Introducción a los Algoritmos – 2009

Práctico 8

Propiedades del cuantificador existencial

1. *Intercambio entre rango y término:* $(\exists x : r.x : f.x) \equiv (\exists x : : r.x \wedge f.x)$.
2. *Distributividad de $\wedge$ con $\exists$:* $X \wedge (\exists x : : f.x) \equiv (\exists x : : X \wedge f.x)$, siempre que x no ocurra en X.
3. *Distributividad de $\vee$ con $\exists$:* $(\exists x : : f.x) \vee (\exists x : : g.x) \equiv (\exists x : : f.x \vee g.x)$.
4. *Rango unitario:* $(\exists x : x = Y : f.x) \equiv f.Y$, tal que $\forall Y$ ni $\exists Y$ ocurran en $f.x$.
5. *Intercambio de cuantificadores:* $(\exists x : : (\exists y : : f.x.y)) \equiv (\exists y : : (\exists x : : f.x.y))$.
6. *Rango vacío:* $(\exists x : false : f.x) \equiv false$.
7. *Testigo:* $f.Y \Rightarrow (\exists x : : f.x)$, siempre que ni $\forall Y$ ni $\exists Y$ ocurran en $f.x$.
8. Probar la propiedad de *Cambio de Variable* para el cuantificador existencial.

Más demostraciones

9. $(\forall x : : P.x) \wedge X \equiv (\forall x : : P.x \wedge X)$, siempre que x no ocurra en X.
10. $(\forall x : R.x : T.x) \equiv (\forall x : \neg T.x : \neg R.x)$.
11. $(\exists x : R.x : P.x) \Rightarrow (\exists x : : R.x)$.
12. $\neg(\exists x : : R.x) \Rightarrow (\forall x : R.x : P.x)$.
13. $(\exists x : : P.x) \wedge (\forall x : : Q.x) \Rightarrow (\exists x : : P.x \wedge Q.x)$.
14. $(\forall x : (\exists y : : P.x.y) : Q.x) \equiv (\forall x, y : P.x.y : Q.x)$.
15. $(\exists x : P.x : Q.x) \wedge (\forall x : Q.x : R.x) \Rightarrow (\exists x : Q.x : P.x \wedge R.x)$.
16. $(\forall x : : P.x \equiv \neg Q.x) \Rightarrow ((\exists x : : P.x) \equiv \neg(\forall x : : Q.x))$.
17. $(\exists x : : P.x \Rightarrow Q.x) \equiv ((\forall x : : P.x) \Rightarrow (\exists x : : Q.x))$.
18. $((\exists x : : P.x) \Rightarrow (\forall x : : Q.x)) \Rightarrow (\forall x : P.x : Q.x)$.
19. $(\forall x : : T.x) \Rightarrow (\exists x : : T.x)$.
    Probar que **no es cierto** para un rango arbitrario, es decir, dar ejemplos de R y T tales que $(\forall x : R.x : T.x) \Rightarrow (\exists x : R.x : T.x)$ sea falso.
20. $(\forall x : R.x : T.x) \Rightarrow \big((\forall x : : R.x) \Rightarrow (\forall x : : T.x)\big)$.
    Dar un ejemplo que pruebe que el $\Rightarrow$ principal no puede ser reemplazado con $\equiv$. Es decir, pruebe que no es cierto que $(\forall x : R.x : T.x) \equiv \big((\forall x : : R.x) \Rightarrow (\forall x : : T.x)\big)$.
21. $(\forall x : R.x : T.x \equiv U.x) \Rightarrow \big((\forall x : R.x : T.x) \equiv (\forall x : R.x : U.x)\big)$.
22. $(\forall x : R.x : T.x) \vee (\forall x : R.x : U.x) \Rightarrow (\forall x : R.x : T.x \vee U.x)$.
23. Dar un ejemplo que pruebe que el $\Rightarrow$ no puede ser reemplazado con $\equiv$ en los ejercicios 21 y 22.

Análisis de Razonamientos usando Cálculo de Predicados

24. Probar que el razonamiento "Algún mamífero es ovíparo, por lo tanto algún ovíparo es mamífero", es válido, probando que $(\exists x : r.x : p.x) \Rightarrow (\exists x : p.x : r.x)$.

25. Probar que el razonamiento "Ningún hombre es un ángel, por lo tanto ningún ángel es un hombre", es válido.

26. Probar que el siguiente razonamiento es válido: "Si algunos unicornios no están en mi casa, entonces existe algún unicornio".

27. Probar que el razonamiento "No existe ningún unicornio, por lo tanto todo unicornio tiene dos cuernos" es válido.

28. *a*) Probar que $(\forall x : r.x : p.x) \Rightarrow (\forall x : r.x \wedge q.x : p.x \wedge q.x)$.
    b) Concluir que el siguiente razonamiento es válido: "Todo elefante es un animal, luego todo elefante gris es un animal gris".
    c) ¿Porqué no es válido el siguiente razonamiento, aparentemente igual al anterior: "Todo elefante es un animal, luego todo elefante pequeño es un animal pequeño"?

29. Probar que el siguiente razonamiento es válido: "Todos los políticos son corruptos y mentirosos. Existen políticos inútiles. Luego, existen corruptos inútiles".

30. (Lógica clásica silogística). Clásicamente, se llamaba una proposición de **tipo** A a las del tipo "Todo P es Q", de **tipo** E a las de la forma "Ningún P es Q", de **tipo** I a las de la forma "Algunos P son Q", y de **tipo** O a las de la forma "Algunos P no son Q". Convencerse de que la clasificación clásica es en nuestra notación:

$(\forall x : p.x : q.x)$	de tipo A	$\neg(\exists x : p.x : q.x)$	de tipo E
$(\exists x : p.x : q.x)$	de tipo I	$\neg(\forall x : p.x : q.x)$	de tipo O

31. Analizar los siguientes razonamientos:
    a) Todo aquel que tome cianuro, se morirá. La abuela no ha tomado cianuro, luego no morirá.
    b) Todos los artistas son ególatras, algunos artistas son indigentes, luego algunos indigentes son ególatras.
    c) Todos los anarquistas son partidarios de la fuerza y la violencia, todos los militaristas son partidarios de la fuerza y la violencia, luego todos los militaristas son anarquistas.
    d) Ningún ateo tiene fe en el Señor, pero todos los que tienen fe en el Señor son hombres sabios, por lo tanto, ningún ateo es un hombre sabio.
    e) Todo hombre es animal, ningún animal es capaz de foto-sintetizar, por lo tanto ningún hombre es capaz de foto-sintetizar.
    f) Todo hombre es mamífero, algunos animales no son mamíferos, por lo tanto algunos animales no son hombres.
    g) Ningún hombre tiene alas. Algunos seres alados son pájaros. Por lo tanto, algunos pájaros no son hombres.
    h) Ningún hombre tiene alas. Algunos seres alados son pájaros. Por lo tanto, ningún pájaro es hombre.
    i) Ningún hombre tiene alas. Algunos seres alados son mamíferos. Por lo tanto, ningún mamífero es hombre.
    j) Algunos hombres no son corruptos. Todos los políticos son corruptos. Por lo tanto, algunos hombres no son políticos.

32. Analizar los siguientes razonamientos, traduciendo cada paso a notación lógica, y descubrir el paso en el cual fallan, pero destacando aquellos pasos que están bien.

    a) "Ningún matemático ha logrado cuadrar el círculo. Luego, nadie que haya cuadrado el círculo es matemático. Por lo tanto, todos los que han cuadrado el círculo son no-matemáticos. Entonces, ciertamente, algunos de los que han cuadrado el circulo son no-matemáticos. Luego, algún no-matemático ha cuadrado el círculo."

    b) "Es verdad que ningún unicornio está en mi casa. Luego, es falso que todos los unicornios estén en mi casa. Por lo tanto, es verdad que algunos unicornios no están en mi casa. Con lo que concluimos que existe algún unicornio."

33. Demostrar los siguientes teoremas.

    a) Una relación R transitiva e irreflexiva es asimétrica:
    $[(\forall x, y, z : R.x.y \wedge R.y.z : R.x.z) \wedge (\forall x : : \neg R.x.x)] \Rightarrow (\forall x, y : R.x.y : \neg R.y.x)$.

    b) (*) $(\exists x : : P.x) \wedge (\forall x : P.x : P.(f.x)) \Rightarrow (\exists x : : P.(f.(f.x)))$ (recordar el ejercicio 15).

    c) $[(\forall x : : P.x.(f.x) \vee P.(f.x).x) \wedge (\forall x, y : P.x.y : P.(f.x).(f.y))] \Rightarrow (\forall x : : (\exists y : : P.(f.x).y))$.

    d) $[(\forall x : : (\exists y : : P.x.y \Rightarrow Q.x)) \wedge (\forall x, y : : P.x.y)] \Rightarrow (\forall x : : Q.x)$.