## Introducción a los Algoritmos - 1er. cuatrimestre 2015

# Guía 5: Semántica y Cálculo de Lógica de Predicados

*La lógica de predicados o lógica de primer orden es el sistema lógico estándar que formaliza el sistema deductivo natural. El objetivo general de esta guía es aprender a utilizar fórmulas con cuantificadores universales ($\forall$) y existenciales ($\exists$), tanto para interpretar su significado, como para utilizarlas para realizar demostraciones formales en este sistema lógico.*

---

### Interpretación y construcción de modelos en Lógica de Predicados

*La Lógica de Predicados cuenta con todos los operadores de la Lógica Proposicional ($\equiv$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, etcétera) e incorpora dos nuevos* ***operadores de cuantificación****. Por ejemplo, sea el predicado $T.x$, definido como*

$$T.x \doteq x \text{ es múltiplo de 3}$$

*el* ***cuantificador universal*** *$\forall$ permite expresar que todo $x$ es múltiplo de 3. Esto se denota por $\langle \forall x \; : \; : \; T.x \rangle$. El cuantificador universal indica que la propiedad es satisfecha por* todos *los valores de la variable. El* ***cuantificador existencial*** *$\exists$, expresa que la propiedad es satisfecha por* al menos un valor *de $x$. Por ejemplo $\langle \exists x \; : \; : \; T.x \rangle$ indica que existe un $x$ que es múltiplo de 3. El conjunto de valores sobre el que la propiedad expresada se evalúa se especifica en el* ***rango*** *de la fórmula. Mientras que la propiedad se expecifica en el* ***término****. El rango y el término se escriben en las siguientes ubicaciones:*

$$\langle \forall x \; : \; rango.x \; : \; termino.x \rangle \qquad \langle \exists x \; : \; rango.x \; : \; termino.x \rangle$$

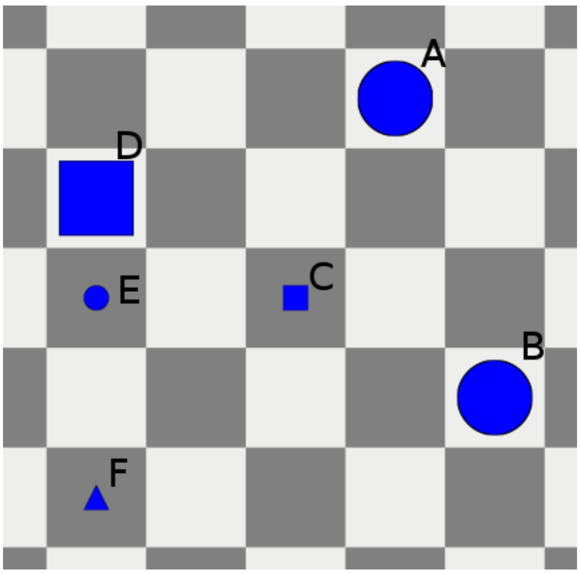
*Por ejemplo, el enunciado "Todos los naturales son enteros" se formaliza como:*

$$\langle \forall x \; : \; naturales.x \; : \; enteros.x \rangle$$

*el enunciado sólo se evalúa sobre el conjunto de naturales (y no de los reales, por ejemplo).*

*El objetivo de los siguientes ejercicios es clarificar el significado de los nuevos operadores de cuantificación, para lograr la capacidad de* leer *y* escribir *fórmulas que los involucran.*

1. Dado el siguiente mundo




decidí si las siguientes sentencias son satisfechas o no (y por qué). Por ejemplo, la sentencia "Hay un cuadrado grande" se satisface por el objeto D. Sin embargo, la frase "Todos los círculos son grandes", no se satisface a causa del círculo chico E.

*a*) F está entre D y E.

*b*) Todos los triángulos son chicos.

*c*) Existe (al menos) un cuadrado chico.

*d*) A está a la derecha de todo.

*e*) Nada está a la derecha de B.

Eliminá el triángulo F. ¿El inciso (b) se sigue satisfaciendo? ¿Por qué?

2. Construí un mundo en el que se satisfagan progresivamente cada una de las siguientes sentencias, utilizando cuadrados, círculos y triángulos, chicos o grandes.

   *a*) Algo es grande.

   *b*) Hay un cuadrado.

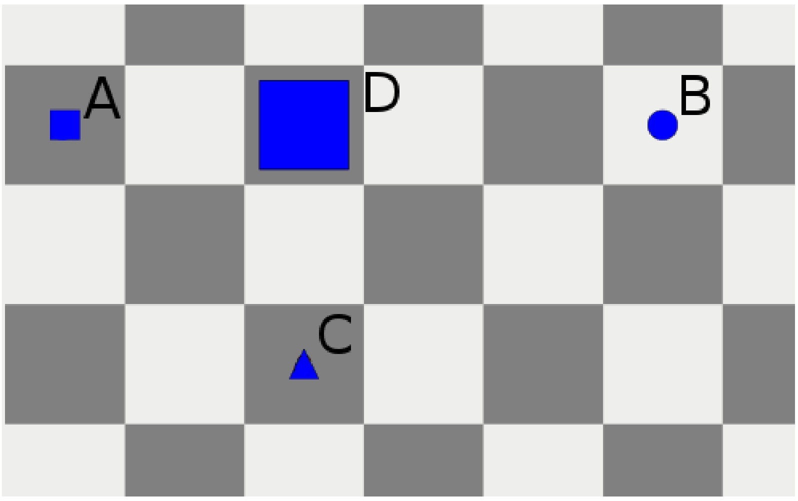
   *c*) Hay un cuadrado grande.

   *d*) Un cuadrado grande está a la izquierda de B.

   *e*) Algo que está a la izquierda de B está arriba de C.

   *f*) Algún círculo no es grande.

3. Utilizando `sat` construí el modelo que se muestra a continuación:




   Notá que todos los enunciados del ejercicio anterior se satisfacen en este mundo. Luego,

   *a*) Introducí tus formalizaciones de los enunciados y verificá que se satisfagan. Si no es así, te equivocaste en algo ¿podés encontrar donde está el error de la traducción?

   *b*) Mové el cuadrado grande a la esquina superior derecha del tablero. Observá que el enunciado $d$ no se satisface mientras que los restantes siguen valiendo. Verificá que lo mismo ocurra con tus formalizaciones.

   *c*) A partir del mundo original, mové $c$ hacia arriba por su propia columna hasta la fila superior y hacé grande a $b$. Ahora los enunciados $e$ y $f$ no se satisfacen. Verificá que lo mismo ocurra con tus formalizaciones.

4. Construí un único modelo como los de `sat`, en el que se satisfagan, simultáneamente, las siguientes propiedades

   *a*) $\langle \forall x : Circ.x : Rojo.x \equiv Grande.x \rangle$

   *b*) $\langle \exists x :: \langle \exists y : \neg(x = y) : Grande.x \equiv (\neg Rojo.y) \rangle \rangle$

   *c*) $\langle \forall x : \neg Circ.x : \langle \exists y :: Circ.y \wedge Rojo.y \rangle \rangle$

*d*) $\langle \forall x : Grande.x : \langle \forall y :: (\neg Rojo.y) \equiv Tr.y \rangle \rangle$

Para evitar confusiones, dar un dibujo del modelo, nombrando todos los elementos, y luedo indicar, para cada elemento qué propiedades (forma, color, tamaño) tiene. Ejemplo "$e_1$ es círculo, rojo, grande".

5. Construí un único modelo como los de `sat`, en el que se satisfagan, simultáneamente, las siguientes propiedades:

   *a*) $\langle \forall x : \neg Rojo.x \vee Tr.x : \langle \exists y : (x = y) : Grande.y \rangle \rangle$

   *b*) $\langle \exists x : Rojo.x : \langle \exists y :: Rojo.x \equiv \neg Rojo.y \rangle \rangle$

   *c*) $\langle \forall x : Cuad.x : \langle \exists y : \neg (x = y) : Tr.y \rangle \rangle$

   *d*) $\langle \forall x : Rojo.x : Cuad.x \wedge \langle \exists y :: Grande.x \rangle \rangle$

   Para evitar confusiones, dibujá el modelo nombrando cada figura, y luedo indicá las propiedades (forma, color, tamaño) que cada una tiene. Por ejemplo "$e_1$ es triángulo, rojo, grande".

---

**Interpretación y formalización de enunciados en lógica de predicados**

6. Expresá el significado de cada una de las siguientes fórmulas en lenguaje natural. Por ejemplo, en la fórmula

$$\langle \forall i \,:\, 0 \leqslant i < \#xs \,:\, xs\,!\,i = 0 \rangle$$

   debemos suponer que la variable $xs$ es de tipo lista, para que el tipado sea correcto. Las siguientes sentencias son todas traducciones de esta fórmula al lenguaje natural:

   "Todos los elementos de la lista $xs$ son ceros"
   "La lista $xs$ está compuesta únicamente por ceros"
   "La lista $xs$ no tiene otro valor que cero"...

   *a*) $\langle \forall x \,:\, x \in Num \,:\, \langle \exists y \,:\, y \in Int \,:\, x < y \rangle \rangle$

   *b*) $\langle \exists x \,:\, x \in Num \,:\, \langle \forall y \,:\, y \in Int \,:\, x < y \rangle \rangle$ ¿Es lo mismo que el anterior?

   *c*) $\langle \forall x, z \,:\, x, z \in Num \wedge x < z \,:\, \langle \exists y \,:\, y \in Num \,:\, x < y < z \rangle \rangle$.

   *d*) $\langle \forall p, q \,:\, 0 \leqslant p \wedge 0 \leqslant q \wedge p + q = \#xs - 1 \,:\, xs\,!\,p = xs\,!\,q \rangle$.

   *e*) $N \leqslant \#xs \wedge \langle \exists i \,:\, 0 \leqslant i < N \,:\, xs\,!\,i = 0 \rangle$

   *f*) $\langle \exists N \,:\, N \leqslant \#xs \,:\, \langle \forall i \,:\, 0 \leqslant i < N \,:\, xs\,!\,i \geqslant 0 \rangle \rangle$

   *g*) $\#xs = \#ys \Rightarrow \langle \exists i \,:\, 0 \leqslant i < \#xs \,\mathrm{mín}\, \#ys \,:\, xs\,!\,i \neq ys\,!\,i \rangle$.

7. Formalizá las siguientes sentencias escritas en lenguaje natural, utilizando cuantificadores y predicados arbitrarios para aquellas propiedades elementales. Por ejemplo, para la sentencia "Hay enteros pares" puede formalizarse con la fórmula:

$$\langle \exists x \,:\, entero.x \,:\, mod.x.2 = 0 \rangle$$

   *a*) Todo entero es par o impar.

   *b*) El producto de dos impares es impar.

   *c*) Dados dos números enteros positivos, existe un tercer entero tal que el primer entero multiplicado por el tercer entero es mayor que el segundo entero.

   *d*) $x$ está en la lista $xs$.

   *e*) La lista $xs$ consiste sólo de 0's y 1's.

   *f*) Si el 1 está en $xs$, entonces también el 0 está.

   *g*) Todos los elementos de $xs$ son iguales.

   *h*) Todos los elementos de la lista son distintos.

   *i*) La lista $xs$ es capicúa.

*j*) La lista $xs$ está ordenada de manera decreciente.

*k*) Las listas $xs$ e $ys$ tienen los mismos elementos.

*l*) Todos los elementos de $xs$ tienen al menos un elemento. ¿Cuál debe ser el tipo de $xs$?

---

**Demostraciones de lógica de predicados**

*En los siguientes ejercicios se deben hacer demostraciones en el Cálculo de Predicados, utilizando los axiomas y teoremas sobre cuantificadores, además de los axiomas y teoremas del Cálculo Proposicional que venimos utilizando.*

8. Evaluar las siguientes expresiones usando los axiomas de cuantificadores:

   *a*) $\langle \forall i \,:\, 0 \leqslant i < 3 \,:\, \mathit{mod}.([0,2,4,1]\,!\,i).2 = 0 \rangle$.

   *b*) $\langle \forall i \,:\, 0 \leqslant i < 4 \,:\, \mathit{mod}.([0,2,4,1]\,!\,i).2 = 0 \rangle$.

9. Justificar las respuestas de estos ejercicios usando los axiomas.

   *a*) Evaluar $\langle \forall i \,:\, 0 \leqslant i < 3 \,:\, \langle \forall j \,:\, 0 \leqslant j < 3 \,:\, [0,2,1]\,!\,i = [0,2,1]\,!\,j \rangle\rangle$.

   *b*) Decidir si la fórmula $\langle \forall i \,:\, 0 \leqslant i < 3 \,:\, \langle \forall j \,:\, 0 \leqslant j < 3 \,:\, xs\,!\,i = xs\,!\,j \rangle\rangle$ es satisfactible.

   *c*) Encontrar valores de $x$ e $y$ que satisfagan la siguiente fórmula:

   $$\langle \forall i \,:\, 0 \leqslant i < 4 \,:\, [0,x,2,y,6]\,!\,i < [0,x,2,y,6]\,!\,(i+1) \rangle.$$

10. Demostrá justificando cada paso los siguientes teoremas sobre el cuantificador existencial:

    *a*) *Regla del Término del* $\exists$*:* $\langle \exists x \,:\,:\, T.x \rangle \vee \langle \exists x \,:\,:\, U.x \rangle \equiv \langle \exists x \,:\,:\, T.x \vee U.x \rangle$.

    *b*) *Rango unitario:* $\langle \exists x \,:\, x = Y \,:\, T.x \rangle \equiv T.Y$, siempre que $Y$ no ocurra cuantificada en $T$.

    *c*) *Partición de rango para* $\exists$*:* $\langle \exists x \,:\, R.x \vee S.x \,:\, T.x \rangle \equiv \langle \exists x \,:\, R.x \,:\, T.x \rangle \vee \langle \exists x \,:\, S.x \,:\, T.x \rangle$.

    *d*) *Rango vacío:* $\langle \exists x \,:\, \mathit{False} \,:\, T.x \rangle \equiv \mathit{False}$.

11. Evaluar las siguientes expresiones usando los axiomas de cuantificadores y comparar con el ejercicio 8:

    *a*) $\langle \exists i \,:\, 0 \leqslant i < 3 \,:\, \mathit{mod}.([0,2,4,1]\,!\,i).2 = 1 \rangle$.

    *b*) $\langle \exists i \,:\, 0 \leqslant i < 4 \,:\, \mathit{mod}.([0,2,4,1]\,!\,i).2 = 1 \rangle$.

12. Sea $\mathit{elem} : A \to [A] \to \mathit{Bool}$ definida de la siguiente manera:

    $$\begin{array}{rcl} \mathit{elem}.y.[\,] & \doteq & \mathit{False} \\ \mathit{elem}.y.(x \triangleright xs) & \doteq & y = x \vee \mathit{elem}.y.xs \end{array}$$

    Describí con tus palabras qué hace esta función y evaluá las siguientes fórmulas, usando la definición de *elem* y las propiedades de los cuantificadores.

    *a*) $\langle \forall x \,:\, \mathit{elem}.x.[0,1,3] \,:\, x \leqslant 3 \rangle$.

    *b*) $\langle \exists x \,:\, \mathit{elem}.x.[0,1,3] \,:\, x \geqslant 3 \rangle$.

13. Demostrá justificando cada paso los siguientes teoremas sobre el cuantificador existencial:

    *a*) *Intercambio entre rango y término:* $\langle \exists x \,:\, R.x \,:\, T.x \rangle \equiv \langle \exists x \,:\,:\, R.x \wedge T.x \rangle$.

    *b*) *Intercambio de cuantificadores:* $\langle \exists x \,:\,:\, \langle \exists y \,:\,:\, T.x.y \rangle\rangle \equiv \langle \exists y \,:\,:\, \langle \exists x \,:\,:\, T.x.y \rangle\rangle$.

    *c*) *Testigo:* $T.Y \Rightarrow \langle \exists x \,:\,:\, T.x \rangle$, siempre que $Y$ no ocurra cuantificada en $T$.

    *d*) Enunciá y demostrá la propiedad de *Cambio de Variable* para el cuantificador existencial.

14. Demostrá que las siguientes fórmulas son válidas, justificando en cada paso el axioma o teorema del Cálculo de Predicados utilizado.

*a*) $\langle \forall x : \mathit{Circ}.x : \mathit{Grande}.x \rangle \equiv \langle \forall x : \neg \mathit{Grande}.x : \neg \mathit{Circ}.x \rangle$

*b*) $\langle \exists x : \mathit{Cuad}.x : \mathit{Chico}.x \rangle \Rightarrow \langle \exists x : : \mathit{Cuad}.x \rangle$

*c*) $\neg \langle \exists x : : \mathit{Tr}.x \rangle \Rightarrow \langle \forall x : \mathit{Tr}.x : \mathit{Rojo}.x \rangle$

*d*) $\langle \exists x : : \mathit{Cuad}.x \rangle \wedge \langle \forall y : : \mathit{Grande}.y \rangle \Rightarrow \langle \exists x : : \mathit{Cuad}.x \wedge \mathit{Grande}.x \rangle$

En todos los items anteriores, ¿es posible cambiar los predicados *Circ*, *Grande*, *Cuad*, etc. por predicados arbitrarios $R$, $T$, $S$, etc. manteniendo la validez de las fórmulas? Dicho de otro modo ¿la validez de las formulas anteriores depende de los predicados específicos *Circ*, *Grande*, *Cuad*, etc?

15. Decidí si cada una de las siguientes fórmulas es válida o no. En caso que una fórmula no sea válida, decidí si es satisfactible o no. En todos los casos justificá con una demostración, ejemplo o contraejemplo.

**Ayuda:** Podés usar `sat` para definir mundos que sirvan como ejemplo de satisfacción de una fórmula, o (contra)ejemplo de invalidez de una fórmula.

*a*) $\langle \forall x : \mathit{Cuad}.x : \mathit{Chico}.x \rangle \Rightarrow (\langle \forall x : : \mathit{Cuad}.x \rangle \Rightarrow \langle \forall x : : \mathit{Chico}.x \rangle)$

*b*) $\langle \forall x : \mathit{Cuad}.x : \mathit{Chico}.x \rangle \Leftarrow (\langle \forall x : : \mathit{Cuad}.x \rangle \Rightarrow \langle \forall x : : \mathit{Chico}.x \rangle)$

*c*) $\langle \exists x : \mathit{Tr}.x : \mathit{Grande}.x \rangle \wedge \langle \exists x : \mathit{Tr}.x : \mathit{Azul}.x \rangle \Rightarrow \langle \exists x : \mathit{Tr}.x : \mathit{Grande}.x \wedge \mathit{Azul}.x \rangle$

*d*) $\langle \exists x : \mathit{Tr}.x : \mathit{Grande}.x \rangle \wedge \langle \exists x : \mathit{Tr}.x : \mathit{Azul}.x \rangle \Leftarrow \langle \exists x : \mathit{Tr}.x : \mathit{Grande}.x \wedge \mathit{Azul}.x \rangle$

16. *a*) Expresá en tus propias palabras lo que significan las expresiones a cada lado de $\equiv$:

$$\langle \forall i : 0 \leqslant i < \#xs : xs\,!\,i < 0 \rangle \equiv (xs\,!\,0 < 0) \wedge \langle \forall i : 1 \leqslant i < \#xs : xs\,!\,i < 0 \rangle.$$

*b*) Probá que esta equivalencia es un teorema.

17. Probar:

$$\langle \forall i : 1 \leqslant i < \#(x \triangleright xs) : (x \triangleright xs)\,!\,i < 10 \rangle \equiv \langle \forall i : 0 \leqslant i < \#xs : xs\,!\,i < 10 \rangle.$$

**Ayuda**: Usar el Teorema de *Reenumeración*.

18. Usando la siguiente definición de $\mathit{todosMenores10} : [\mathit{Num}] \rightarrow \mathit{Bool}$

$$\begin{array}{rcl} \mathit{todosMenores10}.[\,] & \doteq & \mathit{True} \\ \mathit{todosMenores10}.(x \triangleright xs) & \doteq & x < 10 \wedge \mathit{todosMenores10}.xs, \end{array}$$

probá por inducción que

$$\mathit{todosMenores10}.xs \equiv \langle \forall i : 0 \leqslant i < \#xs : xs\,!\,i < 10 \rangle.$$

**Ayuda**: Aquí te serán útiles tus soluciones de los ejercicios 16 y 17.

19. Probar por inducción en $xs$:

$$\langle \forall x : \mathit{elem}.x.xs : T.x \rangle \equiv \langle \forall i : 0 \leqslant i < \#xs : T.(xs\,!\,i) \rangle.$$