# Análisis Matemático I

Pedro Sánchez Terraf

Ana Andrés Diego Martín Agustín Luciana José Luis Romina

FaMAF, 25 de marzo de 2024

# Contenidos estimados para hoy

# Repaso: funciones

# Repaso: funciones

## Componentes de una función $f$

- Conjunto de salida $X$ (casi siempre $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{N}$);
- conjunto de llegada $Z$ (casi siempre $\mathbb{R}$);
- la regla de asociación $x \in X \longmapsto f(x) \in Z$.

# Repaso: funciones

## Componentes de una función $f$

- Conjunto de salida $X$ (casi siempre $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{N}$);
- conjunto de llegada $Z$ (casi siempre $\mathbb{R}$);
- la regla de asociación $x \in X \longmapsto f(x) \in Z$.

## Dominio e imagen

- $\operatorname{Dom} f := \{x \in X \mid f(x)$ está definido$\}$.
- $\operatorname{Im} f := \{z \in \mathbb{R} \mid \exists x,\ z = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in \operatorname{Dom} f\}$

# Repaso: funciones

## Componentes de una función $f$

- Conjunto de salida $X$ (casi siempre $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{N}$);
- conjunto de llegada $Z$ (casi siempre $\mathbb{R}$);
- la regla de asociación $x \in X \longmapsto f(x) \in Z$.

## Dominio e imagen

- $\mathrm{Dom} f := \{x \in X \mid f(x) \text{ está definido}\}$.
- $\mathrm{Im} f := \{z \in \mathbb{R} \mid \exists x,\ z = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in \mathrm{Dom} f\}$
- $f$ es 1-1 $\iff \forall x, y \in \mathrm{Dom} f,\ f(x) = f(y) \implies x = y$.
- $f$ es sobre $\iff \forall z \in Z,\ \exists x \in \mathrm{Dom} f,\ z = f(x)$.

# Funciones 1-1 y sobre

- $\mathrm{Dom} f := \{x \in X \mid f(x)$ está definido$\}$.
- $\mathrm{Im} f := \{z \in \mathbb{R} \mid \exists x,\ z = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in \mathrm{Dom} f\}$
- $f$ es 1-1 $\iff \forall x, y \in \mathrm{Dom} f,\ f(x) = f(y) \implies x = y$.
- $f$ es sobre $\iff \forall z \in Z,\ \exists x \in \mathrm{Dom} f,\ z = f(x)$.

# Funciones 1-1 y sobre

- $\mathrm{Dom} f := \{x \in X \mid f(x)$ está definido$\}$.
- $\mathrm{Im} f := \{z \in \mathbb{R} \mid \exists x,\ z = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in \mathrm{Dom} f\}$
- $f$ es 1-1 $\iff \forall x, y \in \mathrm{Dom} f,\ f(x) = f(y) \implies x = y$.
- $f$ es sobre $\iff \forall z \in Z,\ \exists x \in \mathrm{Dom} f,\ z = f(x)$.

## Ejemplo

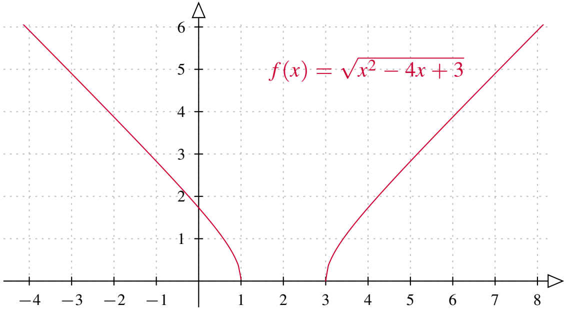
Determinar dominio e imagen de $f(x) := \sqrt{x^2 - 4x + 3}$, decidir si es inyectiva y/o suryectiva.

# Funciones 1-1 y sobre

- $\mathrm{Dom}\, f := \{x \in X \mid f(x)$ está definido$\}$.
- $\mathrm{Im}\, f := \{z \in \mathbb{R} \mid \exists x,\ z = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in \mathrm{Dom}\, f\}$
- $f$ es 1-1 $\iff \forall x, y \in \mathrm{Dom}\, f,\ f(x) = f(y) \implies x = y$.
- $f$ es sobre $\iff \forall z \in Z,\ \exists x \in \mathrm{Dom}\, f,\ z = f(x)$.

## Ejemplo

Determinar dominio e imagen de $f(x) := \sqrt{x^2 - 4x + 3}$, decidir si es inyectiva y/o suryectiva.



# Función inversa

- $\mathrm{Dom}\, f \;:=\; \{x \in X \mid f(x)$ está definido$\}$.
- $\mathrm{Im}\, f := \{z \in \mathbb{R} \mid \exists x,\ z = f(x)\} \;=\; \{f(x) \mid x \in \mathrm{Dom}\, f\}$
- $f$ es 1-1 $\iff \forall x, y \in \mathrm{Dom}\, f,\ f(x) = f(y) \implies x = y$.

# Función inversa

- $\mathrm{Dom}\, f \;:=\; \{x \in X \mid f(x)$ está definido$\}$.
- $\mathrm{Im}\, f := \{z \in \mathbb{R} \mid \exists x,\ z = f(x)\} \;=\; \{f(x) \mid x \in \mathrm{Dom}\, f\}$
- $f$ es 1-1 $\iff \forall x, y \in \mathrm{Dom}\, f,\ f(x) = f(y) \implies x = y$.

## Definición

Sea $f : X \to Z$ inyectiva. La **función inversa** $f^{-1}$ de $f$ tiene conjunto de salida $Z$ y de llegada $X$ y está definida por la regla

$$f^{-1}(z) \;:=\; (\text{el único } x \text{ tal que } f(x) = z).$$

# Función inversa

- $\operatorname{Dom} f \ := \ \{x \in X \mid f(x)$ está definido$\}$.
- $\operatorname{Im} f := \{z \in \mathbb{R} \mid \exists x,\ z = f(x)\} \ = \ \{f(x) \mid x \in \operatorname{Dom} f\}$
- $f$ es 1-1 $\iff \forall x, y \in \operatorname{Dom} f,\ f(x) = f(y) \implies x = y$.

## Definición

Sea $f : X \to Z$ inyectiva. La **función inversa** $f^{-1}$ de $f$ tiene conjunto de salida $Z$ y de llegada $X$ y está definida por la regla

$$f^{-1}(z) \ := \ (\text{el único } x \text{ tal que } f(x) = z).$$

## Proposición

*Sea $f : X \to Z$ inyectiva. Entonces $\operatorname{Dom} f^{-1} = \operatorname{Im} f$.*

# Función inversa

- $\mathrm{Dom}\, f^{-1} := \{x \in Z \mid f^{-1}(x) \text{ está definido}\}$.
- $\mathrm{Im}\, f := \{z \in \mathbb{R} \mid \exists x,\ z = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in \mathrm{Dom}\, f\}$
- $f$ es 1-1 $\iff \forall x, y \in \mathrm{Dom}\, f,\ f(x) = f(y) \implies x = y$.

## Definición

Sea $f : X \to Z$ inyectiva. La **función inversa** $f^{-1}$ de $f$ tiene conjunto de salida $Z$ y de llegada $X$ y está definida por la regla

$$f^{-1}(z) := (\text{el único } x \text{ tal que } f(x) = z).$$

## Proposición

*Sea $f : X \to Z$ inyectiva. Entonces $\mathrm{Dom}\, f^{-1} = \mathrm{Im}\, f$.*

# Función inversa

- Composición de funciones: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.
- $f^{-1}(z) \ := \ $ (el único $x$ tal que $f(x) = z$).
- $\mathrm{Im} f := \{z \in \mathbb{R} \mid \exists x,\ z = f(x)\} \ = \ \{f(x) \mid x \in \mathrm{Dom} f\}$
- Sea $f : X \to Z$ inyectiva. Entonces $\mathrm{Dom} f^{-1} = \mathrm{Im} f$.

# Función inversa

- Composición de funciones: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.
- $f^{-1}(z) \ := \ $ (el único $x$ tal que $f(x) = z$).
- $\mathrm{Im} f := \{z \in \mathbb{R} \mid \exists x,\ z = f(x)\} \ = \ \{f(x) \mid x \in \mathrm{Dom} f\}$
- Sea $f : X \to Z$ inyectiva. Entonces $\mathrm{Dom} f^{-1} = \mathrm{Im} f$.

## Ejemplo

Demostrar que $f(x) := \dfrac{x-3}{x+2}$ es inyectiva en su dominio, hallar la inversa y su dominio.

# Función inversa

- Composición de funciones: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.
- $f^{-1}(z) \ := \ $ (el único $x$ tal que $f(x) = z$).
- $\mathrm{Im}\, f := \{z \in \mathbb{R} \mid \exists x,\ z = f(x)\} \ = \ \{f(x) \mid x \in \mathrm{Dom}\, f\}$
- Sea $f : X \to Z$ inyectiva. Entonces $\mathrm{Dom}\, f^{-1} = \mathrm{Im}\, f$.

## Ejemplo

Demostrar que $f(x) := \dfrac{x-3}{x+2}$ es inyectiva en su dominio, hallar la inversa y su dominio.

## Teorema

*Sea $f$ una función inyectiva. Entonces:*

1. *Si $z \in \mathrm{Im}\, f$, entonces $f(f^{-1}(z)) = z$. Es decir,* $f \circ f^{-1} \ = \ I : \mathrm{Im}\, f \to \mathrm{Im}\, f$.

# Función inversa

- Composición de funciones: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.
- $f^{-1}(z) \;:=\; $ (el único $x$ tal que $f(x) = z$).
- $\mathrm{Im} f := \{z \in \mathbb{R} \mid \exists x,\ z = f(x)\} \;=\; \{f(x) \mid x \in \mathrm{Dom} f\}$
- Sea $f : X \to Z$ inyectiva. Entonces $\mathrm{Dom} f^{-1} = \mathrm{Im} f$.

## Ejemplo

Demostrar que $f(x) := \dfrac{x-3}{x+2}$ es inyectiva en su dominio, hallar la inversa y su dominio.

## Teorema

*Sea $f$ una función inyectiva. Entonces:*

1. *Si $z \in \mathrm{Im} f$, entonces $f(f^{-1}(z)) = z$. Es decir,*
   $f \circ f^{-1} \;=\; I : \mathrm{Im} f \to \mathrm{Im} f$.
2. *Si $y \in \mathrm{Dom} f$, entonces $f^{-1}(f(y)) = y$. Es decir,*
   $f^{-1} \circ f \;=\; I : \mathrm{Dom} f \to \mathrm{Dom} f$.

# Funciones monótonas

- $f : X \to Z$ es **estrictamente (de)creciente** si
  $\forall x, y \in X,\ x < y \implies f(x) < f(y)\ \ (f(x) > f(y))$
- Si $f : X \to Z$ es estrictamente (de)creciente, entonces es 1-1.

# Funciones monótonas

- $f : X \to Z$ es **estrictamente (de)creciente** si $\forall x, y \in X,\ x < y \implies f(x) < f(y)\ \ (f(x) > f(y))$
- Si $f : X \to Z$ es estrictamente (de)creciente, entonces es 1-1.

Ahora, lo mismo pero con $\leq$ ($\geq$):

## Definición

$f : X \to Z$ es **monótona** (de)creciente si
$\forall x, y \in X,\ x \leq y \implies f(x) \leq f(y)\ \ (f(x) \geq f(y))$

# Funciones monótonas

- $f : X \to Z$ es **estrictamente (de)creciente** si
  $\forall x, y \in X,\ x < y \implies f(x) < f(y)\ \ (f(x) > f(y))$
- Si $f : X \to Z$ es estrictamente (de)creciente, entonces es 1-1.

Ahora, lo mismo pero con $\leq$ ($\geq$):

## Definición

$f : X \to Z$ es **monótona** (de)creciente si
$\forall x, y \in X,\ x \leq y \implies f(x) \leq f(y)\ \ (f(x) \geq f(y))$

## Ejercicios (Apunte, Sección 5.3)

1. La suma de monótonas (de)crecientes es monótona (de)creciente.
2. $f$ estr. (de)crec. y $g$ monót. (de)crec. $\implies f + g$ estr. (de)creciente.
3. Si $c \geq 0$ ($c \leq 0$) y $f$ es monót. crec. entonces es $c \cdot f$ es monót. (de)crec.

# ¿Qué es esto?

- $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, \ldots$

# ¿Qué es esto?

- $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, \ldots$
- $2, 1, 4, 3, 6, 5, 8, 7, 10, 9, 12, 11, 14, 13, \ldots$

# ¿Qué es esto?

- $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, \dots$
- $2, 1, 4, 3, 6, 5, 8, 7, 10, 9, 12, 11, 14, 13, \dots$
- $1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, \dots$

# ¿Qué es esto?

- $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, \dots$
- $2, 1, 4, 3, 6, 5, 8, 7, 10, 9, 12, 11, 14, 13, \dots$
- $1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, \dots$
- $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$

# Sucesiones

## Definición

Una **sucesión** es una función con dominio $\mathbb{N}$ y conjunto de llegada $\mathbb{R}$.

### Definición

Una **sucesión** es una función con dominio $\mathbb{N}$ y conjunto de llegada $\mathbb{R}$.

Si $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es una sucesión, escribimos:

### Notación

- $a_n := a(n)$, los **términos** (=valores) de la sucesión;

# Sucesiones

### Definición

Una **sucesión** es una función con dominio $\mathbb{N}$ y conjunto de llegada $\mathbb{R}$.

Si $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es una sucesión, escribimos:

### Notación

- $a_n := a(n)$, los **términos** (=valores) de la sucesión;
- La función $a$ se puede escribir de todas estas maneras:
  $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \quad \{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad \{a_n\}_n, \quad (a_n \mid n \in \mathbb{N}), \quad \langle a_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle, \ldots$

# Sucesiones

## Definición

Una **sucesión** es una función con dominio $\mathbb{N}$ y conjunto de llegada $\mathbb{R}$.

Si $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es una sucesión, escribimos:

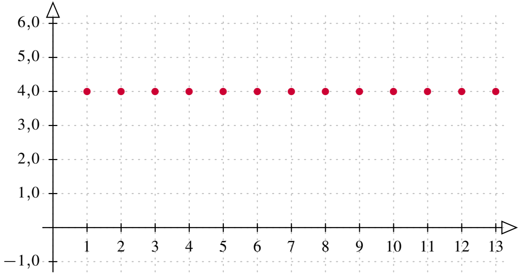
## Notación

- $a_n := a(n)$, los **términos** (=valores) de la sucesión;
- La función $a$ se puede escribir de todas estas maneras:
  $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \quad \{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad \{a_n\}_n, \quad (a_n \mid n \in \mathbb{N}), \quad \langle a_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle, \dots$
- Pero $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto, la imagen de $a$.

# Ejemplos: sucesión constante

## Gráfico de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

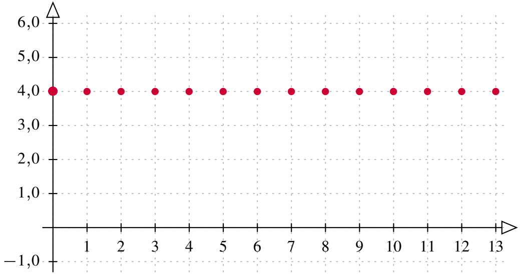
$$a_n := 4$$



# Ejemplos: sucesión constante

## Gráfico de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

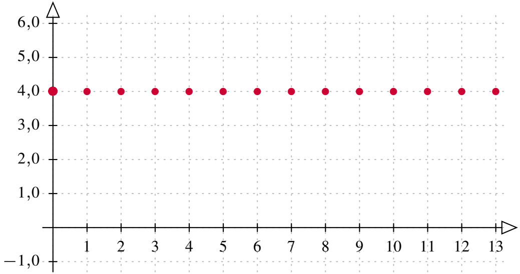
$$a_n := 4$$



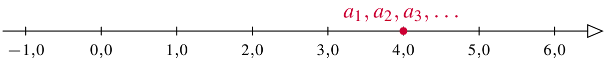
# Ejemplos: sucesión constante

## Gráfico de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$a_n := 4$$




## Imagen $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

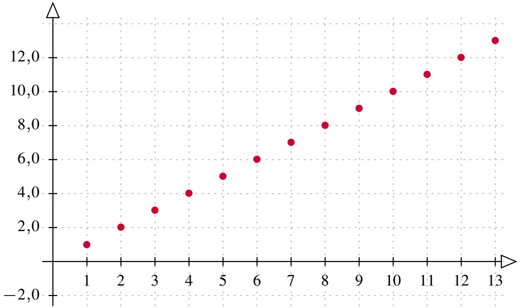


# Ejemplos: sucesión de los naturales

## Gráfico de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$a_n := n$$

(¡Ojo! Cambio de escala en ordenadas)

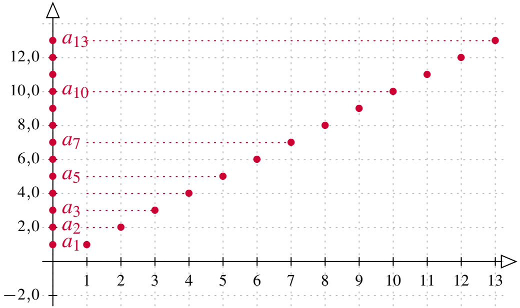


# Ejemplos: sucesión de los naturales

## Gráfico de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$a_n := n$$

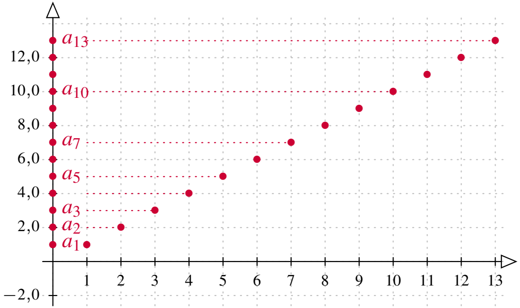
(¡Ojo! Cambio de escala en ordenadas)



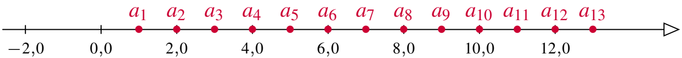
## Gráfico de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$a_n := n$$

(¡Ojo! Cambio de escala en ordenadas)



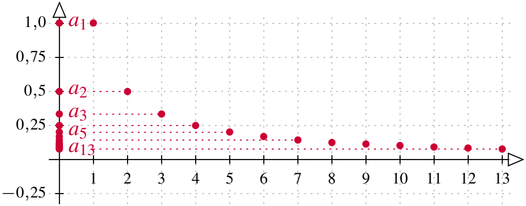

## Imagen $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$



# Ejemplos: sucesión armónica

## Gráfico de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

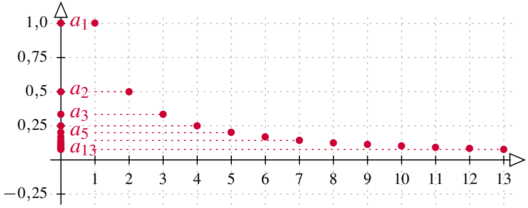
$$a_n := 1/n$$



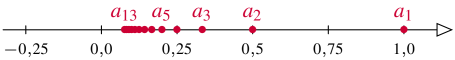
# Ejemplos: sucesión armónica

## Gráfico de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$a_n := 1/n$$



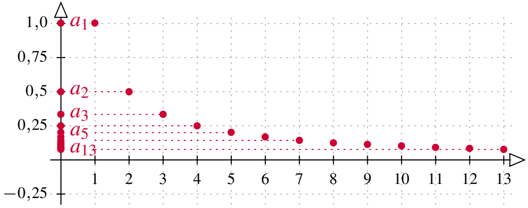

## Imagen $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$



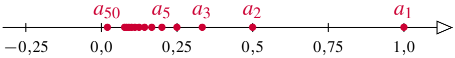
# Ejemplos: sucesión armónica

## Gráfico de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$a_n := 1/n$$



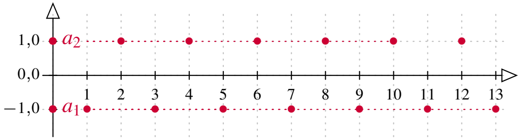

## Imagen $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$



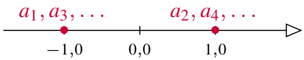
# Ejemplos: sucesión oscilante

## Gráfico de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$a_n := (-1)^n$$



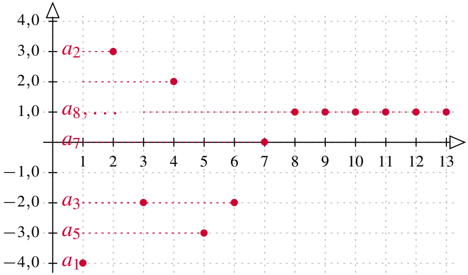

## Imagen $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$



# Ejemplos: sucesión eventualmente constante

## Gráfico de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = -4, 3, \dots, 0, 1, 1, 1, \dots$$




## Imagen $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Nos interesa el comportamiento de las sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ "cuando $n$ es suficientemente grande".

# Límites

Nos interesa el comportamiento de las sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ "cuando $n$ es suficientemente grande".

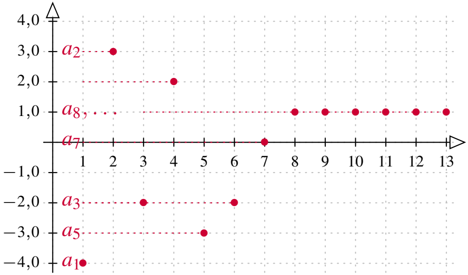
## Pregunta

¿Cuánto es "suficientemente"?

# Ejemplos: sucesión eventualmente constante

## Gráfico de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = -4, 3, \dots, 0, 1, 1, 1, \dots$$




## Imagen $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

# Límites

Nos interesa el comportamiento de las sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ "cuando $n$ es suficientemente grande".

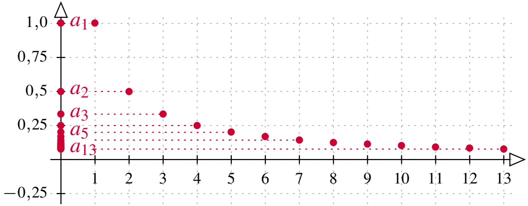
## Pregunta

¿Cuánto es "suficientemente"?

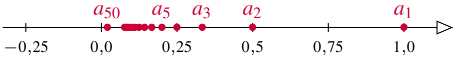
- Para una eventualmente constante, ¿es **8**?

## Gráfico de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$a_n := 1/n$$




## Imagen $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$



# Límites

Nos interesa el comportamiento de las sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ “cuando $n$ es suficientemente grande”.

## Pregunta

¿Cuánto es “suficientemente”?

- Para una eventualmente constante, ¿es **8**?
- Para la armónica, ¿es “nunca”?

# Límites

Nos interesa el comportamiento de las sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ "cuando $n$ es suficientemente grande".

## Pregunta

¿Cuánto es "suficientemente"?

- Para una eventualmente constante, ¿es **8**?
- Para la armónica, ¿es "nunca"?

## Desafío

Definir "eventualmente constante".

# Eventualmente

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es eventualmente constante $\iff$ existe $c \in \mathbb{R}$ y existe $N$ tal que $\forall n \geq N,\ a_n = c$.

# Eventualmente

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es eventualmente constante $\iff$ existe $c \in \mathbb{R}$ y existe $N$ tal que $\forall n \geq N,\ a_n = c$.

## Ejercicios

1. Supongamos que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es eventualmente constante y esto está atestiguado por $c$ y $N$. Demostrar que cualquier $N' \geq N$ también sirve para justificarlo.
2. Definir formalmente:
   "*Los términos de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eventualmente tienen módulo menor que $\epsilon$*".

# Ejercicios para hoy

Con lo visto esta clase, pueden terminar el P2.

# Ejercicios para hoy

Con lo visto esta clase, pueden terminar el P2.

## Lectura para las próxima clases

- Apunte, páginas 21–25.
- Spivak [1] Cap. 21, páginas 613–616.

# Bibliografía

[1] M. SPIVAK, "Cálculo infinitesimal", Editorial Reverté S.A., Barcelona, España (1996), segunda edición.