Introducción a los Algoritmos

Expresiones Cuantificadas

Pedro Sánchez Terraf

En lógica clásica, los *silogismos* eran una forma muy importante de razonamiento.

$$\begin{array}{l}
\text{Todo mamífero es vertebrado.} \\
\text{Algunos mamíferos tienen cuatro patas.} \\
\hline
\text{Algunos vertebrados tienen cuatro patas.}
\end{array}$$

Este razonamiento se puede escribir semiformalmente de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l}
P_1 : \langle \forall x \, : \, m.x \, : \, v.x \rangle. \\
P_2 : \langle \exists x \, : \, m.x \, : \, p.x \rangle. \\
\hline
C : \langle \exists x \, : \, v.x \, : \, p.x \rangle.
\end{array}$$

Y es correcto si $P_1 \wedge P_2 \Rightarrow C$, igual que los razonamientos proposicionales. Para decidir si razonamientos de esta forma son correctos (y para otros ejercicios), el siguiente resultado puede ser de utilidad.

Teorema 1. Si $P \wedge Q \Rightarrow R$ es un teorema, entonces

$$\langle \forall i \, : \, : \, P \rangle \wedge \langle \exists i \, : \, : \, Q \rangle \Rightarrow \langle \exists i \, : \, : \, R \rangle.$$

Demostración. Nuestra estrategia va a ser trabajar sólo con $\exists$, de manera que usando proposicional nos vamos a sacar el "para todo" de $\langle \forall i \, : \, : \, P \rangle$ de encima.

$$\begin{array}{ll}
 & \langle \forall i : : P \rangle \wedge \langle \exists i : : Q \rangle \Rightarrow \langle \exists i : : R \rangle \\
\equiv & \{ \qquad \} \\
 & \langle \forall i : : P \rangle \Rightarrow (\langle \exists i : : Q \rangle \Rightarrow \langle \exists i : : R \rangle) \\
\equiv & \{ \qquad \} \\
 & \underline{\neg \langle \forall i : : P \rangle} \vee (\langle \exists i : : Q \rangle \Rightarrow \langle \exists i : : R \rangle) \\
\equiv & \{ \qquad \} \\
 & \langle \exists i : : \neg P \rangle \vee (\langle \exists i : : Q \rangle \Rightarrow \langle \exists i : : R \rangle)
\end{array}$$

En este punto ya tenemos una expresión sólo con $\exists$; como éste es compatible con la disyunción, hacemos aparecer algunas (y desaparecer $\Rightarrow$).

$$\begin{array}{ll}
 & \langle \exists i : : \neg P \rangle \vee (\underline{\langle \exists i : : Q \rangle \Rightarrow \langle \exists i : : R \rangle}) \\
\equiv & \{ \qquad \} \\
 & \langle \exists i : : \neg P \rangle \vee (\langle \exists i : : Q \rangle \vee \langle \exists i : : R \rangle \equiv \langle \exists i : : R \rangle) \\
\equiv & \{ \text{ Distr. } \vee, \equiv \ \} \\
 & \underline{\langle \exists i : : \neg P \rangle \vee \langle \exists i : : Q \rangle \vee \langle \exists i : : R \rangle} \equiv \underline{\langle \exists i : : \neg P \rangle \vee \langle \exists i : : R \rangle} \\
\equiv & \{ \qquad \} \\
 & \langle \exists i : : \neg P \vee Q \vee R \rangle \equiv \langle \exists i : : \neg P \vee R \rangle.
\end{array}$$

Lo mejor que podría pasarnos ahora es que $\neg P \vee Q \vee R \equiv \neg P \vee R$ sea un teorema. Esto es cierto, pero lo dejamos como un ejericicio a continuación. $\square$

Ejercicio 1. Demostrar que si $P \wedge Q \Rightarrow R$ es un teorema, entonces

$$\neg P \vee Q \vee R \equiv \neg P \vee R$$

también lo es.