Introducción a los Algoritmos

Estrategias de Prueba para Cálculo Proposicional

Pedro Sánchez Terraf

Recordemos sintéticamente una definición de *teorema* (que puede servirnos en la práctica pero es bastante imprecisa[1]):

1. Todo axioma es un teorema.

2. Si mediante las reglas muestro que una expresión booleana E es equivalente a un teorema, entonces E es un teorema.

Ejemplo 1. Como *True* es un teorema, si mediante las reglas llego de la expresión E a *True*, entonces E es un teorema.

Estrategias Básicas

Si quiero mostrar que una expresión de la forma $E \equiv F$ es un teorema, tengo tres opciones:

1. Salir de E y llegar a F con las reglas.

2. Tomar todo y llegar a un teorema (por ejemplo, cualquier axioma o *True*); o bien

3. Salir de E por un lado y de F por otro y llegar en ambos casos a la misma cosa.

Generalmente la primera opción da como resultado pruebas más cortas, y las otras requieren menos ingenio.

Estrategia "a lo bestia"

Una vez que decidimos cual de los tres caminos anteriores tomaremos para probar un teorema, podemos considerar un esquema en tres pasos: **Eliminar conectivos, Distribuir y Simplificar**.

1) Eliminar conectivos

Podemos ver la mayoría de los axiomas y algunos teoremas como definiciones de conectivos ($\not\equiv, \wedge, \Rightarrow, \Leftarrow$) en términos de los otros:

$$
\begin{array}{ll}
P \not\equiv Q \equiv \neg(P \equiv Q) & \textit{(Def. } \not\equiv\textit{)} \\
P \wedge Q \equiv P \equiv Q \equiv P \vee Q & \textit{(R. Dorada)} \\
P \Rightarrow Q \equiv P \vee Q \equiv Q & \textit{(Def. } \Rightarrow\textit{)} \\
P \Leftarrow Q \equiv P \vee Q \equiv P & \textit{(Def. } \Leftarrow\textit{)}
\end{array}
$$

Entonces, el primer paso consiste en "desplegar" estas definiciones de manera que obtengamos una expresión en la que sólo aparezcan $\equiv$, $\neg$ y $\vee$.

[1] Consultar el libro para la definición formal

2) Distribuir

Usando los siguientes axiomas, puedo distribuir negaciones y disyunciones dentro de $\equiv$:

$$\neg(P \equiv Q) \equiv \neg P \equiv Q \qquad \textit{(Def. }\neg\textit{)}$$
$$P \vee (Q \equiv R) \equiv (P \vee Q) \equiv (P \vee R) \qquad \textit{(Distr. }\vee\textit{ y }\equiv\textit{)}$$

3) Simplificar

Por último, usando los teoremas siguientes, podemos hacer varias simplificaciones:

$$\begin{array}{rl}
(P \equiv \mathit{True}) \equiv P & \quad \textit{(Neutro. }\equiv\textit{)} \\
(P \equiv P) \equiv \mathit{True} & \quad \textit{(Reflex. }\equiv\textit{)} \\
(P \equiv Q \equiv Q) \equiv P & \quad \textit{(Conmut. }\equiv\textit{)} \\
(P \vee P) \equiv P & \quad \textit{(Idemp. }\vee\textit{)} \\
(P \vee \neg P) \equiv \mathit{True} & \quad \textit{(Terc. Excl.)} \\
(\neg\neg P) \equiv P & \quad \textit{(Doble }\neg\textit{)} \\
(P \vee \mathit{True}) \equiv \mathit{True} & \quad \textit{(Abs. }\vee\textit{)} \\
(P \vee \mathit{False}) \equiv P & \quad \textit{(Neutro }\vee\textit{)} \\
(P \vee \neg Q) \equiv P \vee Q \equiv P & \quad \textit{(Teo. }(*)\textit{)}
\end{array}$$

En este caso, reemplazo la expresión entre paréntesis por el resto.