Introducción a los Algoritmos
Cuantificador Universal (el “Para Todo”)

Pedro Sánchez Terraf

Enunciamos sin prueba el siguiente teorema:

Teorema 1 (Cambio de variable)**.** Si las variables i y j no son capturadas por ningún cuantificador de la expresión T, entonces

$$\langle \forall i \ : \ : \ T.i \rangle \equiv \langle \forall j \ : \ : \ T.j \rangle.$$

Para probar el próximo teorema necesitaremos un nuevo axioma.

A1 (Leibnitz para la Igualdad)**.** $x = y \Rightarrow (T.x \equiv T.y)$

Observación 1. Notar que la versión de este axioma para fórmulas proposicionales,

$$(p \equiv q) \Rightarrow (T.p \equiv T.q),$$

se puede demostrar usando cálculo proposicional, pero es bastante complicado.

Ejercicio 1. Demostrar la siguiente propiedad: $x = y \Rightarrow T.x \equiv x = y \Rightarrow T.y$.

Con estos elementos podemos demostrar:

Teorema 2 (Reenumeración)**.** Supongamos que i es una variable de tipo *Int*. Entonces

$$\langle \forall i \ : \ : \ T.(i+1) \rangle \equiv \langle \forall i \ : \ : \ T.i \rangle.$$

Demostración. Vamos a empezar eligiendo una variable j distinta a todas la que aparezcan en T para poder aplicar el teorema de *Cambio de Variable.*

$\quad \underline{\langle \forall i \ : \ : \ T.(i+1) \rangle}$

$\equiv$ { Cambio de Variable }

$\quad \langle \forall j \ : \ : \ \underline{T.(j+1)} \rangle$

$\equiv$ { Rango unitario }

$\quad$ . . . .

$\equiv$ { Intercambio entre Rango y Término }

$\quad \langle \forall j \ : \ : \ \langle \forall i \ : \ : \ \underline{i = j+1 \Rightarrow T.i} \rangle \rangle$

$\equiv$ { Ejercicio 1 }

$\quad \underline{\langle \forall j \ : \ : \ \langle \forall i \ : \ : \ i = j+1 \Rightarrow T.(j+1) \rangle \rangle}$

$\equiv$ { }

$\quad \langle \forall i \ : \ : \ \underline{\langle \forall j \ : \ : \ i = j+1 \Rightarrow T.(j+1) \rangle} \rangle$

$\equiv$ { Intercambio entre Rango y Término }

$\quad$ . . . .

$\equiv$ { Aritmética }

$\quad \langle \forall i \ : \ : \ \langle \forall j \ : \ j = i-1 \ : \ T.(j+1) \rangle \rangle$

$\equiv$ { }

$\quad \langle \forall i \ : \ : \ \underline{T.((i-1)+1)} \rangle$

$\equiv$ { Aritmética }

$\quad \langle \forall i \ : \ : \ T.i \rangle$

□

Ejercicio 2. ¿Funciona esta prueba si cambiamos “$i+1$” por “$i+2$”? ¿Y si ponemos “$i * 2$”?