Introducción a los Algoritmos – 2009

Práctico 6

Aplicación: De la isla de los caballeros y los pícaros.

Nota: todos estos ejercicios fueron presentados en el Práctico 0. Ahora podemos aplicar el Cálculo Proposicional para resolverlos.

Posibles interpretaciones de los conectivos

$\neg$	"No –", "Es falso que –", "No es el caso que –", etc.
$\wedge$	"– y –", "–, pero –", "–, sin embargo –",
$\vee$	"– o –", "– o – o ambos –".
$\Rightarrow$	"[Si] – entonces –", "– luego –", "–. Como consecuencia, –"
$\equiv$	"– si y sólo si –", "Son equivalentes – y –".
$\not\equiv$	"O bien – o –".

1. Nos encontramos con dos personas, A y B. A dice 'Al menos uno de nosotros es un pícaro' ¿Qué son A y B?

2. A dice 'Yo soy un pícaro o B es un caballero' ¿Qué son A y B?

3. A dice 'Yo soy un pícaro pero B no' ¿Qué son A y B?

4. Dos personas se dicen del mismo tipo si son ambas caballeros o ambas pícaros. Tenemos tres personas, A, B y C. A y B dicen lo siguiente:

   A: B es un pícaro.

   B: A y C son del mismo tipo.

   ¿Qué es C?

5. A dice 'Si soy un caballero entonces B también lo es' ¿Qué son A y B?

6. Le preguntan a A si es un caballero. A responde 'Si soy un caballero entonces me comeré el sombrero'. Demostrar que A tiene que comerse el sombrero.

7. A realiza (por separado) las siguientes dos afirmaciones.

   - 'Amo a María'.
   - 'Si amo a María, entonces amo a Yolanda'.

   ¿Qué es A?

8. Ud. se encuentra con seis personas de la Isla, A, B, C, D, E y F.
   (Para cada ítem, los anteriores son válidos.)

   a) A dice: "E y yo somos del mismo tipo". ¿Qué es E?
   b) B dice: "Si yo soy pícaro, entonces Ud. aprobará el próximo parcial de la materia". ¿Qué desea Ud. que sea B?
   c) F dice: "Si C es caballero, entonces D es caballero", y D dice: "Si C es pícaro, entonces A es caballero". ¿Qué es F?
   d) E dice: "A y D son de distinto tipo". ¿Qué son A, C y D?

Aplicación: Piso, Techo, Máximo.

9. En cada fila de la siguiente tabla hay variantes de las definiciones de piso, techo y máximo, respectivamente, y una versión incorrecta de cada una. Dar contraejemplos para las incorrectas.

$\lfloor x \rfloor \le k \equiv x \le k$	$k \le \lfloor x \rfloor \equiv k \le x$
$k < \lceil x \rceil \equiv k < x$	$k \le \lceil x \rceil \equiv k \le x$
$k \ge x \,\text{máx}\, y \equiv k \ge x \wedge k \ge y$	$k \le x \,\text{máx}\, y \equiv k \le x \wedge k \le y$

10. Demostrar:

   a) $\lfloor x/m \rfloor = \lfloor \lfloor x \rfloor / m \rfloor$, donde m es natural y distinto de 0.

   b) $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = \lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor$, donde x es positivo.

   c) $\lfloor \lfloor x \rfloor \rfloor = \lfloor x \rfloor$.

   d) $\lceil \lfloor x \rfloor \rceil = \lfloor x \rfloor$.

11. La siguiente es una demostración incorrecta de $\lfloor n * x \rfloor = n * \lfloor x \rfloor$, con $n, k \in Int$, $0 < n$ y $x \in Num$. *a*) Hallar un contraejemplo a esta ecuación. *b*) Usando el contraejemplo del ítem anterior, hallar un k tal que un extremo de la "prueba" sea verdadero y el otro, falso. *c*) Encontrar el error en la prueba (justamente, donde cambia el valor de verdad).

$$
\begin{array}{ll}
 & k \le \lfloor n * x \rfloor \\
\equiv & \{ \text{ definición de piso } \} \\
 & k \le n * x \\
\equiv & \{ \text{ aritmética } \} \\
 & \frac{k}{n} \le x \\
\equiv & \{ \text{ definición de piso } \} \\
 & \frac{k}{n} \le \lfloor x \rfloor \\
\equiv & \{ \text{ aritmética } \} \\
 & k \le n * \lfloor x \rfloor
\end{array}
$$

Por lo tanto, por igualdad indirecta vale que $\lfloor n * x \rfloor = n * \lfloor x \rfloor$.

12. Ídem al ejercicio anterior. ($m, n, k \in Int$, $n \neq 0$)

$$
\begin{array}{ll}
 & \lceil \frac{m}{n} \rceil \le k \\
\equiv & \{ \text{ definición de techo } \} \\
 & \frac{m}{n} \le k \\
\equiv & \{ \text{ aritmética } \} \\
 & \frac{m}{n} < k + 1 \\
\equiv & \{ \text{ definición de piso, contrapositiva } \} \\
 & \lfloor \frac{m}{n} \rfloor < k + 1 \\
\equiv & \{ \text{ aritmética } \} \\
 & \lfloor \frac{m}{n} \rfloor \le k
\end{array}
$$

Por lo tanto, por igualdad indirecta vale que $\lfloor \frac{m}{n} \rfloor = \lceil \frac{m}{n} \rceil$.

13. *a*) Demostrar la siguiente *regla de desigualdad indirecta:*
   "$k \le a \Rightarrow k \le b$ para todo k del mismo tipo que a y b equivale a $a \le b$".

   b) Usarla para demostrar que para cualesquiera $a, b \in Num$, vale que $\lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor \le \lfloor a + b \rfloor$.

14. Probar las siguientes propiedades del Máximo, según la definición $p \,\text{máx}\, q \le k \equiv p \le k \wedge q \le k$ para todo k del mismo tipo que p, q.

   a) *Asociatividad:* $x \,\text{máx}(y \,\text{máx}\, z) = (x \,\text{máx}\, y) \,\text{máx}\, z$.

   b) *Conmutatividad:* $x \,\text{máx}\, y = y \,\text{máx}\, x$.

   c) *Idempotencia:* $x \,\text{máx}\, x = x$. (Notar que las tres primeras son propiedades de la conjunción)

   d) + *distribuye con respecto a* máx*:* $x + (y \,\text{máx}\, z) = (x + y) \,\text{máx}(x + z)$.

   e) *Mayorización:* $x \le x \,\text{máx}\, y$.

f) $x \operatorname{máx} y = x \vee x \operatorname{máx} y = y$. (Ayuda: usar *Antisimetría* $x = y \equiv x \geq y \wedge x \leq y$ en cada lado y el ítem anterior)

15. Demostrar las siguientes desigualdades, donde $|x| \doteq x \operatorname{máx}(-x)$:

    a) *Desigualdad triangular:* $|x| + |y| \geq |x + y|$.

    b) $|x| \geq 0$ (Ayuda: Tomar $y = -x$ en el ítem anterior).

    c) $(x + z) \operatorname{máx}(y + z) + (x - z) \operatorname{máx}(y - z) \geq x + y$.

16. *a*) Probar la siguiente relación entre el máximo y el techo: $\lceil x \rceil \operatorname{máx} \lceil y \rceil = \lceil x \operatorname{máx} y \rceil$.

    b) (*) Análogamente para máximo y piso: $\lfloor x \rfloor \operatorname{máx} \lfloor y \rfloor = \lfloor x \operatorname{máx} y \rfloor$.

17. (*) Demostrar $\lceil \frac{a}{b} \rceil = \lfloor \frac{a+b-1}{b} \rfloor$ con $a, b \in Nat$.
    Esta igualdad se utiliza en programación, pues todos los microprocesadores modernos pueden calcular el piso de la división entre enteros $\lfloor \frac{a}{b} \rfloor$, luego el cálculo del techo de una división se puede reducir a esta operación, evitando costosos cómputos en aritmética de punto flotante.

18. (**)[1] Decidir si las primeras cinco propiedades del ejercicio 14 implican la sexta.

[1]Sólo para osados... o masoquistas ("o" inclusivo, por supuesto).