Introducción a los Algoritmos
Cálculo Proposicional

Pedro Sánchez Terraf

CIEM-FaMAF — Universidad Nacional de Córdoba

FaMAF
UNC
26 de abril de 2017

Contenido

Expressiones Booleanas Válidas y Satisfactibles

Una expresión de tipo $Bool$ puede ser:

1. **válida** si es $True$ para todos los valores de sus variables (puedo demostrar que es equivalente a $True$);
2. **satisfactible** si hay al menos un valor de las variables que las hace $True$ (hay un ejemplo);
3. **no válida** si es $False$ para algún valor de sus variables; (hay un contraejemplo);
4. **no satisfactible** si es $False$ para todos los valores de sus variables (puedo demostrar que es equivalente a $False$);

Expressiones Booleanas Válidas y Satisfactibles

Una expresión de tipo $Bool$ puede ser:

1. **válida** si es $True$ para todos los valores de sus variables (puedo demostrar que es equivalente a $True$);
2. **satisfactible** si hay al menos un valor de las variables que las hace $True$ (hay un ejemplo);
3. **no válida** si es $False$ para algún valor de sus variables; (hay un contraejemplo);
4. **no satisfactible** si es $False$ para todos los valores de sus variables (puedo demostrar que es equivalente a $False$);

Expressiones Booleanas Válidas y Satisfactibles

Una expresión de tipo $Bool$ puede ser:

1. **válida** si es $True$ para todos los valores de sus variables (puedo demostrar que es equivalente a $True$); P. ej.: $2 * x = x + x$.
2. **satisfactible** si hay al menos un valor de las variables que las hace $True$ (hay un ejemplo);
3. **no válida** si es $False$ para algún valor de sus variables; (hay un contraejemplo);
4. **no satisfactible** si es $False$ para todos los valores de sus variables (puedo demostrar que es equivalente a $False$);

Expressiones Booleanas Válidas y Satisfactibles

Una expresión de tipo $Bool$ puede ser:

1. **válida** si es $True$ para todos los valores de sus variables (puedo demostrar que es equivalente a $True$); P. ej.: $2 * x = x + x$.
2. **satisfactible** si hay al menos un valor de las variables que las hace $True$ (hay un ejemplo);
3. **no válida** si es $False$ para algún valor de sus variables; (hay un contraejemplo);
4. **no satisfactible** si es $False$ para todos los valores de sus variables (puedo demostrar que es equivalente a $False$);

Expressiones Booleanas Válidas y Satisfactibles

Una expresión de tipo $Bool$ puede ser:

1. **válida** si es $True$ para todos los valores de sus variables (puedo demostrar que es equivalente a $True$); P. ej.: $2 * x = x + x$.
2. **satisfactible** si hay al menos un valor de las variables que las hace $True$ (hay un ejemplo); P. ej.: $x < 5$.
3. **no válida** si es $False$ para algún valor de sus variables; (hay un contraejemplo);
4. **no satisfactible** si es $False$ para todos los valores de sus variables (puedo demostrar que es equivalente a $False$);

Una expresión de tipo $Bool$ puede ser:

1. **válida** si es $True$ para todos los valores de sus variables (puedo demostrar que es equivalente a $True$); P. ej.: $2 * x = x + x$.
2. **satisfactible** si hay al menos un valor de las variables que las hace $True$ (hay un ejemplo); P. ej.: $x < 5$.
3. **no válida** si es $False$ para algún valor de sus variables; (hay un contraejemplo);
4. **no satisfactible** si es $False$ para todos los valores de sus variables (puedo demostrar que es equivalente a $False$);

Expressiones Booleanas Válidas y Satisfactibles

Una expresión de tipo $Bool$ puede ser:

1. **válida** si es $True$ para todos los valores de sus variables (puedo demostrar que es equivalente a $True$); P. ej.: $2 * x = x + x$.
2. **satisfactible** si hay al menos un valor de las variables que las hace $True$ (hay un ejemplo); P. ej.: $x < 5$.
3. **no válida** si es $False$ para algún valor de sus variables; (hay un contraejemplo); P. ej.: $2 * x = 0$.
4. **no satisfactible** si es $False$ para todos los valores de sus variables (puedo demostrar que es equivalente a $False$);

Expressiones Booleanas Válidas y Satisfactibles

Una expresión de tipo $Bool$ puede ser:

1. **válida** si es $True$ para todos los valores de sus variables (puedo demostrar que es equivalente a $True$); P. ej.: $2 * x = x + x$.
2. **satisfactible** si hay al menos un valor de las variables que las hace $True$ (hay un ejemplo); P. ej.: $x < 5$.
3. **no válida** si es $False$ para algún valor de sus variables; (hay un contraejemplo); P. ej.: $2 * x = 0$.
4. **no satisfactible** si es $False$ para todos los valores de sus variables (puedo demostrar que es equivalente a $False$);

Expressiones Booleanas Válidas y Satisfactibles

Una expresión de tipo $Bool$ puede ser:

1. **válida** si es $True$ para todos los valores de sus variables (puedo demostrar que es equivalente a $True$); P. ej.: $2 * x = x + x$.
2. **satisfactible** si hay al menos un valor de las variables que las hace $True$ (hay un ejemplo); P. ej.: $x < 5$.
3. **no válida** si es $False$ para algún valor de sus variables; (hay un contraejemplo); P. ej.: $2 * x = 0$.
4. **no satisfactible** si es $False$ para todos los valores de sus variables (puedo demostrar que es equivalente a $False$); P. ej.: $x + 1 = x$.

Tablas de Verdad

Temporariamente, vamos a utilizar tablas de verdad para decidir satisfactibilidad y validez de fórmulas proposicionales. Luego usaremos demostraciones.

p	q	$p \vee q$	$p \vee q \equiv q$
True	*True*	*True*	*True*
True	*False*	*True*	*False*
False	*True*	*True*	*True*
False	*False*	*False*	*True*

Tablas de Verdad

Temporariamente, vamos a utilizar tablas de verdad para decidir satisfactibilidad y validez de fórmulas proposicionales. Luego usaremos demostraciones.

p	q	$p \vee q$	$p \vee q \equiv q$
True	*True*	*True*	*True*
True	*False*	*True*	*False*
False	*True*	*True*	*True*
False	*False*	*False*	*True*

Repaso

Justificación

$$\begin{array}{rl} & 5 * (x + 3) = 20 \\ \equiv & \{ \text{ Conmutativa + } \} \\ & 5 * (3 + x) = 20 \end{array}$$

- Debo justificar usando propiedades **válidas** o **definiciones**.

Repaso

$$
\begin{aligned}
& 5 * (x + 3) = 20 \\
\equiv \{ & \text{ Conmutativa + } \} \\
& 5 * (3 + x) = 20
\end{aligned}
$$

Justificación

Conmutativa de +:

$$a + b = b + a$$

Sustituyo a por x
Sustituyo b por 3
para obtener

$$x + 3 = 3 + x.$$

- Debo justificar usando propiedades **válidas** o **definiciones**.

Repaso

$$
\begin{aligned}
& 5 * (x+3) = 20 \\
\equiv \{ & \text{ Conmutativa + } \} \\
& 5 * (3+x) = 20
\end{aligned}
$$

Justificación

Conmutativa de +:

$$a+b=b+a$$

Sustituyo a por x
Sustituyo b por 3
para obtener

$$x+3=3+x.$$

- Debo justificar usando propiedades **válidas** o **definiciones**.

Cálculo Proposicional (I)

Justificaremos ahora usando expresiones booleanas válidas. Un ejemplo es la *Conmutatividad de* $\equiv$.

Justificación

Conmutatividad de $\equiv$:

$$(P \equiv Q) \equiv (Q \equiv P)$$

$$\begin{aligned} & r \equiv p \wedge q \equiv r \\ \equiv & \{ \text{ Conmutatividad } \equiv \} \\ & p \wedge q \equiv r \equiv r \end{aligned}$$

Justificaremos ahora usando expresiones booleanas válidas. Un ejemplo es la *Conmutatividad de* $\equiv$.

$$
\begin{array}{ll}
 & r \equiv p \wedge q \equiv r \\
\equiv & \{ \text{ Conmutatividad } \equiv \} \\
 & p \wedge q \equiv r \equiv r
\end{array}
$$

Justificación

Conmutatividad de $\equiv$:

$$(P \equiv Q) \equiv (Q \equiv P)$$

Sustituyo P por r
Sustituyo Q por $p \wedge q$; obtengo

$$(r \equiv p \wedge q) \equiv (p \wedge q \equiv r).$$

Otra expresión booleana válida es la *Definición* $\Rightarrow$.

Justificación

Definición $\Rightarrow$:

$$(P \Rightarrow Q) \equiv (P \lor Q \equiv Q)$$

$$\begin{aligned}
& q \equiv r \Rightarrow q \equiv r \\
\equiv & \{ \text{ Definición } \Rightarrow \} \\
& q \equiv r \lor q \equiv q \equiv r
\end{aligned}$$

Otra expresión booleana válida es la *Definición* $\Rightarrow$.

$$
\begin{aligned}
& q \equiv r \Rightarrow q \equiv r \\
\equiv & \{ \text{ Definición } \Rightarrow \} \\
& q \equiv r \vee q \equiv q \equiv r
\end{aligned}
$$

Justificación

Definición $\Rightarrow$:

$$(P \Rightarrow Q) \equiv (P \vee Q \equiv Q)$$

Sustituyo P por r
Sustituyo Q por q; obtengo

$$(r \Rightarrow q) \equiv (r \vee q \equiv q).$$

Asociando y Conmutando con $\equiv$

Hasta ahora todo es igual. Pero las demostraciones con fórmulas proposicionales (las expresiones booleanas hechas con $\equiv$, $\wedge$, $\vee$,... y variables de tipo $Bool$) permiten mucha más flexibilidad.

Asociando con $\equiv$

Puedo **agrupar** las expresiones separadas por $\equiv$ de la manera que quiera, poniendo paréntesis.

Ejemplo

Para la *Conmutatividad de* $\equiv$, tenemos

$$(P \equiv Q) \equiv (Q \equiv P)$$
$$P \equiv (Q \equiv Q \equiv P)$$
$$(P \equiv Q \equiv Q) \equiv P$$
$$\ldots$$

Asociando y Conmutando con $\equiv$

Hasta ahora todo es igual. Pero las demostraciones con fórmulas proposicionales (las expresiones booleanas hechas con $\equiv$, $\wedge$, $\vee$,... y variables de tipo $Bool$) permiten mucha más flexibilidad.

Asociando con $\equiv$

Puedo **agrupar** las expresiones separadas por $\equiv$ de la manera que quiera, poniendo paréntesis.

Ejemplo

Para la *Conmutatividad de* $\equiv$, tenemos

$$(P \equiv Q) \equiv (Q \equiv P)$$
$$P \equiv (Q \equiv Q \equiv P)$$
$$(P \equiv Q \equiv Q) \equiv P$$
$$\ldots$$

Asociando y Conmutando con $\equiv$

Hasta ahora todo es igual. Pero las demostraciones con fórmulas proposicionales (las expresiones booleanas hechas con $\equiv$, $\wedge$, $\vee$,... y variables de tipo $Bool$) permiten mucha más flexibilidad.

Conmutando con $\equiv$

Puedo **ordenar** las expresiones separadas por $\equiv$ de la manera que quiera (y luego agrupar a placer).

Ejemplo

Para la *Definición de* $\Rightarrow$, tenemos

$$
\begin{aligned}
P \Rightarrow Q \equiv P \vee Q \equiv Q \\
P \vee Q \equiv P \Rightarrow Q \equiv Q \\
Q \equiv P \Rightarrow Q \equiv P \vee Q \\
\ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& r \equiv p \wedge q \equiv r \\
\equiv \{ & \text{ Conmutatividad } \equiv \} \\
& p \wedge q \equiv r \equiv r \\
\equiv \{ & \text{ Conmutatividad } \equiv \} \\
& p \wedge q
\end{aligned}
$$

Justificación

Conmutatividad de $\equiv$:

$$(P \equiv Q) \equiv (Q \equiv P)$$

Sustituyo P por r
Sustituyo Q por $p \wedge q$; obtengo

$$(r \equiv p \wedge q) \equiv (p \wedge q \equiv r).$$

Cálculo Proposicional (III): Reagrupando con Asociatividad

$$
\begin{aligned}
& r \equiv p \wedge q \equiv r \\
\equiv \{ & \text{ Conmutatividad } \equiv \} \\
& p \wedge q \equiv r \equiv r \\
\equiv \{ & \text{ Conmutatividad } \equiv \} \\
& p \wedge q
\end{aligned}
$$

Justificación

Conmutatividad de $\equiv$:

$$(P \equiv Q \equiv Q) \equiv P$$

Sustituyo P por $p \wedge q$
Sustituyo Q por r ; obtengo

$$(p \wedge q \equiv r \equiv r) \equiv (p \wedge q).$$

Cálculo Proposicional (IV): Reordenando con Conmutativa

$$\underline{q \equiv r \Rightarrow q} \equiv r$$

$$\equiv \{ \text{ Definición } \Rightarrow \}$$

$$r \vee q \equiv r$$

Justificación

Definición $\Rightarrow$:

$$(P \Rightarrow Q) \equiv (P \vee Q \equiv Q)$$

$$
\begin{array}{ll}
 & \underline{q \equiv r \Rightarrow q} \equiv r \\
\equiv & \{ \text{ Definición } \Rightarrow \} \\
 & r \vee q \equiv r
\end{array}
$$

Justificación

Definición $\Rightarrow$:

$$P \Rightarrow Q \equiv P \vee Q \equiv Q$$

Cálculo Proposicional (IV): Reordenando con Conmutativa

$$\begin{aligned} & \underline{q \equiv r \Rightarrow q} \equiv r \\ \equiv \{ & \text{ Definición } \Rightarrow \} \\ & r \vee q \equiv r \end{aligned}$$

Justificación

Definición $\Rightarrow$:

$$Q \equiv P \Rightarrow Q \equiv P \vee Q$$

Cálculo Proposicional (IV): Reordenando con Conmutativa

$$\underline{q \equiv r \Rightarrow q} \equiv r$$
$$\equiv \{ \text{ Definición } \Rightarrow \}$$
$$r \vee q \equiv r$$

Justificación

Definición $\Rightarrow$:

$$Q \equiv P \Rightarrow Q \equiv P \vee Q$$

Sustituyo P por r
Sustituyo Q por q; obtengo

$$q \equiv r \Rightarrow q \equiv r \vee q.$$

Fijaremos un conjunto de fórmulas proposicionales válidas y justificaremos nuestras pruebas usando al principio sólo ellas.

Los axiomas que usaremos están en la Lista Completa (“Digesto”) en mi web.

Definimos intuitivamente (de manera “recursiva”) la noción de *teorema*.

Definición

Un **teorema** es:

1. un axioma; o sino
2. una fórmula proposicional equivalente a un axioma o a un teorema ya demostrado.

Una versión mucho más detallada y formal de esta definición la pueden encontrar en el libro “Cálculo de Programas”, Capítulo 3, pp.15-27.

Axiomas y Teoremas

Fijaremos un conjunto de fórmulas proposicionales válidas y justificaremos nuestras pruebas usando al principio sólo ellas.
Los axiomas que usaremos están en la Lista Completa ("Digesto") en mi web.
Definimos intuitivamente (de manera "recursiva") la noción de *teorema*.

Definición

Un **teorema** es:

1. un axioma; o sino
2. una fórmula proposicional equivalente a un axioma o a un teorema ya demostrado.

Una versión mucho más detallada y formal de esta definición la pueden encontrar en el libro "Cálculo de Programas", Capítulo 3, pp.15-27.

Axiomas y Teoremas

Fijaremos un conjunto de fórmulas proposicionales válidas y justificaremos nuestras pruebas usando al principio sólo ellas.
Los axiomas que usaremos están en la Lista Completa ("Digesto") en mi web.
Definimos intuitivamente (de manera "recursiva") la noción de *teorema*.

Definición

Un **teorema** es:

1. un axioma; o sino
2. una fórmula proposicional equivalente a un axioma o a un teorema ya demostrado.

Una versión mucho más detallada y formal de esta definición la pueden encontrar en el libro "Cálculo de Programas", Capítulo 3, pp.15-27.

Teoremas: Cómo demostrarlos

En la práctica, admitiremos un par de reglas extra (que, de todos modos, son correctas desde el punto de vista del libro).

1. Todo teorema es equivalente a $True$.
2. Si pruebo que algo es equivalente a $True$, entonces es un teorema.
3. Si salgo de una fórmula E y llego a otra F justificando con teoremas, entonces $E \equiv F$ es un teorema.

Por ejemplo, en último ejemplo probamos que

$$q \equiv r \Rightarrow q \equiv r \equiv r \vee q \equiv r$$

es un teorema.

Teoremas: Cómo demostrarlos

En la práctica, admitiremos un par de reglas extra (que, de todos modos, son correctas desde el punto de vista del libro).

1. Todo teorema es equivalente a $True$.
2. Si pruebo que algo es equivalente a $True$, entonces es un teorema.
3. Si salgo de una fórmula E y llego a otra F justificando con teoremas, entonces $E \equiv F$ es un teorema.

Por ejemplo, en último ejemplo probamos que

$$q \equiv r \Rightarrow q \equiv r \equiv r \vee q \equiv r$$

es un teorema.

En la práctica, admitiremos un par de reglas extra (que, de todos modos, son correctas desde el punto de vista del libro).

1. Todo teorema es equivalente a $True$.
2. Si pruebo que algo es equivalente a $True$, entonces es un teorema.
3. Si salgo de una fórmula E y llego a otra F justificando con teoremas, entonces $E \equiv F$ es un teorema.

Por ejemplo, en último ejemplo probamos que

$$q \equiv r \Rightarrow q \equiv r \equiv r \vee q \equiv r$$

es un teorema.

$$\underline{q \equiv r \Rightarrow q} \equiv r$$

$\equiv$ { Definición $\Rightarrow$ }

$$r \vee q \equiv r$$

Justificación

Definición $\Rightarrow$:

$$Q \equiv P \Rightarrow Q \equiv P \vee Q$$

Sustituyo P por r
Sustituyo Q por q; obtengo

$$q \equiv r \Rightarrow q \equiv r \vee q.$$

Tareas para ahora mismo

1. Hacer Ejercicios 4a, 4b y 4c del Práctico 3 usando tablas de verdad.
2. Leer los axiomas, poniendoles paréntesis de acuerdo a la precedencia.
3. ¿De cuántas maneras se puede leer la *Definición de* $\neg$? (es el axioma **A4**).
4. ¿Qué teorema demostramos en la filmina 10 (página 24)?
5. Completar los espacios en blanco, justificando con los axiomas:

$$\begin{array}{ll} & \neg p \equiv q \vee r \\ \equiv & \{ \qquad\qquad\qquad\qquad \} \\ & \neg(p \equiv q \vee r) \\ \equiv & \{ \qquad\qquad\qquad\qquad \} \\ & p \not\equiv q \vee r \end{array}$$

6. Entender el ejemplo en el ejercicio 6 del Práctico 3.