

# Introducción a los Algoritmos – 2009

## Práctico 7

### Especificación utilizando Cuantificadores

1. Especificar funciones usando, en caso de ser necesario, expresiones cuantificadas.

- a)  $f$  es de tipo  $Num \rightarrow Num$ , y su valor al cuadrado da 1. **Solución:**  $\langle \forall x : x \in Num : (f.x)^2 = 1 \rangle$ .
- b)  $g$  es de tipo  $Num \rightarrow Num$ , y su valor al cubo da 1.
- c)  $h$  es de tipo  $Num \rightarrow Num$ , y su valor al cuadrado da -1.
- d) Considerando los ejercicios anteriores, hallar por lo menos dos ejemplos para  $f$  y un ejemplo para  $g$ . ¿Hay ejemplos que satisfagan la especificación de  $h$ ? ¿Hay más ejemplos para  $g$ ? ¿Cuántos ejemplos hay para  $f$ ?
- e)  $f$  es una función creciente con argumentos en  $Num$ .
- f)  $f$  es una función sobreyectiva de tipo  $A \rightarrow B$ .
- g)  $f$  es una función biyectiva de  $A$  en  $B$  (Ayuda: Definir función inyectiva y usar el ítem anterior).

2. Especificar las siguientes oraciones en lenguaje formal.

- a) Existe un único  $y$  tal que se da  $R.y$ .
- b) Para todo  $x$  hay un único  $y$  tal que su producto es diez.
- c) Existen dos números enteros menores a diez.  
(Notar: la respuesta **no es**  $\langle \exists x, y : x, y \in Int : x < 10 \wedge y < 10 \rangle$ ).
- d) Existen al menos dos números enteros menores a diez.
- e) Existen exactamente dos enteros menores a diez (Notar: la respuesta no es la misma que en el ítem anterior).
- f) La relación  $\cong$  es reflexiva, simétrica y transitiva. (Ayuda: es simétrica si  $\langle \forall x, y : x \cong y : y \cong x \rangle$ ).
- g)  $m$  es el menor valor que asume  $f : Num \rightarrow Num$ .
- h)  $x$  es el menor argumento de  $f : Num \rightarrow Num$  que la anula.
- i)  $m$  es el segundo menor valor que asume  $f : Num \rightarrow Num$ .
- j)  $\lfloor x \rfloor$  es el mayor entero menor o igual que  $x$ .
- k) (\*) La definición del límite:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ .
- l) (\*) Traducir todos los axiomas de cuerpo ordenado.

3. Especificaciones con listas.

- a)  $x$  está en la lista  $xs$ .
- b)  $x$  ocurre exactamente dos veces en  $xs$ .
- c) La lista  $xs$  consiste de 0's y 1's.
- d) Si el 1 está en  $xs$ , entonces también el 0 está.
- e) La lista  $xs$  contiene al menos un *true*.
- f) Si  $xs$  es no vacía, su primer elemento es 0.
- g) El último elemento de  $xs$  es 10.
- h) El primer elemento de  $xs$  es el último (Notar: hay dos interpretaciones posibles).
- i) Todos los elementos de  $xs$  son iguales (Notar: se puede hacer con un solo cuantificador).

- j) Las listas  $xs$  e  $ys$  tienen los mismos elementos.
- k) (Suponga aquí que  $xs \in [[A]]$ ). Todos los elementos de  $xs$  tienen al menos un elemento.
- l) La lista  $xs$  es capicúa.
- m)  $n$  es el menor entero par en  $xs$ .
- n)  $n$  es el menor entero tal que  $xs.n$  es par.
- $\tilde{n}$ ) El primer elemento de  $xs$  es el máximo.
- o)  $x$  es el segundo valor más grande de  $xs$  (Ejemplo: si  $xs = [3, 6, 1, 7, 6, 4, 7]$ , debe resultar  $x = 6$ ).
- p) La lista  $xs$  está ordenada de manera decreciente (Notar: se puede hacer con un solo cuantificador).
- q) Si  $xs$  es creciente, entonces el primer elemento es el menor.
- r) Todos los elementos de la lista son distintos.
- s) Hay un elemento de la lista  $xs$  que es mayor estricto a todos los otros.
- t)  $xs$  incluye todos los ceros de la función  $f$ .
- u)  $xs$  es un segmento de  $ys$ .
- v)  $xs$  e  $ys$  tienen un segmento no vacío en común.
- w) (\*)  $zs$  es el mayor segmento común entre  $xs$  e  $ys$ .

4. Expresar las siguientes especificaciones en lenguaje común:

- a)  $\langle \forall i : 0 \leq i < N \wedge N \leq \#xs : xs.i \geq 0 \rangle$ .
- b)  $\langle \exists i : 0 \leq i < N \wedge N \leq \#xs : xs.i = 0 \rangle$ .
- c)  $\langle \forall p, q : 0 \leq p \wedge 0 \leq q \wedge p + q = \#xs - 1 : xs.p = xs.q \rangle$ .
- d)  $\#xs = \#ys \Rightarrow \langle \exists i : 0 \leq i < \#xs \text{ mín } \#ys : xs.i \neq ys.i \rangle$ .
- e)  $\langle \forall x : x \in Num : \langle \exists y : y \in Int : x < y \rangle \rangle$ .
- f)  $\langle \exists x : x \in Num : \langle \forall y : y \in Int : x < y \rangle \rangle$  ¿Es lo mismo que lo anterior?
- g)  $\langle \forall x, z : x, z \in Num \wedge x \neq z : \langle \exists y : y \in Num : x < y < z \rangle \rangle$ .

5. Especificar las siguientes funciones:

- a)  $noNulos : [Num] \rightarrow Bool$   
 $noNulos.xs$  es *true* si y sólo si  $xs$  no contiene elementos nulos.
- b)  $meseta : [Num] \rightarrow Num \rightarrow Num \rightarrow Bool$   
 $meseta.xs.i.j$  determina si todos los valores de la lista  $xs$  que están entre los índices  $i$  y  $j$  (ambos incluidos) son iguales.
- c)  $g : Num \rightarrow [Num] \rightarrow Bool$   
 $g.k.xs$  determina si el  $k$ -ésimo elemento de  $xs$  aloja el máximo valor de  $xs$ .
- d) (\*)  $h : Num \rightarrow [Num] \rightarrow Bool$   
 $h.k.xs$  determina si el  $k$ -ésimo elemento de  $xs$  aloja la primera ocurrencia del máximo valor de  $xs$ .