Solución Parcial - 19 de Junio de 2017

1. Demostrar que las siguientes fórmulas son teoremas del Cálculo Proposicional. En cada paso de la demostración indique que axioma o teorema se utiliza, y subraye la subfórmula involucrada. Se pueden utilizar, sin demostrar, los axiomas y teoremas dados en el Digesto Proposicional.

   a) [**15 pto(s)**] $p \vee \neg q \equiv \neg p \equiv \neg q \equiv \neg p \vee q$.

   b) [**15 pto(s)**] $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$.

Solución. Primer ítem:

$$
\begin{array}{ll}
 & \underline{p \vee \neg q} \equiv \neg p \equiv \neg q \equiv \neg p \vee q \\
\equiv \{ & \text{Teorema } (*) \ \} \\
 & p \vee q \equiv \underline{p \equiv \neg p \equiv \neg q \equiv \neg p \vee q} \\
\equiv \{ & \text{Conmutativa} \equiv \ \} \\
 & \underline{p \vee q \equiv \neg p \vee q} \equiv p \equiv \neg p \equiv \neg q \\
\equiv \{ & \text{Teorema } (*) \ \} \\
 & q \equiv \underline{p \equiv \neg p} \equiv \neg q \\
\equiv \{ & \text{Equivalencia y Negación } \} \\
 & q \equiv \mathit{False} \equiv \neg q \\
\equiv \{ & \text{Equivalencia y Negación } \} \\
 & \mathit{True}.
\end{array}
$$

Segundo ítem:

$$
\begin{array}{ll}
 & p \wedge q \Rightarrow p \vee q \\
\equiv \{ & \text{Definición de } \Rightarrow \ \} \\
 & \underline{(p \wedge q) \vee p} \vee q \equiv p \vee q \\
\equiv \{ & \text{Absorción } \} \\
 & p \vee q \equiv p \vee q \\
\equiv \{ & \text{Reflexividad} \equiv \ \} \\
 & \mathit{True}.
\end{array}
$$

□

2. Formalizar las siguientes propiedades escritas en lenguaje natural, en el lenguaje de la lógica de predicados:

   a) [**10 pto(s)**] *"Ningún círculo en xs es rojo"*.
   Ejemplos: Las listas $[(\mathit{Rombo}, \mathit{Rojo}, 3)]$ y $[(\mathit{Circulo}, \mathit{Azul}, 3)]$ satisfacen la propiedad. La lista $[(\mathit{Circulo}, \mathit{Rojo}, 2)]$ no la satisface.

   b) [**10 pto(s)**] *"Hay un único cuadrado en xs y es rojo"*.
   Ejemplos: Las listas $[(\mathit{Cuadrado}, \mathit{Rojo}, 3)]$ y $[(\mathit{Cuadrado}, \mathit{Rojo}, 2), (\mathit{Rombo}, \mathit{Azul}, 1)]$ satisfacen la propiedad. Las listas $[(\mathit{Rombo}, \mathit{Azul}, 1)]$ y $[(\mathit{Cuadrado}, \mathit{Rojo}, 1), (\mathit{Cuadrado}, \mathit{Azul}, 2)]$ no la satisfacen.

Solución. *a)* "Ningún" = "Para todo no".

$$\langle \forall x : x \in xs \wedge \mathit{circulo}.x : \neg \mathit{rojo}.x \rangle.$$

b)

$$\Big\langle \exists i : 0 \leqslant i < \#xs \wedge \mathit{cuadrado}.(xs \,!\, i) \wedge \mathit{rojo}.(xs \,!\, i) : \langle \forall j : 0 \leqslant j < \#xs \wedge i \neq j : \neg \mathit{cuadrado}.(xs \,!\, j) \rangle \Big\rangle.$$

□

3. [**10 pto(s)**] Dar una lista $xsPos :: [Figura]$ que satisfaga la siguiente especificación escrita usando la Lógica de Predidados, y otra lista $xsNeg :: [Figura]$ que no la satisfaga. Prestar especial atención a las variables utilizadas en la especificación.

$$triangulo.(xs!!0) \wedge \langle \forall x : x \in_\ell xs \wedge triangulo.x : \langle \forall y : y \in_\ell xs : (\underline{azul.y \vee \neg rojo.x}) \Rightarrow cuadrado.y \rangle \rangle.$$

Solución. $xsPos \doteq [(Triangulo, Rojo, 0)]$: el antecedente (subrayado) es falso para todos los posibles y, luego, el $\forall$ interno es siempre $True$.

$xsNeg \doteq [(Cuadrado, Rojo, 0)]$: ya falla la primera condición $(triangulo.(xs!!0))$. □

4. [**20 pto(s)**] Demostrar que la siguiente fórmula es teorema del Cálculo de Predicados. En cada paso de la demostración indique que axioma o teorema se utiliza, y subraye la subfórmula involucrada. Se pueden utilizar, sin demostrar, los axiomas y teoremas dados en el Digesto Proposicional y en el Digesto de Predicados.

$$\langle \forall x : : \neg(P.x \Rightarrow Q.x) \rangle \equiv (\langle \forall x : : P.x \rangle \wedge \langle \forall x : : \neg Q.x \rangle).$$

Solución. Primero probemos el siguiente teorema: $\neg(P.x \Rightarrow Q.x) \equiv P.x \wedge \neg Q.x$:

$$
\begin{array}{ll}
 & \neg(\underline{P.x \Rightarrow Q.x}) \\
\equiv & \{ \text{ Caracterización de } \Rightarrow \ \} \\
 & \neg(\neg P.x \vee Q.x) \\
\equiv & \{ \text{ De Morgan para } \vee \ \} \\
 & \underline{\neg\neg P.x} \wedge \neg Q.x \\
\equiv & \{ \text{ Doble } \neg \ \} \\
 & P.x \wedge \neg Q.x
\end{array}
$$

Ahora salimos del lado izquierdo del problema original:

$$
\begin{array}{ll}
 & \langle \forall x : : \underline{\neg(P.x \Rightarrow Q.x)} \rangle \\
\equiv & \{ \text{ Teorema recién probado } \} \\
 & \langle \forall x : : P.x \wedge \neg Q.x) \rangle \\
\equiv & \{ \text{ Regla del Término } \} \\
 & \langle \forall x : : P.x \rangle \wedge \langle \forall x : : \neg Q.x \rangle.
\end{array}
$$

□

5. [**20 pto(s)**] Dada la definición de la función $hayTR$:

$$
\begin{array}{l}
hayTR : [Figura] \rightarrow Bool \\
hayTR.[\,] \doteq False \\
hayTR.(x \triangleright xs) \doteq (triangulo.x \wedge rojo.x) \vee hayTR.xs
\end{array}
$$

demostrar por inducción la siguiente fórmula

$$hayTR.xs \equiv \langle \exists y : y \in_\ell xs : triangulo.y \wedge rojo.y \rangle.$$

A este ya no lo hago porque es igual a tooooodos los ejercicios del práctico y hay uno de esos resuelto en la sección 2.10.12 de mi apunte (versión del 18/6).