

Introducción a los algoritmos - 1º cuatrimestre 2016

Axiomas y Teoremas del Cálculo Proposicional

Axiomas

A1 Asociatividad equivalencia:

$$((P \equiv Q) \equiv R) \equiv (P \equiv (Q \equiv R))$$

A2 Conmutatividad equivalencia:

$$P \equiv Q \equiv Q \equiv P$$

A3 Neutro equivalencia:

$$P \equiv \text{True} \equiv P$$

A4 Definición de Negación:

$$\neg(P \equiv Q) \equiv \neg P \equiv Q$$

A5 Definición de False:

$$\text{False} \equiv \neg \text{True}$$

A6 Definición de discrepancia:

$$P \neq Q \equiv \neg(P \equiv Q)$$

A7 Asociatividad disyunción:

$$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$$

A8 Conmutatividad disyunción:

$$P \vee Q \equiv Q \vee P$$

A9 Idempotencia disyunción:

$$P \vee P \equiv P$$

A10 Distributividad disyunción con equivalencia:

$$P \vee (Q \equiv R) \equiv (P \vee Q) \equiv (P \vee R)$$

A11 Tercero excluido:

$$P \vee \neg P$$

A12 Regla dorada:

$$P \wedge Q \equiv P \equiv Q \equiv P \vee Q$$

A13 Definición de implicación:

$$P \Rightarrow Q \equiv P \vee Q \equiv Q$$

A14 Definición de consecuencia:

$$P \Leftarrow Q \equiv P \vee Q \equiv P$$

Teoremas Básicos

T1 Metateorema de True:

Si P está demostrado, $P \equiv \text{True}$

T2 Doble negación:

$$\neg\neg P \equiv P$$

T3 Equivalencia y negación:

$$P \equiv \text{False} \equiv \neg P$$

T4 Elemento absorbente de la disyunción:

$$P \vee \text{True} \equiv \text{True}$$

T5 Elemento neutro de la disyunción:

$$P \vee \text{False} \equiv P$$

T6 Teorema (*):

$$P \vee Q \equiv P \vee \neg Q \equiv P$$

T7 Caracterización de implicación:

$$P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$$

Niveles de Precedencia

Los que están más arriba tienen mayor precedencia —“pegan más”, se ponen entre paréntesis primero, se aplican primero.

$E(x := a), \cdot$	sustitución y evaluación
$\sqrt{}, (\cdot)^2$	raíces y potencias
$*, /$	producto y división
máx, mín	máximo y mínimo
$+, -$	suma y resta
$=, \leq, \geq$	conectivos aritméticos
\neg	negación
$\vee \wedge$	disyunción y conjunción
$\Rightarrow \Leftarrow$	implicación y consecuencia
$\equiv \neq$	equivalencia y discrepancia

Los operadores que están en un mismo nivel tienen exactamente la misma prioridad, así que deben ponerse siempre con paréntesis, a menos que asocien entre sí (\vee y \wedge , \neq y \equiv , máx y mín).

Teoremas No Tan Básicos

T8 *De Morgan para la disyunción:*

$$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$$

T9 *De Morgan para la conjunción:*

$$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$$

T10 *Distributividad de la disyunción con la conjunción:*

$$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

T11 *Distributividad de la conjunción con la disyunción:*

$$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

T12 *Asociatividad de la conjunción:*

$$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$$

T13 *Conmutatividad de la conjunción:*

$$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$$

T14 *Idempotencia de la conjunción:*

$$P \wedge P \equiv P$$

T15 *Neutro de la conjunción:*

$$P \wedge \text{True} \equiv P$$

T16 *Elemento absorbente de la conjunción:*

$$P \wedge \text{False} \equiv \text{False}$$

T17 *Principio de no contradicción:*

$$P \wedge \neg P \equiv \text{False}$$

T18 *Ley de absorción:*

$$P \wedge (P \vee Q) \equiv P$$

T19 *Ley de absorción (bis):*

$$P \vee (P \wedge Q) \equiv P$$

Teoremas con Implicación

T20 *Modus ponens:*

$$P \wedge (P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$$

T21 *Modus ponens con equivalencia:*

$$P \wedge (P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge Q$$

T22 *Modus tollens:*

$$(P \Rightarrow Q) \wedge \neg Q \Rightarrow \neg P$$

T23 *Modus tollens con equivalencia:*

$$(P \Rightarrow Q) \wedge \neg Q \equiv \neg P \wedge \neg Q$$

T24 *Currificación:*

$$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \equiv (P \wedge Q \Rightarrow R)$$

T25 *Transitividad de \Rightarrow :*

$$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$$

T26 *Debilidad para \wedge :*

$$P \wedge Q \Rightarrow P$$

T27 *Debilidad para \vee :*

$$P \Rightarrow P \vee Q$$

T28 *Distributividad a derecha de la implicación con la conjunción:*

$$P \Rightarrow (Q \wedge R) \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R)$$

T29 *Distributividad a izquierda de la implicación con la disyunción:*

$$P \vee Q \Rightarrow R \equiv (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$$