

Introducción a los Algoritmos

Cuantificador Universal (el “Para Todo”)

Pedro Sánchez Terraf

Introdujimos los siguientes axiomas del Cálculo de Predicados:

A1 (Rango *True*). $\langle \forall x :: f.x \rangle \equiv \langle \forall x : True : f.x \rangle$.

A2 (Regla del término). $\langle \forall x :: f.x \rangle \wedge \langle \forall x :: g.x \rangle \equiv \langle \forall x :: f.x \wedge g.x \rangle$.

A3 (Intercambio entre rango y término). $\langle \forall x : r.x : f.x \rangle \equiv \langle \forall x :: r.x \Rightarrow f.x \rangle$.

A4 (Rango unitario de \forall). $\langle \forall x : x = X : f.x \rangle \equiv f.X$, si toda variable de X es libre en $f.x$ (i.e., para toda variable que y que aparezca en X , ni $\forall y$ ni $\exists y$ aparecen en $f.x$).

Con ellos (y los axiomas y teoremas del Cálculo proposicional) ya estaríamos en condiciones de probar nuestro primer teorema:

T1 (Partición de rango). $\langle \forall x : r.x : f.x \rangle \wedge \langle \forall x : s.x : f.x \rangle \equiv \langle \forall x : r.x \vee s.x : f.x \rangle$

Para hacerlo, debemos llenar las partes incompletas. Recordemos que en este punto podemos usar todos los teoremas del Cálculo Proposicional cuyo nombre recordemos o demostremos por aparte.

$$\begin{aligned}
 & \langle \forall x : r.x : f.x \rangle \wedge \langle \forall x : s.x : f.x \rangle \\
 \equiv & \{ \text{Intercambio entre rango y término 2 veces} \} \\
 & \dots\dots\dots \\
 \equiv & \{ \dots\dots\dots \} \\
 & \langle \forall x :: \underline{(r.x \Rightarrow f.x) \wedge (s.x \Rightarrow f.x)} \rangle \\
 \equiv & \{ \text{Caracterización de } \Rightarrow \text{ dos veces} \} \\
 & \langle \forall x :: \underline{(\neg r.x \vee f.x) \wedge (\neg s.x \vee f.x)} \rangle \\
 \equiv & \{ \dots\dots\dots \} \\
 & \langle \forall x :: \underline{(\neg r.x \wedge \neg s.x) \vee f.x} \rangle \\
 \equiv & \{ \dots\dots\dots \} \\
 & \langle \forall x :: \underline{\neg(r.x \vee s.x) \vee f.x} \rangle \\
 \equiv & \{ \text{Caracterización de } \Rightarrow \} \\
 & \dots\dots\dots \\
 \equiv & \{ \dots\dots\dots \} \\
 & \langle \forall x : r.x \vee s.x : f.x \rangle
 \end{aligned}$$

Ejercicio. Llenar las partes incompletas.

$$\begin{aligned}
 & \langle \forall x : \underline{0 \leq x < 2} : x < 5 \rangle \\
 \equiv & \{ \text{Aritmética} \} \\
 & \dots\dots\dots \\
 \equiv & \{ \text{Partición de Rango} \} \\
 & \langle \forall x : x = 0 : x < 5 \rangle \wedge \langle \forall x : x = 1 : x < 5 \rangle \\
 \equiv & \{ \dots\dots\dots \text{ 2 veces} \} \\
 & 0 < 5 \wedge 1 < 5 \\
 \equiv & \{ \text{Aritmética} \} \\
 & True
 \end{aligned}$$