in Z$.

¿Qué es realmente una función?

- Una relación (al final del apunte).
- Un conjunto (en Spivak).
- Algo “indefinido” (como “conjunto”).

No nos preocuparemos ahora en esto.

Funciones

- Conjunto de salida X (casi siempre $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{N}$);
- conjunto de llegada Z (casi siempre $\mathbb{R}$);
- la regla de asociación

Funciones

- Conjunto de salida X (casi siempre $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{N}$);
- conjunto de llegada Z (casi siempre $\mathbb{R}$);
- la regla de asociación:

Viene dada por una expresión $f(x)$ que involucra x y otras variables (**parámetros**).

Funciones

- Conjunto de salida X (casi siempre $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{N}$);
- conjunto de llegada Z (casi siempre $\mathbb{R}$);
- la regla de asociación:

Viene dada por una expresión $f(x)$ que involucra x y otras variables (**parámetros**). Puede no estar definida para todos los $x \in X$.

Funciones

- Conjunto de salida X (casi siempre $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{N}$);
- conjunto de llegada Z (casi siempre $\mathbb{R}$);
- la regla de asociación:

Viene dada por una expresión $f(x)$ que involucra x y otras variables (**parámetros**). Puede no estar definida para todos los $x \in X$.
Si lo está, escribimos

$$f : X \to Z.$$

Funciones

- Conjunto de salida X (casi siempre $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{N}$);
- conjunto de llegada Z (casi siempre $\mathbb{R}$);
- la regla de asociación:

Viene dada por una expresión $f(x)$ que involucra x y otras variables (**parámetros**). Puede no estar definida para todos los $x \in X$.
Si lo está, escribimos

$$f : X \to Z.$$

Ejemplo

Sea $a \in \mathbb{R}$. Definamos $f(x) := x + a$.

- Conjunto de salida X (casi siempre $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{N}$);
- conjunto de llegada Z (casi siempre $\mathbb{R}$);
- la regla de asociación:

Viene dada por una expresión $f(x)$ que involucra x y otras variables (**parámetros**). Puede no estar definida para todos los $x \in X$.
Si lo está, escribimos

$$f : X \to Z.$$

Ejemplo

Sea $a \in \mathbb{R}$. Definamos $\quad f(x) := x + a$.
La variable a es un parámetro de la definición.

- Conjunto de salida X (casi siempre $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{N}$);
- conjunto de llegada Z (casi siempre $\mathbb{R}$);
- la regla de asociación:

Viene dada por una expresión $f(x)$ que involucra x y otras variables (**parámetros**). Puede no estar definida para todos los $x \in X$.
Si lo está, escribimos

$$f : X \to Z.$$

Ejemplo

Sea $a \in \mathbb{R}$. Definamos $\quad f(x) := x + a$.
La variable a es un parámetro de la definición.
Como $x + a$ está siempre definido, escribimos $\quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Gráficas de funciones

Sea f función con conjuntos de salida y llegada $\mathbb{R}$, y regla $x \mapsto f(x)$.

Gráficas de funciones

Sea f función con conjuntos de salida y llegada $\mathbb{R}$, y regla $x \mapsto f(x)$.

Gráfico de f

$$\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = f(x)\},$$

Gráficas de funciones

Sea f función con conjuntos de salida y llegada $\mathbb{R}$, y regla $x \mapsto f(x)$.

Gráfico de f

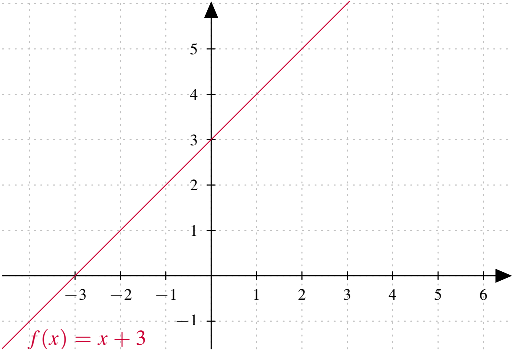
$$\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = f(x)\}, \qquad \{(x,f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

Gráficas de funciones

Sea f función con conjuntos de salida y llegada $\mathbb{R}$, y regla $x \mapsto f(x)$.

Gráfico de f

$$\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = f(x)\}, \qquad \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

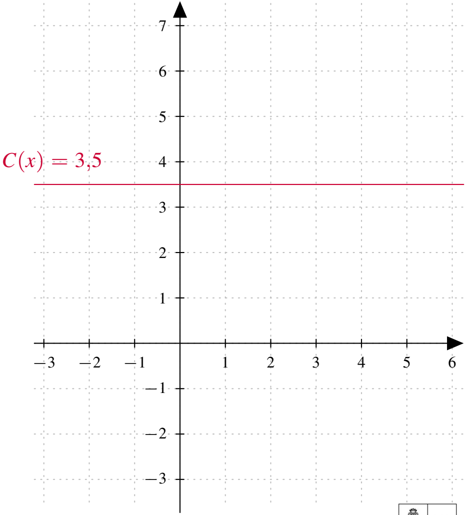


Ejemplos de funciones

Ejemplos de funciones

Función constante
$C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$C(x) := c \qquad (c \in \mathbb{R}).$$



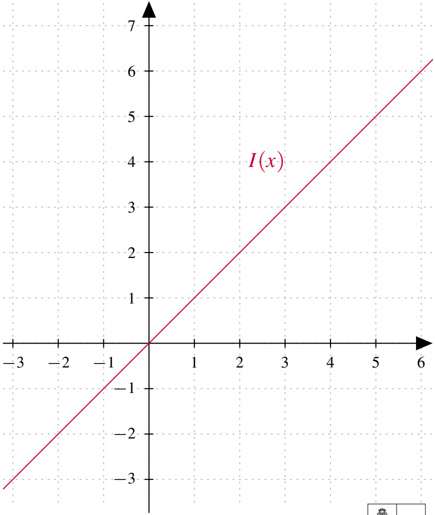
Ejemplos de funciones

Función constante
$C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$C(x) := c \qquad (c \in \mathbb{R}).$$

Función identidad
$I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$I(x) := x.$$



Ejemplos de funciones

Función constante
$C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

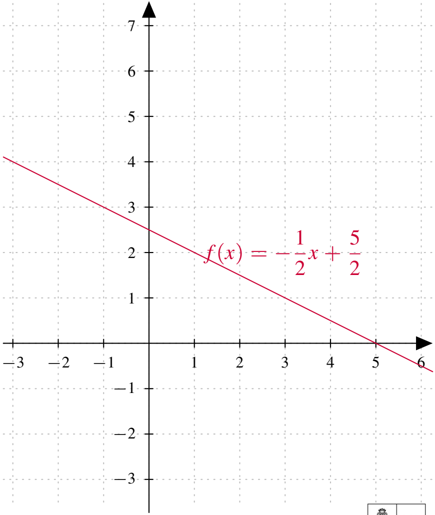
$$C(x) := c \qquad (c \in \mathbb{R}).$$

Función identidad
$I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$I(x) := x.$$

Funciones lineales

$$f(x) := a \cdot x + b.$$



Ejemplos de funciones

Función constante
$C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$C(x) := c \qquad (c \in \mathbb{R}).$$

Función identidad
$I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

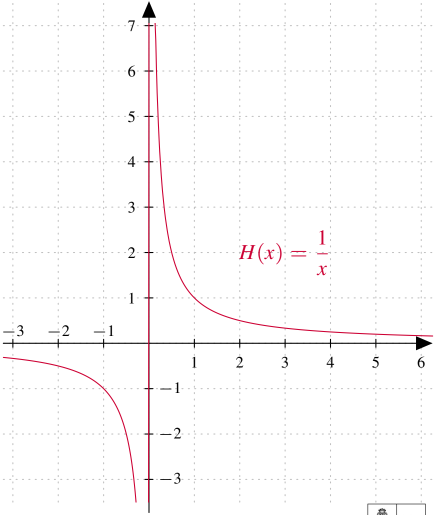
$$I(x) := x.$$

Funciones lineales

$$f(x) := a \cdot x + b.$$

Función recíproco

$$H(x) := \frac{1}{x}.$$



Dominio e imagen

- $H(x) := \dfrac{1}{x} = x^{-1}$ (“recíproco”).

Dominio e imagen

- $H(x) := \dfrac{1}{x} = x^{-1}$ ("recíproco").

H no está definida para $x = 0$.

Dominio e imagen

- $H(x) := \dfrac{1}{x} = x^{-1}$ (“recíproco”).

H no está definida para $x = 0$.

Dominio de una función f

$$\operatorname{Dom} f := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ está definido}\}.$$

Dominio e imagen

- $H(x) := \dfrac{1}{x} = x^{-1}$ (“recíproco”).

H no está definida para $x = 0$.

Dominio de una función f

$$\operatorname{Dom} f := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ está definido}\}.$$

Luego, $\operatorname{Dom} H = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Dominio e imagen

- $H(x) := \dfrac{1}{x} = x^{-1}$ (“recíproco”).

H no está definida para $x = 0$.

Dominio de una función f

$$\operatorname{Dom} f := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ está definido}\}.$$

Luego, $\operatorname{Dom} H = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Si bien no podemos escribir “$H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$”, si consideráramos como conjunto de salida a su dominio podemos escribir $H : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$.

Dominio e imagen

- $H(x) := \dfrac{1}{x} = x^{-1}$ ("recíproco").

H no está definida para $x = 0$.

Dominio de una función f

$$\operatorname{Dom} f := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ está definido}\}.$$

Luego, $\operatorname{Dom} H = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Si bien no podemos escribir "$H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$", si consideráramos como conjunto de salida a su dominio podemos escribir $H : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$.
De todos modos, H no alcanza todos los elementos del conjunto de llegada.

Dominio e imagen

- $H(x) := \dfrac{1}{x} = x^{-1}$ ("recíproco").

H no está definida para $x = 0$.

Dominio de una función f

$$\operatorname{Dom} f := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ está definido}\}.$$

Luego, $\operatorname{Dom} H = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Si bien no podemos escribir "$H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$", si consideráramos como conjunto de salida a su dominio podemos escribir $H : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$.
De todos modos, H no alcanza todos los elementos del conjunto de llegada.

Imagen de una función f

$$\operatorname{Im} f := \{z \in \mathbb{R} \mid \exists x,\ z = f(x)\}$$

Dominio e imagen

- $H(x) := \dfrac{1}{x} = x^{-1}$ ("recíproco").

H no está definida para $x = 0$.

Dominio de una función f

$$\operatorname{Dom} f := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ está definido}\}.$$

Luego, $\operatorname{Dom} H = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Si bien no podemos escribir "$H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$", si consideráramos como conjunto de salida a su dominio podemos escribir $H : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$.
De todos modos, H no alcanza todos los elementos del conjunto de llegada.

Imagen de una función f

$$\operatorname{Im} f := \{z \in \mathbb{R} \mid \exists x,\ z = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in \operatorname{Dom} f\}.$$

Dominio e imagen

- $H(x) := \dfrac{1}{x} = x^{-1}$ (“recíproco”).

H no está definida para $x = 0$.

Dominio de una función f

$$\operatorname{Dom} f := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ está definido}\}.$$

Luego, $\operatorname{Dom} H = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Si bien no podemos escribir “$H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$”, si consideráramos como conjunto de salida a su dominio podemos escribir $H : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$.
De todos modos, H no alcanza todos los elementos del conjunto de llegada.

Imagen de una función f

$$\operatorname{Im} f := \{z \in \mathbb{R} \mid \exists x,\ z = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in \operatorname{Dom} f\}.$$

Luego, $\operatorname{Im} H = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Más funciones

$\mathrm{Dom} f := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ definido}\}.$
$\mathrm{Im} f := \{f(x) \mid x \in \mathrm{Dom} f\}.$

Más funciones

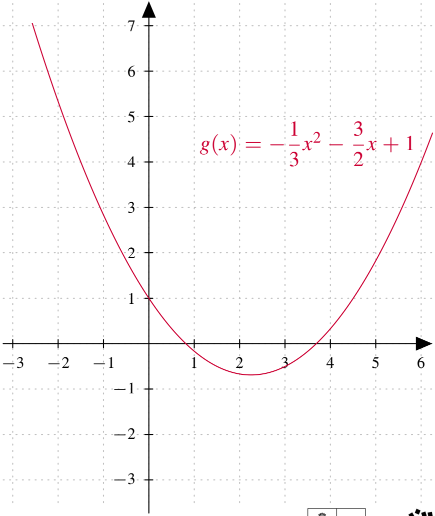
$\mathrm{Dom}\, f := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ definido}\}.$

$\mathrm{Im}\, f := \{f(x) \mid x \in \mathrm{Dom}\, f\}.$

Funciones cuadráticas

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(x) := a \cdot x^2 + b \cdot x + c.$$



$\mathrm{Dom} f := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ definido}\}.$
$\mathrm{Im} f := \{f(x) \mid x \in \mathrm{Dom} f\}.$

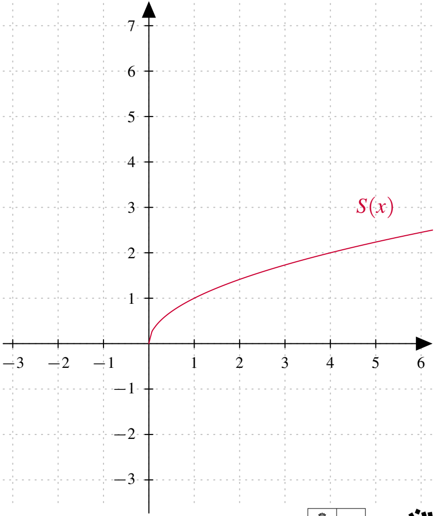
Funciones cuadráticas

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(x) := a \cdot x^2 + b \cdot x + c.$$

Raíz cuadrada positiva

$$S(x) := \sqrt{x}.$$



Más funciones

$\mathrm{Dom} f := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ definido}\}$.
$\mathrm{Im} f := \{f(x) \mid x \in \mathrm{Dom} f\}$.

Funciones cuadráticas

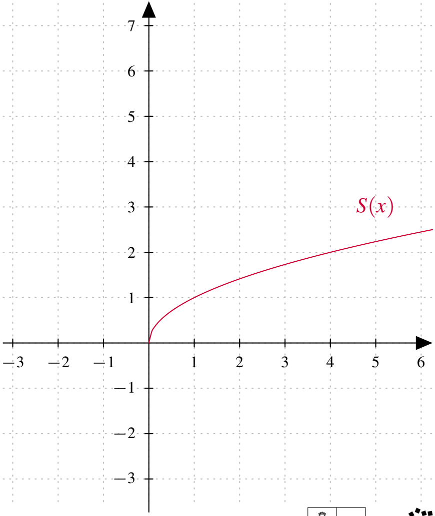
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(x) := a \cdot x^2 + b \cdot x + c.$$

Raíz cuadrada positiva

$$S(x) := \sqrt{x}.$$

$$\mathrm{Dom}\, S = [0, \infty) = \mathbb{R}^{\geq 0}.$$
$$\mathrm{Im}\, S = [0, \infty).$$



Más funciones

$\mathrm{Dom} f := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ definido}\}.$

$\mathrm{Im} f := \{f(x) \mid x \in \mathrm{Dom} f\}.$

Funciones cuadráticas

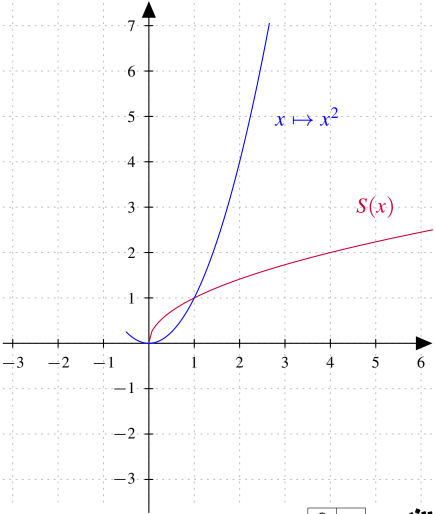
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(x) := a \cdot x^2 + b \cdot x + c.$$

Raíz cuadrada positiva

$$S(x) := \sqrt{x}.$$

$$\mathrm{Dom}\, S = [0, \infty) = \mathbb{R}^{\geq 0}.$$
$$\mathrm{Im}\, S = [0, \infty).$$



Más funciones

$\mathrm{Dom} f := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ definido}\}$.
$\mathrm{Im} f := \{f(x) \mid x \in \mathrm{Dom} f\}$.

Funciones cuadráticas

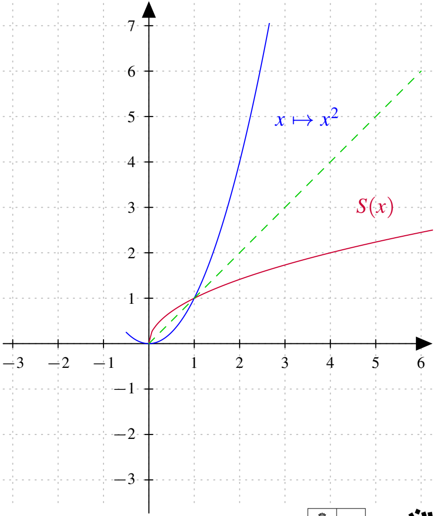
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(x) := a \cdot x^2 + b \cdot x + c.$$

Raíz cuadrada positiva

$$S(x) := \sqrt{x}.$$

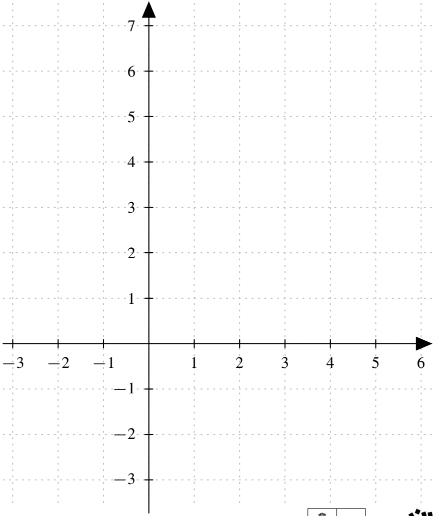
$$\mathrm{Dom}\, S = [0, \infty) = \mathbb{R}^{\geq 0}.$$
$$\mathrm{Im}\, S = [0, \infty).$$



Más funciones

$\operatorname{Dom} f := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ definido}\}.$

$z \in \operatorname{Im} f \iff \exists x,\ z = f(x).$



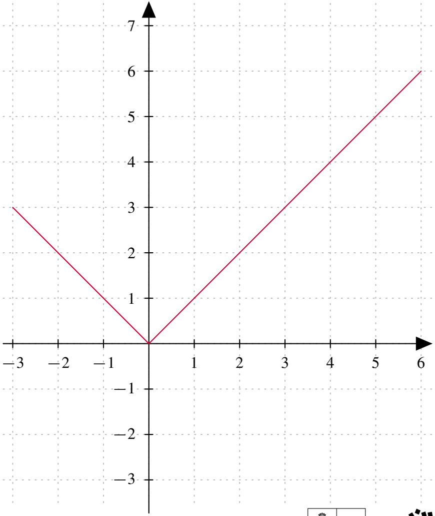
Más funciones

$\mathrm{Dom}\, f := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ definido}\}.$

$z \in \mathrm{Im}\, f \iff \exists x,\ z = f(x).$

Módulo $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$M(x) := |x|.$$



Más funciones

$\mathrm{Dom} f := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ definido}\}$.

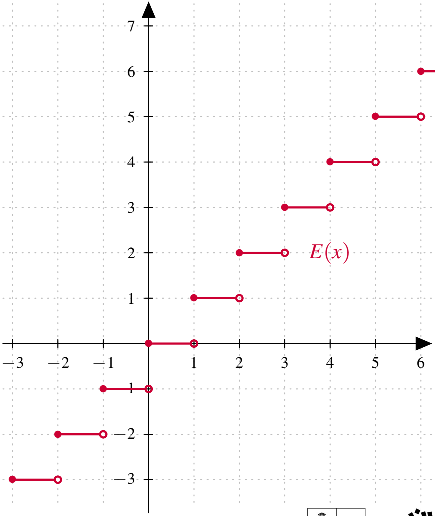
$z \in \mathrm{Im} f \iff \exists x,\ z = f(x)$.

Módulo $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$M(x) := |x|.$$

Parte entera $E : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$

$$E(x) := \lfloor x \rfloor.$$



Más funciones

$\mathrm{Dom} f := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ definido}\}.$

$z \in \mathrm{Im} f \iff \exists x,\ z = f(x).$

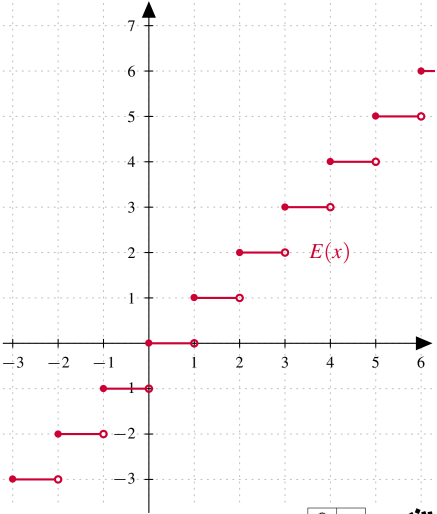
Módulo $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$M(x) := |x|.$$

Parte entera $E : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$

$$E(x) := \lfloor x \rfloor.$$

$$E(-0{,}5) = \lfloor -0{,}5 \rfloor = -1.$$



Más funciones

$\mathrm{Dom} f := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ definido}\}.$

$z \in \mathrm{Im} f \iff \exists x,\ z = f(x).$

Módulo $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

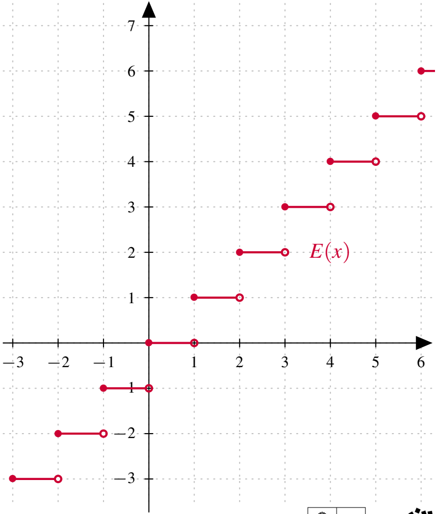
$$M(x) := |x|.$$

Parte entera $E : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$

$$E(x) := \lfloor x \rfloor.$$

$$E(-0{,}5) = \lfloor -0{,}5 \rfloor = -1.$$

$\lfloor x \rfloor :=$ el mayor entero $z \leq x$.

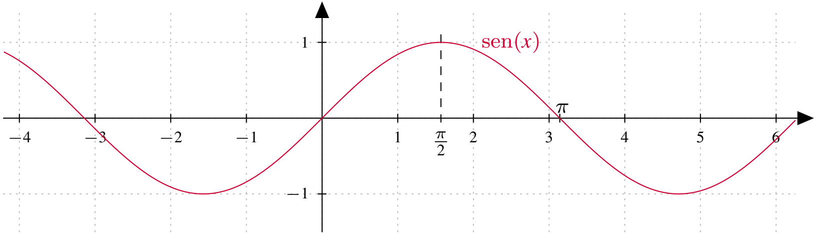


Funciones trigonométricas

$$\operatorname{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \tan : \mathbb{R} \smallsetminus \{\dots\} \to \mathbb{R}.$$

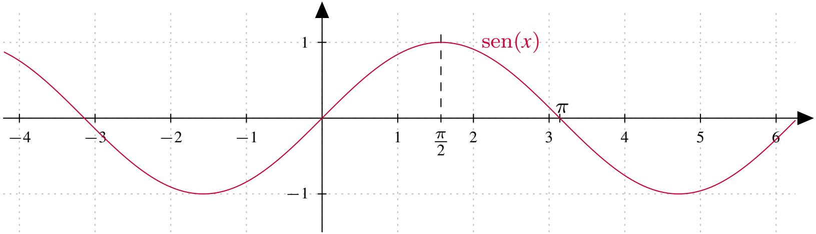
Funciones trigonométricas

$$\operatorname{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \tan : \mathbb{R} \setminus \{\dots\} \to \mathbb{R}.$$



Funciones trigonométricas

$$\operatorname{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \tan : \mathbb{R} \setminus \{\dots\} \to \mathbb{R}.$$



¡Repasar!

El material del cursillo, Secciones 5.1 a 5.3 (pp. 163–171).

Aritmética de funciones

Aritmética de funciones

Suma, producto, cociente

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x); \quad \mathrm{Dom}\, f+g = \mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g.$

Aritmética de funciones

Suma, producto, cociente

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x); \quad \mathrm{Dom}\, f+g = \mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g.$
- $(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x); \quad \mathrm{Dom}\, f\cdot g = \mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g.$

Aritmética de funciones

Suma, producto, cociente

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$; $\quad \operatorname{Dom} f + g = \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g$.
- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$; $\quad \operatorname{Dom} f \cdot g = \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g$.
- $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$;
  $\operatorname{Dom} f/g = \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\}$.

Aritmética de funciones

Suma, producto, cociente

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x); \quad \operatorname{Dom} f+g = \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g.$
- $(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x); \quad \operatorname{Dom} f\cdot g = \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g.$
- $(f/g)(x) = f(x)/g(x);$
  $\operatorname{Dom} f/g = \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\}.$

Composición

- $(f\circ g)(x) = f(g(x));$
  $\operatorname{Dom} f\circ g = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \operatorname{Dom} g \wedge g(x) \in \operatorname{Dom} f\}.$

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Aritmética de funciones

Suma, producto, cociente

- $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$; $\quad \operatorname{Dom} f+g = \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g$.
- $(f \cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x)$; $\quad \operatorname{Dom} f\cdot g = \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g$.
- $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$;
  $\operatorname{Dom} f/g = \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\}$.

Composición

- $(f \circ g)(x) = f(g(x))$;
  $\operatorname{Dom} f \circ g = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \operatorname{Dom} g \wedge g(x) \in \operatorname{Dom} f\}$.

Ejemplo

- $f(x) := x^2$, $g(x) := \frac{1}{x-1}$.

Aritmética de funciones

Suma, producto, cociente

- $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$; $\quad \mathrm{Dom}\, f+g = \mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g$.
- $(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x)$; $\quad \mathrm{Dom}\, f\cdot g = \mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g$.
- $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$;
  $\mathrm{Dom}\, f/g = \mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\}$.

Composición

- $(f\circ g)(x) = f(g(x))$;
  $\mathrm{Dom}\, f\circ g = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathrm{Dom}\, g \wedge g(x) \in \mathrm{Dom}\, f\}$.

Ejemplo

- $f(x) := x^2$, $g(x) := \frac{1}{x-1}$. ¿$\mathrm{Dom}\, f\circ g$?

Aritmética de funciones

Suma, producto, cociente

- $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$; $\quad \mathrm{Dom}\, f+g = \mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g$.
- $(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x)$; $\quad \mathrm{Dom}\, f\cdot g = \mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g$.
- $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$;
  $\mathrm{Dom}\, f/g = \mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\}$.

Composición

- $(f\circ g)(x) = f(g(x))$;
  $\mathrm{Dom}\, f\circ g = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathrm{Dom}\, g \wedge g(x) \in \mathrm{Dom}\, f\}$.

Ejemplo

- $f(x) := x^2$, $g(x) := \frac{1}{x-1}$. ¿$\mathrm{Dom}\, f\circ g$?
- $H(x) := \frac{1}{x}$.

Aritmética de funciones

Suma, producto, cociente

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x); \quad \operatorname{Dom} f+g = \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g.$
- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x); \quad \operatorname{Dom} f \cdot g = \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g.$
- $(f/g)(x) = f(x)/g(x);$
  $\operatorname{Dom} f/g = \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\}.$

Composición

- $(f \circ g)(x) = f(g(x));$
  $\operatorname{Dom} f \circ g = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \operatorname{Dom} g \wedge g(x) \in \operatorname{Dom} f\}.$

Ejemplo

- $f(x) := x^2$, $g(x) := \frac{1}{x-1}$. ¿$\operatorname{Dom} f \circ g$?
- $H(x) := \frac{1}{x}$. ¿$H \circ H$?

Propiedades de funciones

- $\operatorname{Dom} f := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ definido}\}$.
- $\operatorname{Im} f := \{f(x) \mid x \in \operatorname{Dom} f\}$.

Propiedades de funciones

- $\mathrm{Dom} f := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x)$ definido$\}$.
- $\mathrm{Im} f := \{f(x) \mid x \in \mathrm{Dom} f\}$.

Definiciones

- $f : X \to Z$ es **inyectiva** (o “uno a uno”, **1-1**) si $\forall x, y \in X,\ f(x) = f(y) \implies x = y$.

Propiedades de funciones

- $\mathrm{Dom} f := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ definido}\}$.
- $\mathrm{Im} f := \{f(x) \mid x \in \mathrm{Dom} f\}$.

Definiciones

- $f : X \to Z$ es **inyectiva** (o “uno a uno”, **1-1**) si $\forall x, y \in X,\ f(x) = f(y) \implies x = y$.
- $f : X \to Z$ es **suryectiva** o **sobreyectiva** (o “sobre”) si $\mathrm{Im} f = Z$

Propiedades de funciones

- $\mathrm{Dom} f := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ definido}\}$.
- $\mathrm{Im} f := \{f(x) \mid x \in \mathrm{Dom} f\}$.

Definiciones

- $f : X \to Z$ es **inyectiva** (o “uno a uno”, **1-1**) si
  $\forall x, y \in X,\ f(x) = f(y) \implies x = y$.
- $f : X \to Z$ es **suryectiva** o **sobreyectiva** (o “sobre”) si $\mathrm{Im} f = Z$:
  $\forall z \in Z,\ \exists x \in X,\ z = f(x)$.

- $\mathrm{Dom} f := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x)$ definido$\}$.
- $\mathrm{Im} f := \{f(x) \mid x \in \mathrm{Dom} f\}$.

Definiciones

- $f : X \to Z$ es **inyectiva** (o “uno a uno”, **1-1**) si
  $\forall x, y \in X,\ f(x) = f(y) \implies x = y$.
- $f : X \to Z$ es **suryectiva** o **sobreyectiva** (o “sobre”) si $\mathrm{Im} f = Z$:
  $\forall z \in Z,\ \exists x \in X,\ z = f(x)$.

Si no decimos nada sobre los conjuntos de salida y llegada de f, se supone que son $\mathbb{R}$ y se tiene

- f es 1-1 si $\forall x, y \in \mathrm{Dom} f,\ f(x) = f(y) \implies x = y$.
- f es sobre si $\forall z \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathrm{Dom} f,\ z = f(x)$.

Propiedades de funciones

- $f : X \to Z$ es 1-1 $\iff \forall x, y \in X,\ f(x) = f(y) \implies x = y$.
- $f : X \to Z$ es sobre $\iff \forall z \in Z,\ \exists x \in X,\ z = f(x)$.
- [P1E2c] $0 \le x, y$ implica $x \le y \iff x^2 \le y^2$.

Propiedades de funciones

- $f : X \to Z$ es 1-1 $\iff \forall x, y \in X,\ f(x) = f(y) \implies x = y$.
- $f : X \to Z$ es sobre $\iff \forall z \in Z,\ \exists x \in X,\ z = f(x)$.
- [P1E2c] $0 \leq x, y$ implica $x \leq y \iff x^2 \leq y^2$.

¿Es $f(x) := x^2$ inyectiva? ¿Es sobre?

Propiedades de funciones

- $f : X \to Z$ es 1-1 $\iff \forall x, y \in X,\ f(x) = f(y) \implies x = y$.
- $f : X \to Z$ es sobre $\iff \forall z \in Z,\ \exists x \in X,\ z = f(x)$.
- [P1E2c] $0 \leq x, y$ implica $x \leq y \iff x^2 \leq y^2$.

¿Es $f(x) := x^2$ inyectiva? ¿Es sobre?

Ejemplo

$g : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ dada por $g(x) := x^2$ es 1-1 y sobre.

Propiedades de funciones

- $f : X \to Z$ es 1-1 $\iff \forall x, y \in X,\ f(x) = f(y) \implies x = y$.
- $f : X \to Z$ es sobre $\iff \forall z \in Z,\ \exists x \in X,\ z = f(x)$.
- [P1E2c] $0 \leq x, y$ implica $x \leq y \iff x^2 \leq y^2$.

¿Es $f(x) := x^2$ inyectiva? ¿Es sobre?

Ejemplo

$g : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ dada por $g(x) := x^2$ es 1-1 y sobre.

Ejercicio (fácil)

Probar que $h : \mathbb{R}^{\leq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ dada por $h(x) := x^2$ es 1-1 y sobre.

Propiedades de funciones

- $f : X \to Z$ es 1-1 $\iff \forall x, y \in X,\ f(x) = f(y) \implies x = y$.
- $f : X \to Z$ es sobre $\iff \forall z \in Z,\ \exists x \in X,\ z = f(x)$.
- [P1E2c] $0 \leq x, y$ implica $x \leq y \iff x^2 \leq y^2$.

¿Es $f(x) := x^2$ inyectiva? ¿Es sobre?

Ejemplo

$g : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ dada por $g(x) := x^2$ es 1-1 y sobre.

Ejercicio (fácil)

Probar que $h : \mathbb{R}^{\leq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ dada por $h(x) := x^2$ es 1-1 y sobre.

Definición

Una función es **biyectiva** si es inyectiva y suryectiva.

Propiedades de funciones

- $f : X \to Z$ es 1-1 $\iff \forall x, y \in X,\ f(x) = f(y) \implies x = y$.
- [P1E2c] $0 \leq x, y$ implica $x < y \implies x^2 < y^2$.
- $g : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ dada por $g(x) := x^2$ es 1-1 y sobre.

Propiedades de funciones

- $f : X \to Z$ es 1-1 $\iff \forall x, y \in X,\ f(x) = f(y) \implies x = y$.
- [P1E2c] $0 \leq x, y$ implica $x < y \implies x^2 < y^2$.
- $g : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ dada por $g(x) := x^2$ es 1-1 y sobre.

La propiedad del ejercicio del práctico es clave en la prueba de 1-1.

Propiedades de funciones

- $f : X \to Z$ es 1-1 $\iff \forall x, y \in X,\ f(x) = f(y) \implies x = y$.
- [P1E2c] $0 \leq x, y$ implica $x < y \implies x^2 < y^2$.
- $g : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ dada por $g(x) := x^2$ es 1-1 y sobre.

La propiedad del ejercicio del práctico es clave en la prueba de 1-1.

Definición

$f : X \to Z$ es **estrictamente** (de)**creciente** si
$\forall x, y \in X, x < y \implies f(x) < f(y) \quad (f(x) > f(y))$

Propiedades de funciones

- $f : X \to Z$ es 1-1 $\iff \forall x, y \in X,\ f(x) = f(y) \implies x = y$.
- [P1E2c] $0 \leq x, y$ implica $x < y \implies x^2 < y^2$.
- $g : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ dada por $g(x) := x^2$ es 1-1 y sobre.

La propiedad del ejercicio del práctico es clave en la prueba de 1-1.

Definición

$f : X \to Z$ es **estrictamente (de)creciente** si
$\forall x, y \in X, x < y \implies f(x) < f(y)\ \ (f(x) > f(y))$

Propiedades de funciones

- $f : X \to Z$ es 1-1 $\iff \forall x, y \in X,\ f(x) = f(y) \implies x = y$.
- [P1E2c] $0 \leq x, y$ implica $x < y \implies x^2 < y^2$.
- $g : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ dada por $g(x) := x^2$ es 1-1 y sobre.

La propiedad del ejercicio del práctico es clave en la prueba de 1-1.

Definición

$f : X \to Z$ es **estrictamente (de)creciente** si
$\forall x, y \in X, x < y \implies f(x) < f(y) \ \ (f(x) > f(y))$

Lema

Si $f : X \to Z$ es estrictamente (de)creciente, entonces es 1-1.

Propiedades de funciones

- $f : X \to Z$ es 1-1 $\iff \forall x, y \in X,\ f(x) = f(y) \implies x = y$.
- [P1E2c] $0 \leq x, y$ implica $x < y \implies x^2 < y^2$.
- $g : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ dada por $g(x) := x^2$ es 1-1 y sobre.

La propiedad del ejercicio del práctico es clave en la prueba de 1-1.

Definición

$f : X \to Z$ es **estrictamente (de)creciente** si
$\forall x, y \in X, x < y \implies f(x) < f(y) \ \ (f(x) > f(y))$

Lema

Si $f : X \to Z$ es estrictamente (de)creciente, entonces es 1-1.

Ejercicio

Probarlo para estrictamente decrecientes.

Ejercicios para hoy

Con lo visto esta clase, pueden trabajar hasta el E7 del P2.

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Ejercicios para hoy

Con lo visto esta clase, pueden trabajar hasta el E7 del P2.

Lectura para las próxima clases

- El material del cursillo [1], Secciones 5.1 a 5.3 (pp. 163–171).
- Apunte, páginas 20–24.

Bibliografía

[1] P. KISBYE, ET AL., “Ingreso a Famaf: materiales de estudio”, FaMAF (2017).