Teoría de Conjuntos Descriptiva y Aplicaciones: Apunte

Pedro Sánchez Terraf*

6 de marzo de 2016

1. Preliminares en Topología

Se requiere un conocimiento básico de topología y espacios métricos: puede utilizarse como referencia capítulos 0 y 1 de Kelley [6] (pp. 37–48, ejercicios A, D(a), E, F, G) y el capítulo 3 (salvo la última sección); ejercicios C, E, G(a,b), I, L, M).

2. Temas

2.1. Sucesiones

Biyección $T \mapsto [T]$ entre árboles podados y cerrados de $A^{\mathbb{N}}$

La función $T \mapsto [T]$ es inyectiva porque T es árbol podado si y sólo si $s \in T \Leftrightarrow \exists x \in [T], \exists n : s = x|n$.

Es sobreyectiva: Sea F cerrado. Luego $F = \left(\bigcup_{s\in I} N_s\right)^{\mathsf{c}}$ tal que N_s son maximales entre los incluidos en F^{c} (corresponde a s minimales). Agregamos a I todas las extensiones de sus elementos:

$$\bar{I} := \{s^\frown t : s \in I,\ t \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}.$$

Probaremos que $\bar{I}^{\mathsf{c}}$ es un árbol podado tal que $[\bar{I}^{\mathsf{c}}] = F$. Si $s^\frown a \in \bar{I}$ para todo $a \in A$, entonces $s \in \bar{I}$ (*) (pues $\bigcup_a N_{s^\frown a} = N_s$). Luego

$$x \in F \Leftrightarrow \forall s \in \bar{I} : s \not\subseteq x \Leftrightarrow \forall s \subseteq x : s \notin \bar{I} \Leftrightarrow \forall s \subseteq x : s \in \bar{I}^{\mathsf{c}} \Leftrightarrow \forall n : x|n \in \bar{I}^{\mathsf{c}}.$$

Como $\bar{I}$ es cerrado por extensiones, $\bar{I}^{\mathsf{c}}$ es cerrado por segmentos iniciales. Por otro lado, (*) implica que $\bar{I}^{\mathsf{c}}$ es podado.

Definición 1. Sean S, T árboles (sobre los conjuntos A, B, resp.). Una función $\varphi : S \to T$ se dice *monótona* si $s \subseteq t$ implica $\varphi(s) \subseteq \varphi(t)$. Decimos que φ es *propia* si para todo $x \in [S]$, $\lim_n |\varphi(x|n)| = \infty$.

Proposición 2. *Sea $\varphi : S \to T$ monótona y propia. Luego $\varphi^*(x) := \bigcup_n \varphi(x|n)$ define una función continua $\varphi^* : [S] \to [T]$.*

Demostración. Basta ver que $(\varphi^*)^{-1}(N_t \cap [T]) = \bigcup\{N_s \cap [S] : s \in S, \varphi(s) \supseteq t\}$. □

*CIEM-FAMAF

Definición 3. Sea X un espacio topológico y $F \subseteq X$. F es un *retracto* de X si existe $f : X \to F$ continua y sobreyectiva tal que $f|F = \mathrm{id}_F$.

Proposición 4. *Sean $H \subseteq F$ cerrados no vacíos de $A^{\mathbb{N}}$. Luego H es un retracto de F.*

Demostración. Sean S, T árboles podados sobre A tales que $[S] = F$ y $[T] = H$ (luego $T \subseteq S$). Definimos $\varphi : S \to T$ construyendo $\varphi(s)$ por inducción en $|s|$. Definimos $\varphi(\varnothing) = \varnothing$. Dado $\varphi(s) \in T$, definimos

$$\varphi(s^\frown a) := \begin{cases} s^\frown a & \text{si este elemento está en } T, \\ \varphi(s)^\frown b & \text{para algún } b \text{ tal que esté en } T, \end{cases}$$

lo cual es posible pues T es podado. Es inmediato que $\varphi(t) = t$ para todo $t \in T$ y que $s \subseteq s'$ implica $\varphi(s) \subseteq \varphi(s')$. Como φ es obviamente propia (notar que $|\varphi(s)| = |s|$), basta tomar φ^* como en la Proposición anterior y obtendremos nuestro resultado. □

2.2. Ordinales: un cacho de cultura

Definición 5. Sea X espacio topológico. La *derivada de Cantor-Bendixson* de X es $X' := \{x \in X : x \text{ no es aislado}\}$.

La derivada de Cantor-Bendixson se puede iterar finitas veces:

$$X^{(0)} := X; \qquad X^{(n+1)} := \left(X^{(n)}\right)'.$$

Notemos que esta derivada es *decreciente*, $X^{(n)} \supseteq X^{(n+1)}$, Tomando ω como símbolo greco-judeo-cristiano de infinito, podríamos definir

$$X^{(\omega)} := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X^{(n)}.$$

¿Se puede seguir aplicando $(\cdot)'$? ¿Obtenemos algo nuevo? Sí: existe un subconjunto cerrado Ω de $\mathbb{R}$ tal que $\Omega^{(\omega)} \neq \Omega^{(n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\left(\Omega^{(\omega)}\right)' \neq \Omega^{(\omega)}$. Definimos entonces

$$X^{(\omega+1)} := \left(X^{(\omega)}\right)'.$$

G. Cantor vio que en un espacio topológico general, este proceso podría aplicarse indefinidamente, e indizó este proceso con los *ordinales*. Para definir ordinales, necesitamos saber en primer lugar qué es un buen orden.

Buenos órdenes

Definición 6. Un *conjunto bien ordenado* $\langle X, \preceq \rangle$ es un conjunto X con una relación de orden (total) $\preceq$ tal que todo $Y \subseteq X$ no vacío tiene elemento mínimo según $\preceq$:

$$\forall Y \subseteq X : \exists y \in Y. \forall z \in Y \ (y \preceq z).$$

En este caso decimos que $\preceq$ es un *buen orden* (sobre X).

El ejemplo paradigmático de conjunto bien ordenado es $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$. Otros ejemplos son los siguientes (Fraenkel, [2]): $\langle \mathbb{Z}, \preceq \rangle$, donde $\preceq$ coincide con la relación $\leq$ para pares de números no negativos, se invierte para pares de números negativos, y estipula que todos los números negativos son mayores que todos los positivos:

$$0, 1, 2, 3, \ldots, -1, -2, -3, \ldots, \tag{1}$$

El siguiente es un buen orden sobre $\mathbb{Q}^+$:

$$1, 2, 3, \ldots, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \ldots, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \ldots \tag{2}$$

También, de manera trivial, todo conjunto finito totalmente ordenado es un buen orden (incluimos en este caso al conjunto vacío). En nuestra definición estamos suponiendo que el orden $\preceq$ corresponde a una relación de "menor o igual". Para referirnos al orden estricto usaremos a veces $\prec$ y en general también diremos que $\langle X, \prec \rangle$ es un buen orden.[1]

Se sigue de la definición que si $\langle X, \preceq \rangle$ es un buen orden entonces para todo $Y \subseteq X$, $\langle Y, \preceq \cap (Y \times Y) \rangle$ está bien ordenado. Se obtiene fácilmente:

Proposición 7. *$\langle X, \preceq \rangle$ está bien ordenado si y sólo si no existen sucesiones estrictamente $\preceq$-decrecientes infinitas.*

Cuidado: la prueba, aunque "obvia", necesita del axioma de elección.

Inducción y recursión en conjuntos bien ordenados

La principal utilidad de los conjuntos bien ordenados es que para ellos valen los principios de inducción y de definición por recursión:

Teorema 8. *Sea $\langle X, \preceq \rangle$ bien ordenado no vacío, con $0 := \min X$, y sea $P(\cdot)$ una propiedad que tenga sentido para elementos de X. Luego, $\big(\forall x \in X : P(x)\big)$ es equivalente a que se den:*

1. (caso base) $P(0)$, *y*
2. (caso inductivo) *Para todo $x \in X$, $\big(\forall y \in X : y \prec x \Rightarrow P(y)\big)$ implica $P(x)$.*

Demostración. Sea $Y := \{x \in X : P(x)\}$; probaremos que $Y = X$. Para ello, primero vemos que por el ítem 1 (caso base), $0 \in Y$. Supongamos por el absurdo que $Y \neq X$. Luego, el conjunto $X \setminus Y = \{x \in X : \text{no se da } P(x)\}$ no es vacío así que tiene elemento mínimo x_0 según $\preceq$. Por minimalidad de x_0, obtenemos $\forall y \prec x_0 : P(y)$. Pero esto implica por 2 (caso inductivo) que $P(x_0)$, una contradicción. Entonces $X \setminus Y = \varnothing$ y luego $Y = X$. $\square$

Comentario. Notar que en la prueba anterior, considerar el caso base aparte es superfluo.

Las construcciones recursivas sobre $\mathbb{N}$ son muy útiles; un ejemplo paradigmático es la sucesión de Fibonacci, definida por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \mathit{Fib}(0) &:= 0 \\ \mathit{Fib}(1) &:= 1 \\ \mathit{Fib}(n+2) &:= \mathit{Fib}(n+1) + \mathit{Fib}(n). \end{aligned}$$

[1] Es decir, $x \prec y$ si y sólo si $x \preceq y$ y $x \neq y$.

Se puede pensar que $Fib(n+2)$ está definida definida en términos de la *restricción* de la función Fib al conjunto $\{n, n+1\}$.

Podemos imaginarnos un esquema mucho más general, donde usamos no sólo los últimos dos valores definidos sino todos los restantes. En ese caso, si estoy definiendo $F(n)$ podría suponer dada su restricción $f := F|\{0, \dots, n-1\}$, y el paso recursivo sería una función G que tome el dato f y el dato n y devuelva $F(n)$.

$$F(n) := G(F|\{0, \dots, n-1\}, n).$$

En el caso de que F es nuestra Fibonacci Fib, tendríamos:

$$G(f, n) := \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ f(n-1) + f(n-2) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En general, fijemos un conjunto bien ordenado $\langle X, \preceq \rangle$ y un conjunto de imagen R. Llamemos $I_{\prec}(x)$ a la *sección* determinada por x, $\{y \in X : y \prec x\}$. Diremos que G es una *regla recursiva* si para cada $x \in X$ y cada función $f : I_{\prec}(x) \to R$ nos devuelve un elemento de R.[2]

Teorema 9 (definición por recursión)**.** *Sea $\langle X, \preceq \rangle$ bien ordenado. Entonces, para cada regla recursiva G existe una única función F que cumple*

$$F(x) = G(F|I_{\prec}(x), x)$$

para todo $x \in X$.

El hallazgo que hace extremadamente útiles y potentes a estos teoremas, es el siguiente:

Teorema 10 (de Buena Ordenación)**.** *Para todo conjunto X existe una relación $\preceq$ que lo bien-ordena.*

Es bien sabido que el Teorema de Buena Ordenación es equivalente al Axioma de Elección (Reflexión: ¿cómo definir un buen orden sobre $\mathbb{R}$?). Con este resultado, ya tenemos un panorama muy jugoso de posibilidades de trabajo: se pueden definir y demostrar propiedades de manera "constructiva", asumiendo un buen orden sobre el conjunto que estamos trabajando.

Sin embargo, se puede ir más allá y generalizar las operaciones aritméticas de $\mathbb{N}$ y por ende hablar de números *transfinitos*. Para ello necesitaremos abstraernos de buenos órdenes particulares y trabajar con sus tipos de isomorfismo. Lo hacemos en la siguiente sección.

Ordinales *a la* von Neumann

La forma más cómoda de referirse a un tipo de isomorfismo (de cualquier cosa) es ponerse de acuerdo de antemano y elegir representantes para cada familia de objetos isomorfos. La elección "canónica" de representantes de tipos de buenos órdenes se debe a von Neumann, y su particularidad es que sólo utiliza conjuntos y la relación de pertenencia. Diremos que un conjunto α es *transitivo* si $\forall x \in \alpha$ se tiene $x \subseteq \alpha$.

[2] En realidad, no es necesario fijar un conjunto R de antemano. El *Axioma de Reemplazo* de la Teoría de Conjuntos "dura" que dice específicamente esto. Aunque este axioma no participa de los resultados elementales del álgebra y del análisis, sí es relevante en la Teoría de Conjuntos Descriptiva.

Definición 11. Un *ordinal* será un conjunto transitivo que está bien ordenado por $\in$. Llamaremos Ord a la *clase* de todos los ordinales.

Por ejemplo, el buen orden $\langle\{1,2,4\},<\rangle$ es isomorfo a $\langle\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\},\in\rangle$.

En primer lugar, el conjunto vacío (con la "relación de orden" vacía) es un conjunto bien ordenado. Lo tomaremos como representante (en fin, ¡es el único elemento de su clase!). Confundiremos intencionadamente el conjunto vacío $\varnothing$ con el 0.

$$0 \in \mathrm{Ord}$$

Suponiendo dado un ordinal α, definiremos el *sucesor* de α, denotado $\alpha+1$, como

$$\alpha+1 := \alpha \cup \{\alpha\} \in \mathrm{Ord}.$$

Resulta que si α es un ordinal, entonces $\langle\alpha+1,\in\rangle$ es un buen orden. Con esto podemos conseguir representantes para cada buen orden sobre un conjunto finito (de hecho, sólo hay un tipo de isomorfismo para cada cardinalidad finita). Una vez que tenemos todos los ordinales finitos

$$0, 0+1, (0+1)+1, ((0+1)+1)+1, \dots$$

que por comodidad llamamos

$$0, 1, 2, 3, \dots$$

es natural observar que el conjunto formado por todos ellos *también* está bien ordenado por $\in$. A este ordinal, que corresponde al orden canónico de $\mathbb{N}$, lo llamaremos ω. En general, se puede probar que si A es un conjunto de ordinales, entonces su unión es un ordinal:

$$A \text{ conjunto y } A \subseteq \mathrm{Ord} \implies \bigcup A \in \mathrm{Ord}.$$

Se puede formalizar este proceso y demostrar que todo buen orden es isomorfo a un conjunto que surge de esta construcción. En particular, obtenemos los siguientes resultados:

1. Cada ordinal α es el conjunto de todos los ordinales menores.

2. Todo conjunto A de ordinales está incluido propiamente en un ordinal (basta tomar $(\bigcup A)+1$) y por ende está bien ordenado por $\in$.

3. Por lo anterior, se puede definir para todo conjunto A de ordinales $\sup A := \bigcup A$. Esta definición coincide con el supremo de A en cualquier ordinal que contenga a $\bigcup A$.

Diremos que α es un ordinal *sucesor* si existe β tal que $\alpha = \beta + 1$. En caso contrario, diremos que α es un ordinal *límite*.

El Teorema de Buena Ordenación implica que todo conjunto está en biyección con un ordinal. En particular, existe un ordinal $\mathfrak{c}$ biyectivo con $\mathbb{R}$. Sabemos que no hay inyección de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{N}$, así que podemos definir

$$\omega_1 := \text{menor ordinal perteneciente a } \mathfrak{c}+1 \text{ que no admite una inyección en } \mathbb{N}.$$

Esto tiene sentido, ya que $\langle\mathfrak{c}+1,\in\rangle$ es un buen orden. En particular se deduce que ω_1 es el conjunto de todos los ordinales contables.

Números Transfinitos

Las operaciones de suma, producto, exponenciación y otras nuevas se pueden extender a Ord, mediante definiciones recursivas apropiadas.

$$\begin{aligned} \xi + 0 &:= \xi & \xi \cdot 0 &:= 0 \\ \xi + (\alpha + 1) &:= (\xi + \alpha) + 1 & \xi \cdot (\alpha + 1) &:= (\xi \cdot \alpha) + \xi \\ \xi + \lambda &:= \sup\{\xi + \beta : \beta < \lambda\} & \xi \cdot \lambda &:= \sup\{\xi \cdot \beta : \beta < \lambda\}, \end{aligned}$$

donde λ es un ordinal límite. La suma y producto de ordinales son monótonas y asociativas pero no conmutativas:

$$\omega = 2 + \omega = 2 * \omega \quad \text{pero } \omega < \omega + 2 < \omega * 2.$$

Ejercicio 1. Encontrar una función inyectiva ι de $\omega \cdot 3$ en $\mathbb{R}$ que preserve orden. Convencerse de que hay un ordinal para el cual no existe una tal ι. ¿Cuál es el menor ordinal así?

Ejercicio 2. Expresar con las operaciones definidas y ω, ordinales isomorfos a los buenos órdenes contables (1) y (2).

Para concluir, dejamos un ejemplo de teorema que se extiende de lo finito a lo transfinito.

Teorema 12 (algoritmo de la división)**.** *Para todos $\alpha, \beta \in \mathrm{Ord}$, existen únicos $\zeta, \rho \in \mathrm{Ord}$ tales que*

$$\alpha = \beta \cdot \zeta + \rho, \quad \textit{con} \quad 0 \leq \rho < \beta.$$

Entonces se pueden definir ordinales pares, impares, con resto 4 en la división por ω, etcétera.

A continuación enunciamos una propiedad de sucesiones monótonas bien ordenadas en $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq \rangle$.

Proposición 13. *Si $\{N_\alpha\}_{\alpha<\rho}$ una sucesión (transfinita) estrictamente creciente de subconjuntos de $\mathbb{N}$, ρ debe ser contable.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que ρ es un ordinal límite. Por monotonía, obtenemos que $\bigcup_{\eta<\alpha} N_\eta \subseteq N_\alpha$. Como la sucesión es estricta, entonces si $\alpha < \beta$ se da que hay $n \in N_\beta \setminus N_\alpha$. Luego podemos definir:

$$n_\alpha := \min N_{\alpha+1} \setminus \textstyle\bigcup_{\eta<\alpha} N_\eta.$$

para todo $\alpha < \rho$. Luego la aplicación $\alpha \mapsto n_\alpha$ es inyectiva de ρ en $\mathbb{N}$, y entonces ρ debe ser contable. $\square$

Es un ejercicio interesante ver que si uno elimina la hipótesis de buen orden, el resultado no es cierto.

Ejercicio 3. (*) Demostrar que hay una función (necesariamente inyectiva) $r \mapsto A_r$ entre $\mathbb{R}$ y $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ tal que $r \leq s \iff A_r \subseteq A_s$.

Para mayor información sobre ordinales y Teoría de Conjuntos, se puede consultar [2, 4].

2.3. Conjuntos Borelianos

Definición 14. Sea $\langle X, \tau \rangle$ espacio topológico. Los conjuntos *de Borel* o *borelianos* de X son los elementos de la σ-álgebra $\mathbf{B}(X)$ generada por τ (en caso de confusión, escribimos $\mathbf{B}(X,\tau)$). Llamamos al espacio medible $\langle X, \mathbf{B}(X) \rangle$ el *espacio de Borel* de X.

Definición 15. Sean $\langle X, \mathcal{S} \rangle$ y $\langle Y, \mathcal{T} \rangle$ espacios medibles, $f : X \to Y$ una función. Diremos que f es *$\mathcal{S}$-$\mathcal{T}$-medible* si para todo $V \in \mathcal{T}$, $f^{-1}(V) \in \mathcal{S}$ y en ese caso escribiremos $f : \langle X, \mathcal{S} \rangle \to \langle Y, \mathcal{T} \rangle$. Si no hay riesgo de confusión de las σ-álgebras, simplemente escribiremos que f es *medible*.

Definición 16 (restricción)**.** Sea $\langle X, \mathcal{S} \rangle$ un espacio medible, y sea $V \subseteq X$. La *restricción de $\mathcal{S}$ a V* es $\mathcal{S}|V := \{U \cap V : U \in \mathcal{S}\}$. Diremos que $\langle V, \mathcal{S}|V \rangle$ es un *subespacio medible* de $\langle X, \mathcal{S} \rangle$.

Teorema C-S-B Boreliano

El Teorema de Cantor, Schröder y Bernstein para conjuntos establece, sintéticamente, la antisimetría de la relación de orden entre cardinales. La versión boreliana es la que sigue.

Teorema 17. *Sean $\langle X, \mathcal{S} \rangle$ y $\langle Y, \mathcal{T} \rangle$ espacios medibles, $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ incrustaciones medibles tales que $f(X) \in \mathcal{T}$ y $g(Y) \in \mathcal{S}$. Entonces $\langle X, \mathcal{S} \rangle$ es isomorfo a $\langle Y, \mathcal{T} \rangle$.*

Demostración. Definamos

$$X_0 := X,\ X_{n+1} := g(f(X_n)) \qquad Y_0 := Y,\ Y_{n+1} := f(g(Y_n)).$$

Estos conjuntos son todos borelianos, porque f y g son incrustaciones y $f(X) \in \mathcal{T}$ y $g(Y) \in \mathcal{S}$. Por ejemplo, sea $U \in \mathcal{S}$. Como $f^{-1} : \langle f(X), \mathcal{T}|f(X) \rangle \to \langle X, \mathcal{S} \rangle$ es medible, $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U) \in \mathcal{T}|f(X) \subseteq \mathcal{T}$.

Probemos primero por inducción que para todo $n \geq 0$,

$$X_n \supseteq g(Y_n) \supseteq X_{n+1}, \quad Y_n \supseteq f(X_n) \supseteq Y_{n+1}. \tag{3}$$

Para $n = 0$, $X_0 = X \supseteq g(Y) \supseteq g(F(Y)) = X_1$. Supongamos por hipótesis inductiva que $X_n \supseteq g(Y_n) \supseteq X_{n+1}$. Aplico $g \circ f$ y obtengo

$$X_{n+1} \supseteq g(f(g(Y_n))) \supseteq X_{n+2}.$$

Pero $g(f(g(Y_n))) = g(Y_{n+1})$, y tenemos el resultado.

Como f es 1-1, $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$. Luego

$$f(X_n \setminus g(Y_n)) = f(X_n) \setminus f(g(Y_n)) = f(X_n) \setminus Y_{n+1}.$$

Como g es una incrustación, la inversa $g^{-1} : g(Y) \to Y$ es medible. Análogamente al caso anterior, $g(Y_n \setminus f(X_n)) = g(Y_n) \setminus X_{n+1}$ y luego

$$g^{-1}(g(Y_n) \setminus X_{n+1}) = Y_n \setminus f(X_n).$$

Por ultimo, si estipulamos que $X_\infty := \bigcap_n X_n$ y $Y_\infty := \bigcap_n Y_n$, obtenemos por (3) que $f(X_\infty) = Y_\infty$. Entonces la función definida como

$$h(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \bigcup_n \big(X_n \setminus g(Y_n)\big) \cup X_\infty \\ g^{-1}(x) & \text{si } x \in \bigcup_n \big(g(Y_n) \setminus X_{n+1}\big), \end{cases}$$

es un isomorfismo de X a Y. $\square$

Conjuntos Universales

Teorema 18. *Sea X separable metrizable. Para todo $\xi \geq 1$ existe un conjunto $\mathcal{C}$-universal para $\mathbf{\Sigma}^0_\xi(X)$ y similarmente para $\mathbf{\Pi}^0_\xi(X)$.*

Demostración. Por inducción en ξ. Sea $\{V_n\}_n$ base de abiertos de X. Definimos

$$(y,x) \in \mathcal{U} \iff y \in \mathcal{C} \text{ y } x \in X \text{ y } x \in \bigcup\{V_n : y(n) = 0\}.$$

Es fácil ver que $\{\mathcal{U}_y : y \in \mathcal{C}\} = \mathbf{\Sigma}^0_1(X)$. Y $\mathcal{U} \in \mathbf{\Sigma}^0_1(\mathcal{C} \times X)$ puesto que

$$(y,x) \in \mathcal{U} \iff (y,x) \in \mathcal{C} \times X \text{ y } x \in \bigcup\{V_n : y(n) = 0\} \iff$$
$$\iff (y,x) \in \mathcal{C} \times X \text{ y } \exists n : y(n) = 0 \& x \in V_n \iff (y,x) \in \bigcup_n \{z \in \mathcal{C} : z(n) = 0\} \times V_n.$$

Si $\mathcal{U}$ es $\mathcal{C}$-universal para $\mathbf{\Sigma}^0_\xi(X)$, $\mathcal{U}^{\mathsf{c}}$ lo es para $\mathbf{\Pi}^0_\xi(X)$ puesto que $(\mathcal{U}_y)^{\mathsf{c}} = (\mathcal{U}^{\mathsf{c}})_y$.

Supongamos que $\mathcal{U}_\eta$ son $\mathcal{C}$-universales para $\mathbf{\Pi}^0_\eta(X)$ con $\eta < \xi$. Sean ξ_n una sucesión creciente de ordinales tales que $\sup_n\{\xi_n + 1\} = \xi$ (puede ser que tenga un sólo término si ξ es sucesor). Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ una biyección. Dado $y \in \mathcal{C}$ y $n \in \mathbb{N}$, sea $y^n \in \mathcal{C}$ definido como $y^n(m) = y(\langle n, m \rangle)$. Luego, para cada n, la función $f_n(y) := y^n$ es continua de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}$ y para toda sucesión $\{x^n\}_n \subseteq \mathcal{C}^{\mathbb{N}}$, existe $y \in \mathcal{C}$ tal que $y^n = x^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea

$$(y,x) \in \mathcal{U} \iff \exists n : (y^n, x) \in \mathcal{U}_{\xi_n}.$$

Es decir, $\mathcal{U} = \bigcup_n (f_n \times \mathrm{id}_X)^{-1}(\mathcal{U}_{\xi_n})$. Entonces $\mathcal{U}$ es $\mathcal{C}$-universal para $\mathbf{\Sigma}^0_\xi(X)$. $\square$

2.4. Conjuntos Analíticos

Teorema 19 (Suslin)**.** *Sea X polaco no numerable. Entonces $\mathbf{B}(X) \subsetneq \mathbf{\Sigma}^1_1(X)$*

Demostración. Por el Teorema 18, sea $\mathcal{U}$ un conjunto $\mathcal{C}$-universal para $\mathbf{\Pi}^0_1(\mathcal{C} \times \mathcal{N})$. Sea

$$A := \{(x,y) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C} : \exists z((x,y,z) \in \mathcal{U})\} = \pi_{1,2}(\mathcal{U}) \in \mathbf{\Sigma}^1_1(\mathcal{C} \times \mathcal{C}).$$

Afirmamos que A es $\mathcal{C}$-universal para $\mathbf{\Sigma}^1_1(\mathcal{C})$. Como los conjuntos analíticos son cerrados por preimágenes continuas, todas las secciones A_y están en $\mathbf{\Sigma}^1_1(\mathcal{C})$. Recíprocamente, si $B \subseteq \mathcal{C}$ es $\mathbf{\Sigma}^1_1$, hay un conjunto cerrado $F \subseteq \mathcal{N}$ y una suryección continua $f : F \to B$ (f podría ser vacía). Sea $G = \text{gráfico}(f)^{-1}$, de manera que G es cerrado en $\mathcal{C} \times \mathcal{N}$ y $x \in B$ sii $\exists z : (x,z) \in G$. Sea $y \in \mathcal{C}$ tal que $G = \mathcal{U}_y$. Entonces $B = A_y$.

Si A fuera Borel en $\mathcal{C}$, A^{c} lo sería también. Considerando que el mapa diagonal $d : X \to X \times X$, $d(x) := (x,x)$ es continuo, también $C = \{x : (x,x) \notin A\}$ sería Borel y *a fortiori* analítico. Entonces, para algún y_0, $C = A_{y_0}$ (i.e., $(x,x) \notin A \iff (y_0, x) \in A$)). Tomando $x = y_0$ obtenemos una contradicción, luego $A \notin \mathbf{B}(\mathcal{C})$.

Todo espacio polaco no numerable X contiene un cerrado homeomorfo a $\mathcal{C}$; supongamos que $\mathcal{C} \subseteq X$. Como $B(\mathcal{C}) = B(X)|\mathcal{C}$ y análogamente con $\mathbf{\Sigma}^1_1$, tenemos el resultado. $\square$

2.5. Relaciones de Equivalencia

Definición 20. Sea E una relación de equivalencia sobre X y $A \subseteq X$. Luego la *E-clausura* de A es

$$E(A) := \{x \in X : \exists a \in A\,(a\; E\; x)\}.$$

Diremos que A es *E-cerrado* (o *E-saturado*) si $E(A) \subseteq A$.

Sean X un conjunto, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ y E una relación de equivalencia sobre X. Usaremos la siguiente notación:

$$\mathcal{S}(E) := \{Q \in \mathcal{S} : Q \text{ es } E\text{-cerrado}\}.$$

Definiremos también una relación de equivalencia $\mathcal{R}(\mathcal{S})$ dada por

$$(s,t) \in \mathcal{R}(\mathcal{S}) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall Q \in \mathcal{S} : s \in Q \Leftrightarrow t \in Q.$$

Ejemplo 1. Sea $\langle X, \mathcal{S}\rangle := \langle \mathbb{R}, \mathbf{B}(\mathbb{R})\rangle$ y tomemos la sub-σ-álgebra $\mathcal{T} := \sigma(\{x\}_{x\in\mathbb{R}})$. Luego

$$\mathcal{T} = \{Q \subseteq \mathbb{R} : |Q| = \aleph_0 \text{ ó } |\mathbb{R} \setminus Q| = \aleph_0\}.$$

Está claro que $\mathcal{R}(\mathcal{T})$ es la igualdad en $\mathbb{R}$. Luego $\mathcal{S}(\mathcal{R}(\mathcal{T})) = \mathcal{S}$.

En general, si $\langle X, \mathcal{S}\rangle$ es medible, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$ y E es una relación de equivalencia, tenemos que

$$\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}(\mathcal{R}(\mathcal{T})), \quad E \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{S}(E)), \quad \mathcal{R}(\mathcal{T}) = \mathcal{R}(\sigma(\mathcal{T})).$$

Pregunta: ¿bajo qué condiciones $\mathcal{T} = \mathcal{S}(\mathcal{R}(\mathcal{T}))$?

Teorema 21 (Blackwell)**.** *Sea $\langle X, \mathcal{S}\rangle$ Borel estándar y sean $A_n \in \mathcal{S}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego $\mathcal{S}(\mathcal{R}(\{A_n : n \in \mathbb{N}\})) = \sigma(\{A_n : n \in \mathbb{N}\})$.*

Demostración. Basta ver la inclusión "$\subseteq$". Llamemos $E := \mathcal{R}(\{A_n : n \in \mathbb{N}\})$. Definamos $f : X \to \mathcal{C}$ así:

$$f(x)(n) = 1 \quad \text{si y sólo si} \quad x \in A_n.$$

Es $\sigma(\{A_n\}_n)$-$\mathbf{B}(\mathcal{C})$-medible, luego es Borel.

Sea $A \in \mathcal{S}$ E-cerrado. Luego $f(A)$ y $f(A^{\mathsf{c}})$ son analíticos y disjuntos. Por el Teorema de Lusin existe un conjunto boreliano tal que $f(A) \subseteq B$ y $B \cap f(A^{\mathsf{c}}) = \varnothing$. Entonces $f^{-1}(B) \supseteq f^{-1}(f(A)) = A$. Como $B \cap f(A^{\mathsf{c}}) = \varnothing$, $f^{-1}(B) = A$ y luego $A \in \sigma(\{A_n\}_n)$. $\square$

Corolario 22. *Si $\langle X, \mathcal{S}\rangle$ es Borel estándar y $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$ es una sub-σ-álgebra contablemente generada, entonces $\mathcal{T} = \mathcal{S}(\mathcal{R}(\mathcal{T}))$.*

2.6. Categoría de Baire

Una *base débil* de $\langle Y, \tau\rangle$ es una familia $\mathcal{B}$ de abiertos no vacíos tal que cada abierto no vacío en τ incluye algún elemento de $\mathcal{B}$.

Lema 23. *Toda base débil $\mathcal{B}$ de un espacio topológico Y contiene una subfamilia* disjunta *densa en Y.*

Demostración. Una familia de conjuntos es *disjunta* si la intersección de dos miembros distintos es vacía, y es densa si su unión lo es.

Las subfamilias disjuntas de $\mathcal{B}$ están ordenadas parcialmente por $\subseteq$. Una cadena $\{\mathcal{F}_i : i \in I\}$ de subfamilias disjuntas admite como cota su unión: supongamos que $A, B \in \bigcup_i \mathcal{F}_i$ son distintos. Luego, hay i tal que $A, B \in \mathcal{F}_i$ y entonces $A \cap B = \varnothing$. Por el Lema de Zorn, existe subfamilia maximal $\mathcal{F}$. Si $\mathcal{F}$ no fuera densa en Y habría un $U \in \mathcal{B}$ tal que $U \cap \bigcup \mathcal{F} = \varnothing$. Luego $\mathcal{F} \cup \{U\}$ sería disjunta y más grande que $\mathcal{F}$, absurdo. $\square$

Ejercicio 4. Supongamos que $B_n^{(i)}$ son conjuntos tales que si $i \neq j$, $B_n^{(i)}$ es disjunto de $B_n^{(j)}$. Probar que $\bigcup_i \bigcap_n B_n^{(i)} = \bigcap_n \bigcup_i B_n^{(i)}$.

Recordemos que $U \Vdash A$ significa que A es comagro en U: es decir, $U \setminus A$ es magro, o bien que hay abiertos G_n con $\overline{G_n} \supseteq U$ y $U \cap \bigcap_n G_n \subseteq A$.

Teorema 24. *Sea X espacio topológico y $A \subseteq X$. Sea*

$$U(A) := \bigcup\{U \text{ abierto } : U \Vdash A\}.$$

Entonces $U(A) \setminus A$ es magro, y si A tiene la BP, $A \setminus U(A)$ también y entonces $A =^* U(A)$.

Demostración. Los abiertos que cumplen $U \Vdash A$ son una base relativa a $U(A)$. Por el Lema 23, hay una subfamilia disjunta densa $\{U_i : i \in I\}$ de ellos. Sea $W := \bigcup_{i \in I} U_i$, luego $U(A) \subseteq \overline{W}$ y entonces $U(A) \setminus W \subseteq \overline{W} \setminus W$ es magro.

Ahora A es comagro en cada U_i; luego hay abiertos $G_n^{(i)}$ tales que

$$\overline{G_n^{(i)}} \supseteq U_i \quad \text{y} \quad \bigcap_n U_i \cap G_n^{(i)} = U_i \cap \bigcap_n G_n^{(i)} \subseteq A,$$

y luego $\bigcup_i \bigcap_n U_i \cap G_n^{(i)} \subseteq A$. Notemos que los $B_n^{(i)} := U_i \cap G_n^{(i)}$ cumplen con las hipótesis del Ejercicio 4, así que concluimos $\bigcap_n \bigcup_i U_i \cap G_n^{(i)} \subseteq A$. Basta ver, entonces, que los abiertos $\bigcup_i U_i \cap G_n^{(i)}$ son densos en W. La última observación necesaria es que como U_i son abiertos y $G_n^{(i)}$ son densos en U_i, tenemos $U_i \subseteq \overline{U_i} \cap \overline{G_n^{(i)}}$. Calculamos entonces:

$$\overline{\bigcup_i U_i \cap G_n^{(i)}} \supseteq \bigcup_i \overline{U_i \cap G_n^{(i)}} \supseteq \bigcup_i \overline{U_i} \cap \overline{G_n^{(i)}} \supseteq \bigcup_i U_i = W.$$

Concluimos que A es comagro en W, y en consecuencia $U(A) \setminus A \subseteq U(A) \setminus W \cup W \setminus A$ es magro.

Para la última observación, basta ver que si $A =^* U$ con U abierto, $U \subseteq U(A)$. $\square$

2.7. Juegos

Complejidad del juego $G^*(A)$

Consideremos el juego "estrella" $G^*(A)$ definido en [5, Sect. 21.A]. Sea $\mathcal{B} = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base numerable del espacio X en consideración.

Si definimos $S := (\mathcal{B} \times \mathcal{B}) \cup \{0, 1\}$, se puede considerar el árbol de movidas legales $L \subseteq S^{<\mathbb{N}}$. Sea $F : [L] \to X$ dada por

$$((U_0^{(0)}, U_1^{(0)}), i_0, (U_0^{(1)}, U_1^{(1)}), i_1, \dots) \overset{F}{\mapsto} x,$$

donde $\{x\} = \bigcap_n U^{(n)}_{i_n}$. Inmediatamente obtenemos que $G^*(A)$ es equivalente al juego $G(L, F^{-1}(A))$.

Probaremos ahora que F es continua. Para ello, tomemos U abierto en X y veamos que $F^{-1}(U)$ es abierto.

Afirmación. *Para toda* $((U_0^{(0)}, U_1^{(0)}), i_0, (U_0^{(1)}, U_1^{(1)}), i_1, \dots)$ *legal,* $\bigcap_n U^{(n)}_{i_n} \subseteq U$ *si y sólo si* $\exists n : U^{(n)}_{i_n} \subseteq U$.

Demostración. ($\Leftarrow$) Obvio. ($\Rightarrow$) Por el absurdo, supongamos que $\forall n : U^{(n)}_{i_n} \cap U^{\mathsf{c}} \neq \varnothing$. Sea $x_n \in U^{(n)}_{i_n} \cap U^{\mathsf{c}}$. Luego ($x_n$ es de Cauchy) y $x_n \to x$. Como U^{c} es cerrado, $x \in U^{\mathsf{c}}$. En consecuencia, $\bigcap_n U^{(n)}_{i_n} = \bigcap_n \overline{U^{(n)}_{i_n}} = \{x\} \nsubseteq U$, absurdo. □

Luego $p \in F^{-1}(U) \iff p \in [L]$ y

$$\exists V \in \mathcal{B}, V \subseteq U, \exists W \in \mathcal{B}, \exists n : \\ \big(p(2n) = (V, W) \;\&\; p(2n+1) = 0\big) \text{ ó } \big(p(2n) = (W, V) \;\&\; p(2n+1) = 1\big),$$

que es un abierto relativo a $[L]$.

En conclusión, el juego $G^*(A)$ es equivalente a un juego de la forma $G(L, Y)$, donde $Y = F^{-1}(A)$ no es más complejo que A. En particular, si A es Borel, entonces Y es Borel.

El juego de Banach-Mazur $G^{**}(A)$

Sea $X \neq \varnothing$ polaco, d métrica compatible, $\mathcal{W}$ una base débil numerable y por último, $A \subseteq X$. Una partida del juego $G^{**}(A)$ consiste en la elección alternativa de abiertos anidados de $\mathcal{W}$

$$\begin{array}{llllll} \mathrm{I}: & U_0 & & U_1 & & \dots \\ \mathrm{II}: & & V_0 & & V_1 & & \dots \end{array}$$

con $\operatorname{diám}(U_n), \operatorname{diám}(V_n) < 2^{-n}$. Sea $x \in X$ tal que $\{x\} = \bigcap_n \overline{U_n} = \bigcap_n \overline{V_n}$. II gana si $x \in A$.

Teorema 25. *1. I tiene estrategia ganadora* $\iff$ *A es magro en algún abierto no vacío.*

2. II tiene estrategia ganadora $\iff$ *A es comagro.*

Demostración. 1. ($\Rightarrow$) Sea σ la estrategia ganadora de I, y sea U_0 el primer movimiento para I según σ. Veremos que $U_0 \Vdash A^{\mathsf{c}}$. Construiremos $S \subseteq \sigma$ podado tal que para $p = (U_0, V_0, \dots, U_n) \in S$, la familia $\mathcal{U}_p = \{U_{n+1} : (\dots, V_n, U_{n+1}) \in S\}$ es densa disjunta en U_n.

Suponiendo que tenemos un S con las propiedades de arriba, sea $W_n := \bigcup\{U_n : (U_0, V_0, \dots, U_n) \in S\}$. Se puede probar por inducción que W_n es abierto denso en U_0 para todo n (**ejercicio**).

Afirmación. $\bigcap_n W_n \subseteq A^{\mathsf{c}}$.

Sino, $\exists x \in \bigcap_n W_n \cap A$. Como $\mathcal{U}_p$ son disjuntas, tenemos que hay rama infinita $(U_0, V_0, U_1, \dots) \in [S] \subseteq [\sigma]$ tal que $\{x\} = \bigcap_n U_n$ y $x \in A$, que contradice que σ sea estrategia ganadora para I.

Para construir S determinaremos inductivamente cuáles sucesiones de σ con longitud n ponemos en S. Primero, $\varnothing \in S$. Si $(U_0, V_0, \dots, U_{n-1}, V_{n-1})$ ya está en S entonces

$(U_0, V_0, \dots, U_{n-1}, V_{n-1}, U_n) \in S$ para el único U_n tal que $(U_0, V_0, \dots, U_{n-1}, V_{n-1}, U_n) \in \sigma$. Si ahora $p = (U_0, V_0, \dots, U_n) \in S$, notemos que para cualquier abierto no vacío suficientemente chico $V_n \subseteq U_n$, si V_n^* (digamos, un U_{n+1}) es lo que I debe jugar según σ, tenemos obviamente que V_n^* es un subconjunto abierto no vacío de V_n. Luego $\{V_n^* : V_n \subseteq U_n\}$ es una base débil de U_n. Tomo una subfamilia disjunta densa $\mathcal{U}_p$ usando el Lema 23. Luego las sucesiones de longitud $2n+2$ son las de la forma $\{(U_0, V_0, \dots, U_n, V_n) \in \sigma : V_n^* \in \mathcal{U}_p\}$.

($\Leftarrow$) Si A es magro en U, $\exists G_n$ abiertos tales que $U \subseteq \overline{G_n}$ (son densos en U) para todo n y $\bigcap_n G_n \cap U \subseteq A^{\mathsf{c}}$. I juega $U_0 \subseteq U$ legal. II juega $V_0 \subseteq U_0$. I responde con un U_1 legal tal que $\overline{U_1} \subseteq V_0 \cap G_0 \neq \varnothing$, etcétera. Tenemos

$$\{x\} = \bigcap_n U_n \subseteq \bigcap_n G_n \cap U \subseteq A^{\mathsf{c}}.$$

Por lo tanto, es estrategia ganadora para I.

2. ($\Rightarrow$) Igual al "($\Rightarrow$)" del ítem anterior, intercambiando roles de A y A^{c}, y los de los V con los U. Como paso auxiliar, hay que ver que los W_n son densos en X.

($\Leftarrow$) Si A es comagro, $\bigcap_n W_n \subseteq A$ con W_n abiertos densos. II juega $V_n \subseteq U_n \cap W_n$ legal y es similar a "($\Leftarrow$)" del ítem anterior. □

Lema 26. *Sea X polaco y $A \subseteq X$. A tiene la BP si y sólo si $\forall U$ abierto, $G^{**}(A^{\mathsf{c}} \cup U)$ está determinado.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Fácil.

($\Leftarrow$) Basta ver $A \setminus U(A) = (U(A) \cup A^{\mathsf{c}})^{\mathsf{c}}$ es magro. $G^{**}(A^{\mathsf{c}} \cup U(A))$ está determinado. Si $A^{\mathsf{c}} \cup U(A)$ es comagro ya está; sino, I tiene estrategia ganador y hay V abierto tal que $V \Vdash A \setminus U(A)$. Luego $V \Vdash A$ y entonces $V \subseteq U(A)$. Pero $V \Vdash A \setminus U(A)$, y como $A \setminus U(A) \subseteq X \setminus V$, la monotonía de $\Vdash$ implica $V \Vdash X \setminus V$. Pero esto es absurdo pues X es Baire. □

3. Aplicaciones

3.1. Lógicas

En esta sección haremos un breve repaso de los distintos sabores de *lógica* que tienen interacción con la teoría de conjuntos descriptiva (TCD). Es un poco sorprendente que en la enumeración que sigue aparezcan casi todas las versiones más o menos conocidas: esto sólo es una muestra de la cantidad de conexiones que tiene la TCD con el resto de la matemática. Las aplicaciones van usualmente en ambas direcciones, desde y hacia la TCD.

Uno de los avances fundamentales propuestos por la Lógica se puede sintetizar con la introducción de un sólo símbolo: "$\models$". Más seriamente, la contribución fue delimitar precisamente la diferencia entre las estructuras matemáticas y el lenguaje que usamos para expresar sus propiedades. En particular, diferentes lenguajes tienen diversas propiedades de "preservación", en el sentido que propiedades expresades en un lenguaje especial serán suceptibles de preservarse por algunas construcciones algebraicas.

En términos generales, escribiremos $\mathbf{A} \models \varphi$ para indicar que la estructura $\mathbf{A}$ *satisface* o cumple con la propiedad φ. A continuación daremos una enumeración informal de los tipos de estructuras y de fórmulas que utilizaremos.

La mayoría de las estructuras que vamos a considerar en esta sección se denominan *estructuras de primer orden*, y utilizaremos el sinónimo *modelos* para ellas. Estas son simplemente un conjunto A equipado con algunas operaciones y relaciones (finitarias) y constantes distinguidas definidas en él. Un ejemplo paradigmático sería el de un cuerpo ordenado, como el de los racionales $\mathbf{Q} = \langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1, < \rangle$, donde $+, \cdot$ son dos operaciones binarias, $0, 1$ son constantes y $<$ una relación binaria. En algunas aplicaciones, estaremos interesados en modelos *relacionales*, i.e., que sólo tengan relaciones, por ejemplo $\mathbf{N} = \langle \mathbb{N}, > \rangle$. Si un elemento a de un modelo está relacionado vía la relación R con otro elemento b, diremos que b es un *sucesor por* R de a, o que es *accesible* desde a vía R, o bien que hay una *transición* R de a a b. En el caso de $\mathbf{N}$, desde 1 hay una transición $>$ al 0.

Los modelos vienen con una noción natural de isomorfismo, que copia las ya conocidas para grupos, anillos, cuerpos (ordenados), etcétera. Una función $f : A \to C$ es un *isomorfismo* $f : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ si es una biyección y preserva las operaciones, constantes y relaciones del lenguaje.

El resto de las estructuras que veremos generaliza a los modelos de primer orden en dos direcciones distintas. Una es la variante *probabilista*, en la cual sólo hay las relaciones y éstas están determinadas con (sub)probabilidades. Por ejemplo, una estructura de este tipo tendrá la pinta $\langle S, R_a, R_b \rangle$ donde R_a toma un elemento $s \in S$ y un subconjunto $Q \subseteq S$ y devuelve la probabilidad de que el sucesor de s esté en el conjunto Q. En el

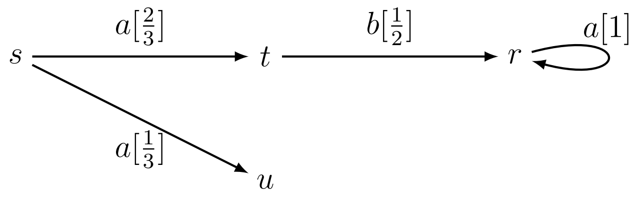


Figura 1: Estructura probabilista $\langle S, R_a, R_b \rangle$.

ejemplo de la Figura 1, la probabilidad de que el sucesor de s por la relación R_a sea t es $R_a(s, \{t\}) = \frac{2}{3}$. Por otro lado hay una probabilidad de $\frac{1}{3}$ que el sucesor sea u. Estipulamos que las probabilidades no graficadas son 0. Por ejemplo, no hay sucesores de u por ninguna de las dos relaciones; y hay $\frac{1}{2}$ de probabilidad de que t no acepte ninguna transición (de ahí el término *subprobabilidad*).

La otra variante es la *métrica* (que sería además un caso particular de lo que se llama *difuso*), donde el valor de verdad de las propiedades no es necesariamente "verdadero" o "falso" sino que algo puede ser verdadero a medias. Requeriremos que la estructura sea "uniformemente continua": en vez de un conjunto, construiremos la estructura encima de un espacio métrico completo $\langle X, d \rangle$ con $d < 1$. Para fijar ideas, sea $X := [0, 1]$ y $R(x, y) := x \cdot y$. Luego la tupla $\mathbf{X} := \left\langle X, d, R, \frac{1}{2} \right\rangle$ es un modelo continuo, donde tengo una constante distinguida $\frac{1}{2}$ y la función uniformemente continua $R : X \times X \to [0, 1]$ me dice cuán cierto es que un par (x, y) esté relacionado vía R, considerando el valor "0" como "verdarero" y "1" como falso. Por ejemplo, 0 está relacionado (con certeza) con todo punto; y 1 y $\frac{1}{2}$ están relacionados en un $50\,\% = R\big(1, \frac{1}{2}\big)$ relacionados. También podemos incluir operaciones $f : X^n \to X$ que también deberán ser uniformemente continuas. Conviene aclarar que este enfoque no es igual al probabilista; en este último las afirmaciones son categóricamente verdaderas o falsas, pero sólo las conocemos probabilísticamente.

En cuanto a las "propiedades" φ, las llamaremos *fórmulas*. No nos detendremos en una definición completa de ellas, pero haremos una aproximación por ejemplos, describiendo brevemente las particularidades de cada tipo. Como componentes básicos de nuestro lenguaje, utilizaremos variables $x, y, x, \ldots$ para representar **elementos** de A y símbolos representando las operaciones y relaciones que aparecen en la descripción que dimos de la estructura $\mathbf{A}$ ($+$, $\cdot$, etc.) junto con la igualdad "$=$". Luego estas expresiones se pueden combinar usando los conectivos lógicos tradicionales $\wedge$, $\vee$, $\neg$ (negación), $\to$ (implica), $\top$, $\bot$ (verdadero y falso, resp.),... y los *cuantificadores* $\forall$ y $\exists$.

Pasamos a los ejemplos de uso de $\models$ en cada tipo de fórmula:

1. $\mathbf{Q} \models \forall x \exists y(\neg(x = 0) \to x * y = 1)$: es una fórmula de *primer orden* ($L_{\omega,\omega}$). Se caracteriza por el hecho de que los cuantificadores sólo trabajan con (las variables que nombran) elementos.

2. $\mathbf{Q} \models \forall x \bigvee\Big\{x < \overbrace{1 + \cdots + 1}^{n} : n \in \omega\Big\}$: fórmula *infinitaria* ($L_{\omega_1,\omega}$). En este caso, permitimos tomar la disyunción de un conjunto numerable de fórmulas.

3. $\mathbf{Q} \not\models \forall X : (\exists y \in X : \forall x \in X\, \neg(x < y))$: es una fórmula de *segundo orden*. Aquí puedo usar los cuantificadores con variables que se mueven entre los subconjuntos de nuestra estructura (en este caso, $\forall X$ se intrepreta como $\forall X \subseteq \mathbb{Q}$).

4. $\mathbf{N}, 1 \models \langle > \rangle \top \wedge [>](\neg \langle > \rangle \top)$: es una *fórmula modal básica* ($L^{\Diamond}_{\omega,\omega}$). Una característica sobresaliente de esta lógica es que habla de propiedades de elementos (el 1 en este caso) y no sólo de propiedades globales de la estructura como los ejemplos anteriores ("$\mathbf{Q}$ es arquimediano","$<$ no es bien fundado en $\mathbf{Q}$"). Aquí, las *modalidades* $\langle > \rangle$ y $[>]$ se leen "hay un sucesor tal que" y "todo sucesor cumple con", respectivamente (respecto de $>$ en este caso). Las fórmulas modales no utilizan variables de elementos.

   Las fórmulas modales se pueden pensar como un tipo muy restringido de fórmula de primer orden. Como las modalidades se pueden traducir como "existe $y < x$ tal que..." y "para todo $y < x$ se da...", respectivamente, la fórmula del ejemplo es equivalente a la siguiente fórmula de primer orden

   $$\exists y(x > y \wedge \top) \wedge \forall y : \big(x > y \to \neg \exists z\,(z < y \wedge \top)\big),$$

   donde se reemplaza la x (que es una variable *libre*) por el elemento sobre el cual estamos evaluando la propiedad.

5. $\mathbf{Q}, 0 \models \bigwedge\Big\{\overbrace{\langle < \rangle \ldots \langle < \rangle}^{n} \top : n \in \omega\Big\}$: es un ejemplo de fórmula modal infinitaria ($L^{\Diamond}_{\infty,\omega}$; la llamaremos también de Hennessy-Milner, *HML*), que dice que desde 0 hay sucesiones estrictamente crecientes arbitrariamente largas.

6. $\mathbf{S}, s \models \langle a \rangle_{\frac{1}{2}} \langle b \rangle_{\frac{1}{3}} \top \wedge \neg \langle a \rangle_{\frac{2}{3}} \langle b \rangle_0 \top$: es una fórmula modal probabilista, de Larsen-Skou (LS). La fórmula $\langle a \rangle_{\frac{1}{2}} \varphi = \langle R_a \rangle_{>\frac{1}{2}} \varphi$ se puede pronunciar "la probabilidad de que un sucesor (por R_a) cumpla con φ es mayor a $\frac{1}{2}$".

7. $\Big[\mathbf{X} \models \operatorname{ínf}_x\big(\operatorname{máx}\big\{d\big(x, \tfrac{1}{2}\big), R(x,x)\big\}\big)\Big] = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$: una fórmula de la *lógica métrica*. Generaliza $L_{\omega_1,\omega}$ en varios aspectos. En primer lugar, la relación "$\models$" ya no es verdadera o falsa, sino da un resultado entre 0 y 1. Además, los conectivos son funciones continuas $[0,1]^n \to [0,1]$; en particular, en lugar de la conjunción $\wedge$ se utiliza la función $\operatorname{máx} : [0,1]^2 \to [0,1]$ (por nuestra convención sobre 0 y 1, máx

restringido al conjunto $\{0, 1\}$ coincide con la conjunción ordinaria). Por otro lado, tenemos una noción de igualdad aproximada, dada por la métrica d (¿cuándo dos cosas son iguales con certeza?). Y por último, la generalización de los cuantificadores $\forall$ y $\exists$ son los operadores de supremo e ínfimo.

Fijemos un conjunto L (*lenguaje*) de nombres de operaciones y relaciones, con sus respectivas "aridades"; por ejemplo, $L = \{+^{(2)}, \cdot^{(2)}, 0^{(0)}, 1^{(0)}, <^{(2)}\}$. El conjunto de estructuras de primer orden con operaciones en el lenguaje L y conjunto de base $\mathbb{N}$ forman naturalmente un espacio polaco X_L. Para nuestro L de ejemplo, una estructura $\mathbf{A} = \langle \mathbb{N}, \oplus, \odot, c, d, \preceq \rangle$ será un punto en el espacio de dimensión 0

$$X_L = \mathbb{N}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}},$$

en el cual las primeras dos coordenadas codifican las operaciones binarias, los dos siguientes las constantes y la última el subconjunto de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ correspondiente la relación binaria.

Para un ejemplo prácticamente minimal, se puede tomar el lenguaje $\{\leq^{(2)}\}$ con sólo una relación binaria; en este caso, $\mathrm{Bin} := X_{\{\leq^{(2)}\}} = 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ es homeomorfo a $\mathcal{C}$.

Ejercicio 5. El subconjunto $LO \subseteq \mathrm{Bin}$ de los órdenes totales sobre $\mathbb{N}$ es cerrado.

Es intuitivamente claro que las fórmulas $L_{\omega_1,\omega}$ están íntimamente relacionadas con los conjuntos de Borel; se pueden probar afirmaciones precisas al respecto (por ejemplo, ver [5, Th. 16.8]). En particular, cada clase de estructuras en X_L axiomatizadas por fórmulas $L_{\omega_1,\omega}$ es Borel. En contraposición, la lógica métrica no es medible así como está, pero se puede arreglar tomando los "cuantificadores de categoría" y luego el conjunto de estructuras métricas que satisfacen un conjunto de fórmulas es Borel (en un espacio apropiado, que no es X_L).

Un ejemplo central para la TCD es el siguiente:

Teorema 27. *El subconjunto de los órdenes totales que no son buenos órdenes NWO es* $\mathbf{\Sigma}^1_1(\mathrm{Bin})$*-completo.*

En las siguientes secciones nos enfocaremos más específicamente en algunas de estas estructuras y sus relaciones con la TCD.

3.2. Marcos de Kripke o Sistemas de Transiciones Etiquetados

Dado un conjunto (de "acciones") L, un *marco de Kripke* (o *sistema de transiciones etiquetadas*; en inglés *labelled transition system* (LTS)) es una estructura de primer orden $\langle S, \{\xrightarrow{a}\}_{a\in L}\rangle$ donde las $\xrightarrow{a}$ son relaciones binarias, una para cada $a \in L$. Llamaremos *estados* a los elementos de S.

Tanto la notación como el nombre alternativo que se usa para estos modelos , dan a entender que la perspectiva que perseguimos es computacional: si pensamos que estamos parados en un estado s del sistema y se da la relación $s \xrightarrow{a} s'$, entonces, el sistema puede "evolucionar" al estado s' si recibe una "señal" a.

El énfasis está aquí en el tipo "comportamiento" que representa cada estado, cuando pienso a $\mathbf{S}$ como una caja negra con la que sólo podemos "interactuar" a través de L. Más precisamente, podemos pensar que en cada momento hay un *estado actual* (un elemento $s \in S$) y asociado a él un subconjunto de *acciones habilitadas*, que vendría a ser $\{a \in L : \exists s'(s \xrightarrow{a} s')\}$.

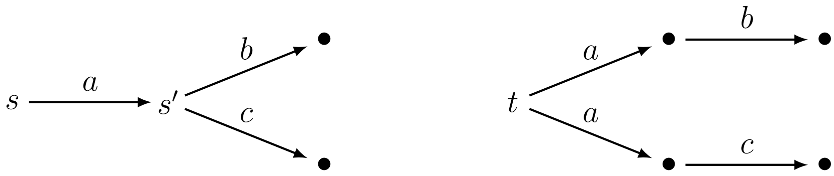


Figura 2: El marco de Kripke **S**

Para un ejemplo, consideremos el marco **S** dado por la Figura 2. Cuando el estado actual es t, la única acción habilitada es a y cuando el estado actual es s', las acciones habilitadas son b y c.

Entonces, en este modelo "reactivo", el observador no puede ver S sino solamente el conjunto de acciones habilitadas en el estado actual (digamos, observa $\{a\}$ para el estado s en el ejemplo de arriba), y luego elegir una de ellas. A posteriori, el sistema "evoluciona": el estado actual pasa a ser algún estado relacionado por esa etiqueta (siguiendo el ejemplo, sólo se puede elegir a y el estado actual pasa a ser un elemento de $\{q \in S : s \overset{a}{\to} q\} = \{s'\}$). En el caso de t, la única acción habilitada es a y luego de evolucionar el siguiente estado actual puede ser cualquiera de los dos estados a su derecha.

Cuando hay más de una posibilidad para el siguiente estado, el observador no tiene control de cuál estado de entre sus sucesores será el siguiente estado actual. Éste es el caso cuando el estado actual es t del ejemplo y se elige a (la única opción posible en este caso). El observador no controla y no puede observar si el siguiente estado actual es sucesor de arriba o el de abajo, aunque sí los puede distinguir a posteriori dado que el conjunto de acciones habilitadas en cada caso son distintas.

3.2.1. Bisimulación

Intuitivamente, dos estados de un marco son bisimilares si responden de igual modo a todos los posibles experimentos de interacción con el observador. En el caso anterior, s y t no son bisimilares porque si consideramos al primero como estado actual, está habilitada la acción a y luego de que el sistema evolucione siempre estarán habilitadas b y c. En cambio, en el caso de que t sea considerado estado actual, luego de elegir la acción a puede evolucionar a un estado en el que c no está habilitada.

Formalmente, una *bisimulación* es una relación R simétrica sobre S tal que si $s_1 \, R \, t_1$ y $t_1 \overset{a}{\to} t_2$ entonces existe s_2 tal que $s_1 \overset{a}{\to} s_2$ y $s_2 \, R \, t_2$. Decimos que dos marcos con estados distinguidos son *bisimilares* si existe una bisimulación sobre su unión disjunta que relaciona sendos estados.

Esta formalización captura la intuición primera, y se puede representar mediante juegos. Como una observación importante, cabe notar que para todo marco con un estado actual designado existe uno bisimilar a él con forma de árbol (i.e., sin ciclos):

$$\begin{tikzcd} s \arrow[loop right, "a"] \end{tikzcd} \qquad\qquad s_1 \xrightarrow{a} s_2 \xrightarrow{a} s_3 \xrightarrow{a} s_4 \xrightarrow{a} \cdots$$

La existencia de una bisimulación está relacionada con la lógica de Hennessy-Milner.

3.2.2. Lógica de Hennessy-Milner

Daremos aquí una descripción detallada tanto de *HML* como de la relación satisfacción para marcos de Kripke. *HML* está generada por las siguientes *producciones*:

$$\varphi \ ::== \ \top \ | \ \neg\varphi \ | \ \bigwedge_{i\in I} \varphi_i \ | \ \langle a\rangle\varphi.$$

Por su parte, la definición de $\models$ procede de manera recursiva: dados un marco $\mathbf{S}$ y un estado s, tenemos

$$\begin{gathered} \mathbf{S}, s \models \top \quad \text{siempre} \qquad\qquad \mathbf{S}, s \models \neg\varphi \quad \text{si no se da } \mathbf{S}, s \models \varphi \\ \mathbf{S}, s \models \textstyle\bigwedge_{i\in I} \varphi_i \quad \text{si } \mathbf{S}, s \models \varphi_i \text{ para todo } i \in I \\ \mathbf{S}, s \models \langle a\rangle\varphi \quad \text{si existe } s' \text{ tal que } s \xrightarrow{a} s' \text{ y } \mathbf{S}, s' \models \varphi \end{gathered}$$

Usando los conectivos $\bigwedge$ y $\neg$ se pueden fabricar los conocidos $\wedge$ y $\vee$. Por ejemplo, el estado s de la Figura 2 satisface $\langle a\rangle\top$ y también tenemos

$$\mathbf{S}, s \models \neg\langle b\rangle\top, \qquad \mathbf{S}, s' \models \langle b\rangle\top \wedge \langle c\rangle\top.$$

Ejercicio 6. Encontrar una fórmula de la lógica modal básica (con operadores modales para las relaciones etiquetadas con a, b y c como arriba) que se satisfaga en el estado t y no en el estado s de la Figura 2.

Se puede probar que si el cardinal de las conjunciones (es decir, el cardinal de I) es mayor o igual que el de todos los conjuntos $(\xrightarrow{a})[s] := \{q \in S : s \xrightarrow{a} q\}$ con $a \in L$ y $s \in S$, esta lógica caracteriza la bisimilitud:

Teorema 28 (van Benthem, H.-M.)**.** *Sean $s, s' \in \mathbf{S}$. Son equivalentes:*

1. *s satisface exactamente las mismas fórmulas que s'.*
2. *Existe una relación de bisimulación R sobre S tal que $s \mathrel{R} s'$.*

Este teorema se prueba muy fácilmente viendo que la relación inducida por la lógica $\{(s, s') \in S^2 : \forall\varphi(\mathbf{S}, s \models \varphi \iff \mathbf{S}, s' \models \varphi)\}$ es una bisimulación (para 1⇒2), y haciendo una inducción en la estructura de las fórmulas (para 2⇒1). En particular, para procesos de "imagen finita" (i.e., con $(\xrightarrow{a})[s]$ finitos para cada par a, s), con la conjunción estándar (binaria) es suficiente.

3.2.3. Lógicas contables para marcos contables

Es obvio que si I es infinito, la lógica es no numerable, y se pueden fabricar fácilmente ejemplos de marcos con conjuntos de estados contables donde la misma lógica pero con conjunciones finitas no caracteriza la bisimilitud.

Es natural preguntarse si existe alguna lógica modal *contable* que caracterice la bisimilitud para la familia de marcos contables.

Para que esta lógica satisfaga la implicación 2⇒1 del teorema, la semántica de los conectivos o "modalidades" sólo debe requerir el uso de la información que posee el observador que venimos describiendo (que ve las acciones habilitadas y puede interactuar eligiendo alguna). Por ejemplo, un operador 2_a que se defina como "$\mathbf{S}, s \models 2_a\varphi$ sii s tiene al menos dos sucesores por $\xrightarrow{a}$ que satisfacen φ" no es admisible. Aunque la bisimilitud no puede distinguir cosas tan básicas como el cardinal del conjunto de base o del conjunto de sucesores de un estado, veremos en los próximos ejemplos cuál es el poder discriminatorio de aquélla, lo cual nos conducirá a un resultado de imposibilidad.

Para cada número real r entre 0 y 1 estrictamente, podemos usar su expresión binaria infinita para crear un marco con conjunto de acciones $\{0,1\}$ de manera obvia: si tomamos $r = 0{,}10110\dots$, obtenemos el marco $\mathbf{Tr}_r = \langle\{s_n^r : n \in \omega\}, \{\xrightarrow{0}, \xrightarrow{1}\}\rangle$ dado por:

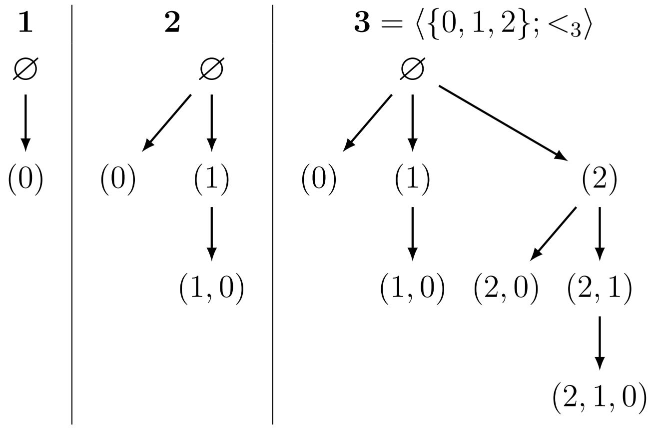
$$s_0^r \xrightarrow{1} s_1^r \xrightarrow{0} s_2^r \xrightarrow{1} s_3^r \xrightarrow{1} s_4^r \xrightarrow{0} \cdots$$

Ahora, si tomamos un subconjunto no vacío $A \subseteq (0,1)$, podemos armar un marco $\mathbf{Tr}_A$ "pegando" todos los $\mathbf{Tr}_r$ con $r \in A$. Para esto, ponemos un nuevo estado "inicial" y lo conectamos usando la acción "0" a los $\mathbf{Tr}_r$. Por ejemplo, si $A = \{1/2, 1/4, 1/8\}$, tendremos:

$$\begin{tikzcd}
& \bullet \arrow[r, "0"] & \bullet \arrow[r, "1"] & \bullet \arrow[r, "1"] & \bullet \arrow[r, "1"] & \bullet \arrow[r, "1"] & \cdots \\
\bullet \arrow[ur, "0"] \arrow[r, "0"] \arrow[dr, "0"'] & \bullet \arrow[r, "0"] & \bullet \arrow[r, "0"] & \bullet \arrow[r, "1"] & \bullet \arrow[r, "1"] & \bullet \arrow[r, "1"] & \cdots \\
& \bullet \arrow[r, "0"] & \bullet \arrow[r, "0"] & \bullet \arrow[r, "0"] & \bullet \arrow[r, "1"] & \bullet \arrow[r, "1"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

De esta manera, si elegimos $A \subseteq (0,1)$ como una sucesión estrictamente creciente y con límite $l \in (0,1)$, entonces $\mathbf{Tr}_A$ y $\mathbf{Tr}_{A\cup\{l\}}$ no son bisimilares.

De igual modo, los árboles (marcos con una sola acción) que surgen de considerar cadenas estrictamente decrecientes en ordinales (contables en nuestro caso, ver [5, Ex. 2.10]) no son bisimilares dos a dos.



Volviendo a *HML*, aunque esta lógica tiene demasiadas fórmulas, tiene la ventaja que éstas son "medibles": dada $\varphi \in HML$, el conjunto de los pares $(\mathbf{S}, s)$ que la satisfacen es un conjunto boreliano (de un $X_L \times \mathbb{N}$ apropiado). Enunciamos finalmente un resultado que limita el tipo de bondad que uno puede esperar de una lógica que caracterice la bisimilitud.

Teorema 29 ([9]). *La relación de bisimilitud en el espacio $X_L \times \mathbb{N}$ es $\mathbf{\Sigma}_1^1$-completa.*

Este teorema se basa principalmente en (una prueba) del Teorema 27. Con un par de ideas se puede extraer el siguiente

Corolario 30. *No hay lógica contable con fórmulas medibles que caracterice la bisimulación.*

Si uno resigna la condición de medibilidad, se puede obtener una lógica contable, por el siguiente elegante argumento de X. Caicedo. Para un conjunto contable de acciones L, hay a lo sumo $2^{\aleph_0}$ (clases de bisimilitud de) marcos de Kripke sobre $\mathbb{N}$. Luego hay una función inyectiva f de las clases de bisimilitud en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Nuestra "lógica" consistirá de una cantidad contable de fórmulas atómicas P_n ($n \in \mathbb{N}$; con el rol de constantes como $\top$ y $\bot$) con las siguientes interpretaciones:

$$\mathbf{S}, s \models P_n \iff n \in f([(\mathbf{S}, s)]_\sim),$$

dnde $[\cdot]_\sim$ denota la $\sim$-clase de equivalencia. Por construcción, la lógica $\mathcal{L}_X := \{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ caracteriza la bisimilitud. Sin embargo, no hay modo de interpretar a las fórmulas P_n como un "test" de ningún tipo sobre un proceso.

4. Cuentitas y ejercicios resueltos

La topología de la métrica uniforme en $C(X, Y)$ no depende de d_Y

Supongamos dadas dos métricas equivalentes en Y, d_Y y d'_Y, y denoto las respectivas bolas cerradas por $\bar{B}_Y$ y $\bar{B}'_Y$. Defino $d_u(f, g) = \sup_{x\in X} d_Y(f(x), g(x))$. Luego

$$\begin{aligned}\bar{B}_u(f, R) &= \Big\{g : \sup_{x\in X} d_Y(f(x), g(x)) \leq R\Big\} \\ &= \{g : \forall x\ d_Y(f(x), g(x)) \leq R\} \\ &= \{g : \forall x\ g(x) \in \bar{B}_Y(f(x), R)\}.\end{aligned}$$

Análogamente con $\bar{B}'_u$. Notar que $f(X)$ es compacto en Y.

Para todo $y \in f(X)$ elijo $r_y > 0$ tal que $\bar{B}'_Y(y, r_y) \subseteq \bar{B}_Y(y, R)$. Tomo $X_0 \subseteq X$ tal que $\{\bar{B}'_Y(f(x), R) : x \in X_0\}$ es cubrimiento finito de $f(X)$ y luego tomo $r := \min\{r_{f(x)} : x \in X_0\}$. Entonces $\bar{B}'_Y(f(x), r) \subseteq \bar{B}_Y(f(x), R)$ para todo x. Con esto concluyo $\bar{B}'_u(f, r) \subseteq \bar{B}_u(f, R)$. Simétricamente, para todo $R > 0$ existe $r > 0$ tal que $\bar{B}_u(f, r) \subseteq \bar{B}'_u(f, R)$

Prueba de [5, Theorem 4.19]

Debemos construir $D_{m,n} \subseteq C_{m,n}$ contable tal que para cada $f \in C_{m,n}$ y cada $\epsilon > 0$ haya una $g \in D_{m,n}$ con $d_Y(f(y), g(y)) < \epsilon$ para $y \in X_m = \{x_1, \dots, x_r\}$. Como Y es N_2 y luego Lindelöf, elijo una familia $\mathcal{B} := \{B_i : i \in \mathbb{N}\}$ numerable de bolas abiertas de radio menor a $1/p$ que lo cubran. Para cada subconjunto finito de $\mathcal{B}$, elijo (si existe) $g \in C_{m,n}$ tal que $g(x_i) \in B_i$ para cada i; pongo entonces g en $D_{m,n}$. Ahora bien, si $f \in C_{m,n}$, tomo $p > 1/\epsilon$ y sé que existe una $g \in D_{m,n}$ tal que $f(x_i)$ y $g(x_i)$ están en la misma bola de radio $1/p$, para cada $0 \leq i \leq r$.

Para probar que $D = \bigcup D_{m,n}$ es denso en $C(X, Y)$, sean $f \in C(X, Y)$, $\epsilon > 0$, $n > 3/\epsilon$ y sea $m \geq n$ tal que $f \in C_{m,n}$. Tomo $g \in D_{m,n}$ tal que $d_Y(f(y), g(y)) < 1/n = \epsilon/3$. Sea $x \in X$ e $y \in X_m$ tales que $d_X(x, y) < 1/m \leq \epsilon/3$. Luego

$$d_Y(f(x), g(x)) \leq \underbrace{d_Y(f(x), f(y))}_{f\in C_{m,n}} + d_Y(f(y), g(y)) + \underbrace{d_Y(g(y), g(x))}_{g\in D_{m,n}\subseteq C_{m,n}} < \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon$$

Definibilidad en $K(X)$

Ejercicio 7. La relación "$x \in K$" es cerrada en $K(X)$.

Demostración. Sean abiertos U y V que separen x de K (X Hausdorff). Luego los abiertos $U \times \{L \subseteq V\}$ separan: si $y \in U$ y $L \in \{L \subseteq V\}$, están separados. □

Ejercicio 8. La relación "$K \subseteq L$" es cerrada en $K(X)$.

Demostración. Supongamos que $K_0 \nsubseteq L_0$. Tomo $x \in K_0 \setminus L_0$, $x \in U$, $L_0 \subseteq V$, $U \cap V = \varnothing$. Tomo $\mathcal{V} := \{K : K \cap U \neq \varnothing\} \times \{L : L \subseteq V\}$ □

Ejercicio 9. x pertenece a $\overline{\mathrm{TLim}}_n K_n$ si y sólo si $\forall V \ni x, \exists^\infty i : K_i \cap V \neq \varnothing$

Demostración.

$$\begin{aligned}
&\forall V \ni x, \exists^\infty i : K_i \cap V \neq \varnothing \iff \forall V \ni x, \forall n\, \exists i > n : K_i \cap V \neq \varnothing \iff \\
&\iff \forall V \ni x, \forall n : \bigcup_{i>n} (K_i \cap V) \neq \varnothing \iff \forall V \ni x, \forall n : \Big(\bigcup_{i>n} K_i\Big) \cap V \neq \varnothing \iff \\
&\iff \forall n \forall V \ni x : \Big(\bigcup_{i>n} K_i\Big) \cap V \neq \varnothing \iff \forall n : x \in \overline{\bigcup_{i>n} K_i} \iff x \in \bigcap_n \overline{\bigcup_{i>n} K_i}
\end{aligned}$$

□

Lema 31 (definición por casos)**.** *Sean $\langle X, \mathcal{S} \rangle$ y $\langle Y, \mathcal{T} \rangle$ espacios medibles. Sea $U_n \in \mathcal{S}$ ($n = 0, 1, \dots$) una partición de X,[3] y sean $f_n : \langle U_n, \mathcal{S}|U_n \rangle \to \langle Y, \mathcal{T} \rangle$ funciones medibles. Luego la función*

$$h(x) := \begin{cases} f_0(x) & \text{si } x \in U_0 \\ f_1(x) & \text{si } x \in U_1 \\ \dots & \dots \end{cases}$$

es medible de X a Y.

Demostración. En primer lugar, notemos que como $U_n \in \mathcal{S}$ para todo n, entonces $\mathcal{S}|U_n \subseteq \mathcal{S}$. Sea $V \in \mathcal{T}$. Entonces basta notar que:

$$h^{-1}(V) = \bigcup_n \{x \in U_n : f_n(x) \in V\} = \bigcup_n f_n^{-1}(V) \in \mathcal{S}.$$

□

Referencias

[1] P. Celayes, "Procesos de Markov Etiquetados sobre Espacios de Borel Estándar", Trabajo Final, FaMAF, Universidad Nacional de Córdoba (2006).

[2] A.A. Fraenkel, "Abstract Set Theory", North-Holland, Amsterdam (1961), segunda edición.

[3] G. Hjorth, Descriptive set theory, Webpage (2003). `http://www.math.ucla.edu/~greg/notredamenotes.dvi`.

[3] $\bigcup_n U_n = X$ y $n \neq m \Rightarrow U_n \cap U_m = \varnothing$.

[4] W. Just, M. Weese, “Discovering Modern Set Theory. I”, Grad. Studies in Mathematics **8**, American Mathematical Society (1996).

[5] A.S. Kechris, “Classical Descriptive Set Theory”, Graduate Texts in Mathematics **156**, Springer-Verlag (1994).

[6] J.L. Kelley, “General Topology”, D. Van Nostrand Company, Inc. (1961).

[7] D. Marker, Descriptive set theory, Webpage (2002). `http://www.math.uic.edu/~marker/math512/dst.pdf`.

[8] W. Rudin, “Real and Complex Analysis”, McGraw-Hill (1987), tercera edición.

[9] P. Sánchez Terraf, Bisimilarity is not Borel, *CoRR* **arXiv:1211.0967** (2012).