Tópicos en Teoría de Conjuntos

> Duración del curso

18hs reloj.

> Carga horaria semanal

4hs semanales.

> Forma de evaluación

Entrega de una lista de ejercicios resueltos.

> Correlativas

Haber cursado Cálculo Avanzado. Haber visto las nociones de ordinal y cardinal.

> Objetivos de la materia

El curso abordará temas de dificultad intermedia de Teoría de Conjuntos. Será apto para alumnos de licenciatura y doctorado que hayan tenido alguna exposición con el tema; todos los preliminares están incluidos en [1], o en páginas 1—31 de [3]. Más precisamente, se requiere que conozcan los axiomas de la teoría de conjuntos y las definiciones de ordinal y cardinal, con algún manejo elemental de dichos conceptos.

[1] R. Cignoli, "Teoría axiomática de conjuntos: Una introducción", Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires (2016).
[2] F. Drake, "Set Theory: An Introduction to Large Cardinals", North-Holland Publishing Company (1974).
[3] T. Jech, "Set Theory", Springer-Verlag (2006) edición del milenio (3ra).
[4] K. Kunen, "Set Theory", College Publications (2011).

> Programa resumido

Cofinalidad. Cardinales regulares y singulares; Teorema de König. Características cardinales del continuo: **b, a, p** y **t.**

Nociones de forzamiento (posets). Axioma de Martin y aplicaciones.

Filtros y ultrafiltros en posets. Subconjuntos club y estacionarios de cardinales regulares. Lema de

Fodor. Cardonales de Mahlo.

Problema de la Medida para cardinales. Cardinales medibles a valores reales. Cardinales medibles.

> Guía aproximada de clases

1. Repaso: axiomática ZFC, ordinales, cardinales, aritmética cardinal. Teorema de Hessenberg. Unión de conjuntos con cardinal acotado, presencia de AC en la prueba.
2. Cofinalidad. Ordinales regulares. La cofinalidad es un cardinal regular. Caracterización en términos de supremos de cardinales menores. Teorema de König.
3. Características (invariantes) cardinales del Continuo. Dominación de funciones. Familias casi disjuntas (maximales). Cardinales b y a. Teorema de Solomon b<= a. Cardinales p y t.
4. Posets: nociones de forzamiento, compatibilidad, anticadenas. Ejemplo Fn(I,J): funciones y filtros. Conjuntos densos, filtros genéricos. Teorema del Filtro Genérico (MA(omega)). No hay genérico para Fn(omega,omega_1). Condición de cadenas contables (ccc). Axioma de Martin MA(k); MA(k) implica que k <2^{omega}.
5. Aplicaciones de MA a las características cardinales del continuo: MA implica que bound=2^{omega}. MA implica que 2^{omega} es regular y la unión de menos que continuos conjuntos de medida Lebesgue 0 es un conjunto de medida nula. Filtros como noción de ``conjuntos grandes". Filtros e ideales sobre P(k). Conjuntos estacionarios; aplicación a conjuntos de medida 1, 0 y positiva en el intervalo [0,1].
6. Definición de filtro e ideales sobre X como casos particulares de filtros en P(X){0}. Dual de un filtro. Ultrafiltros. Los ultrafiltros son filtros maximales. Filtros primos. Los ultrafiltros “preservan” los conectivos lógicos. Filtros k -completos. Conjuntos club. Intersección de <k clubes es club. El filtro Club(k). El ideal no estacionario. Ejemplos de conjuntos estacionarios: S^theta_alpha. Matrices de Ulam; Club(k) no es ultrafiltro. Intersección diagonal: interpretación.
7. Ejemplos: (ultra)filtros principales. Ultrafiltros principales son lambda -completos para todo lambda inCard. Ejemplos de clubes en k : {beta : alpha <beta }, ordinales límites en k. Consecuencias para estacionarios. Las propiedades k se reflejan en algún elemento de todo estacionario. El filtro club es cerrado por intersecciones diagonales de tamaño k. Subálgebras de <k ,f> con f:k → k. Lema de ``regresión" de Fodor y aplicaciones a topología. Cardinales de Mahlo. Introducción al problema de la medida.
8. Problema de la Medida para cardinales. Medidas lambda -aditivas. Cardinales medibles a valores reales (mvr). El primer cardinal que admite una medida no trivial es mvr. Los cardinales mvr son regulares. Átomos de una medida. Si el primer cardinal mvr admite medida sin átomos, entonces 2^{omega} también.
9. Los cardinales mvr son débilmente inaccesibles. Átomos y medidas a dos valores. Cardinales medibles. Relación con ultrafiltros. Los cardinales medibles son inaccesibles.