Introducción a la Lógica y la Computación

Mariana Badano   Héctor Gramaglia   Pedro Sánchez Terraf
M. Clara Gorín   Matías Steinberg

FaMAF, 7 de octubre de 2020

Contenidos estimados para hoy

1. Repaso
2. Semántica de la lógica proposicional
   - Asignaciones y valuaciones/semánticas
   - Teorema de Extensión
   - Abreviaciones: Conectivos nuevos
   - La relación de consecuencia y tautologías
   - Lema de Coincidencia
   - Tablas de verdad
3. Sustitución
   - La regla de Leibniz

Repaso

Tres componentes de la lógica

- Sintaxis: qué objetos usamos: proposiciones (= “fórmulas proposicionales”, “fórmulas”), cómo se escriben.

Repaso

Tres componentes de la lógica

- Sintaxis: qué objetos usamos: proposiciones (= "fórmulas proposicionales", "fórmulas"), cómo se escriben.
  - **Símbolos/variables proposicionales**: $\mathcal{V} := \{p_0, p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots\}$
  - **Conectivos**: $\bot, \wedge, \vee, \to$.
  - $At := \{\bot\} \cup \mathcal{V}$; $\Sigma := At \cup \{\,), (, \wedge, \vee, \to\}$; $\quad PROP \subseteq \Sigma^*$.

Repaso

Tres componentes de la lógica

- Sintaxis: qué objetos usamos: proposiciones (= "fórmulas proposicionales", "fórmulas"), cómo se escriben.
  - **Símbolos/variables proposicionales**: $\mathcal{V} := \{p_0, p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots\}$
  - **Conectivos**: $\bot, \wedge, \vee, \to$.
  - $At := \{\bot\} \cup \mathcal{V}$; $\Sigma := At \cup \{\,),(,\wedge,\vee,\to\}$; $PROP \subseteq \Sigma^*$.
- Semántica: cómo asignamos *significado* a las proposiciones: **valor de verdad**.
- Cálculo: cómo se **deducen** proposiciones a partir de otras y se obtienen **teoremas**.

Repaso

Tres componentes de la lógica

- Sintaxis: qué objetos usamos: proposiciones (= "fórmulas proposicionales", "fórmulas"), cómo se escriben.
  - **Símbolos/variables proposicionales**: $\mathcal{V} := \{p_0, p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots\}$
  - **Conectivos**: $\bot, \wedge, \vee, \rightarrow$.
  - $At := \{\bot\} \cup \mathcal{V}$; $\Sigma := At \cup \{\ ), (, \wedge, \vee, \rightarrow\}$; $\ PROP \subseteq \Sigma^*$.
- Semántica: cómo asignamos *significado* a las proposiciones: **valor de verdad**. Ahora
- Cálculo: cómo se **deducen** proposiciones a partir de otras y se obtienen **teoremas**. Después

Repaso

Tres componentes de la lógica

- Sintaxis: qué objetos usamos: proposiciones (= “fórmulas proposicionales”, “fórmulas”), cómo se escriben.
  - **Símbolos/variables proposicionales**: $\mathcal{V} := \{p_0, p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots\}$
  - **Conectivos**: $\bot, \wedge, \vee, \to$.
  - $At := \{\bot\} \cup \mathcal{V}$; $\Sigma := At \cup \{\ ), (, \wedge, \vee, \to\}$; $\boxed{PROP \subseteq \Sigma^*}$.
- Semántica: cómo asignamos *significado* a las proposiciones: **valor de verdad**. Ahora
- Cálculo: cómo se **deducen** proposiciones a partir de otras y se obtienen **teoremas**.

Asignaciones y valuaciones/semánticas

Nuestras proposiciones son sólo cadenas de símbolos.

Asignaciones y valuaciones/semánticas

Nuestras proposiciones son sólo cadenas de símbolos.
Para "interpretarlas", diremos para cada símbolo proposicional en $\mathscr{V}$ si es "falso" (valor 0) o "verdadero" (valor 1).

Asignaciones y valuaciones/semánticas

Nuestras proposiciones son sólo cadenas de símbolos.
Para "interpretarlas", diremos para cada símbolo proposicional en $\mathcal{V}$ si es "falso" (valor 0) o "verdadero" (valor 1).

Definición

Una **asignación** será una función $v : \{p_0, p_1, \ldots\} \to \{0, 1\}$.

Asignaciones y valuaciones/semánticas

Nuestras proposiciones son sólo cadenas de símbolos.
Para "interpretarlas", diremos para cada símbolo proposicional en $\mathcal{V}$ si es "falso" (valor 0) o "verdadero" (valor 1).

Definición

Una **asignación** será una función $v : \{p_0, p_1, \dots\} \to \{0, 1\}$.

Ahora podemos dar significado a todas las proposiciones.

Asignaciones y valuaciones/semánticas

Nuestras proposiciones son sólo cadenas de símbolos.
Para "interpretarlas", diremos para cada símbolo proposicional en $\mathcal{V}$ si es "falso" (valor 0) o "verdadero" (valor 1).

Definición

Una **asignación** será una función $v : \{p_0, p_1, \dots\} \to \{0, 1\}$.

Ahora podemos dar significado a todas las proposiciones.

Definición

Una función $[\![\cdot]\!] : PROP \to \{0, 1\}$ es una **semántica** o **valuación** si:

1. $[\![\bot]\!] = 0$.
2. $[\![(\varphi \wedge \psi)]\!] = \text{mín}\{[\![\varphi]\!], [\![\psi]\!]\}$.
3. $[\![(\varphi \vee \psi)]\!] = \text{máx}\{[\![\varphi]\!], [\![\psi]\!]\}$.
4. $[\![(\varphi \to \psi)]\!] = 0$ si y sólo si $[\![\varphi]\!] = 1$ y $[\![\psi]\!] = 0$.

Asignaciones y valuaciones/semánticas

Nuestras proposiciones son sólo cadenas de símbolos.
Para “interpretarlas”, diremos para cada símbolo proposicional en $\mathcal{V}$ si es “falso” (valor 0) o “verdadero” (valor 1).

Definición

Una **asignación** será una función $v : \{p_0, p_1, \dots\} \to \{0, 1\}$.

Ahora podemos dar significado a todas las proposiciones.

Definición

Una función $[\![\cdot]\!] : PROP \to \{0, 1\}$ es una **semántica** o **valuación** si:

1. $[\![\bot]\!] = 0$. $\longleftarrow$ $\longleftarrow$ Develado el misterio de $\bot$!!
2. $[\![(\varphi \wedge \psi)]\!] = \min\{[\![\varphi]\!], [\![\psi]\!]\}$.
3. $[\![(\varphi \vee \psi)]\!] = \max\{[\![\varphi]\!], [\![\psi]\!]\}$.
4. $[\![(\varphi \to \psi)]\!] = 0$ si y sólo si $[\![\varphi]\!] = 1$ y $[\![\psi]\!] = 0$.

Extensión de asignaciones

Teorema (de Extensión)

Para toda asignación f*, existe una única función semántica* $[\![\cdot]\!]_f$ *tal que* $[\![\varphi]\!]_f = f(\varphi)$ *para toda* $\varphi \in \mathcal{V}$*.*

Extensión de asignaciones

Teorema (de Extensión)

Para toda asignación f, existe una única función semántica $[\![\cdot]\!]_f$ tal que $[\![\varphi]\!]_f = f(\varphi)$ para toda $\varphi \in \mathcal{V}$.

Demostración.

Existencia: Construimos la semántica $[\![\cdot]\!]_f$ por recursión en subfórmulas.

$\boxed{\varphi \in At}$ $[\![p_n]\!]_f := f(p_n)$ para $n \in \mathbb{N}_0$ y $[\![\bot]\!]_f := 0$.

Extensión de asignaciones

Teorema (de Extensión)

Para toda asignación f, existe una única función semántica $[\![\cdot]\!]_f$ tal que $[\![\varphi]\!]_f = f(\varphi)$ para toda $\varphi \in \mathcal{V}$.

Demostración.

Existencia: Construimos la semántica $[\![\cdot]\!]_f$ por recursión en subfórmulas.

$\boxed{\varphi \in At}$ $[\![p_n]\!]_f := f(p_n)$ para $n \in \mathbb{N}_0$ y $[\![\bot]\!]_f := 0$.

$\boxed{(\varphi \wedge \psi)}$ $[\![(\varphi \wedge \psi)]\!]_f := \text{mín}\{[\![\varphi]\!]_f, [\![\psi]\!]_f\}$.

Extensión de asignaciones

Teorema (de Extensión)

Para toda asignación f, existe una única función semántica $[\![\cdot]\!]_f$ tal que $[\![\varphi]\!]_f = f(\varphi)$ para toda $\varphi \in \mathcal{V}$.

Demostración.

Existencia: Construimos la semántica $[\![\cdot]\!]_f$ por recursión en subfórmulas.

$\boxed{\varphi \in At}$ $[\![p_n]\!]_f := f(p_n)$ para $n \in \mathbb{N}_0$ y $[\![\bot]\!]_f := 0$.

$\boxed{(\varphi \wedge \psi)}$ $[\![(\varphi \wedge \psi)]\!]_f := \text{mín}\{[\![\varphi]\!]_f, [\![\psi]\!]_f\}$.

$\boxed{(\varphi \to \psi)}$ $[\![(\varphi \to \psi)]\!]_f := 0$ si $[\![\varphi]\!]_f = 1$ y $[\![\psi]\!]_f = 0$, y $[\![(\varphi \to \psi)]\!]_f := 1$ en caso contrario.

Extensión de asignaciones

Teorema (de Extensión)

Para toda asignación f, existe una única función semántica $[\![\cdot]\!]_f$ tal que $[\![\varphi]\!]_f = f(\varphi)$ para toda $\varphi \in \mathcal{V}$.

Demostración.

Existencia: Construimos la semántica $[\![\cdot]\!]_f$ por recursión en subfórmulas.

$\boxed{\varphi \in At}$ $[\![p_n]\!]_f := f(p_n)$ para $n \in \mathbb{N}_0$ y $[\![\perp]\!]_f := 0$.

$\boxed{(\varphi \wedge \psi)}$ $[\![(\varphi \wedge \psi)]\!]_f := \text{mín}\{[\![\varphi]\!]_f, [\![\psi]\!]_f\}$.

$\boxed{(\varphi \rightarrow \psi)}$ $[\![(\varphi \rightarrow \psi)]\!]_f := 0$ si $[\![\varphi]\!]_f = 1$ y $[\![\psi]\!]_f = 0$, y $[\![(\varphi \rightarrow \psi)]\!]_f := 1$ en caso contrario.

$\boxed{(\varphi \vee \psi)}$ $[\![(\varphi \vee \psi)]\!]_f := \text{máx}\{[\![\varphi]\!]_f, [\![\psi]\!]_f\}$.

Extensión de asignaciones

Teorema (de Extensión)

Para toda asignación f, existe una única función semántica $[\![\cdot]\!]_f$ tal que $[\![\varphi]\!]_f = f(\varphi)$ para toda $\varphi \in \mathcal{V}$.

Demostración.

Existencia: Construimos la semántica $[\![\cdot]\!]_f$ por recursión en subfórmulas.

$\boxed{\varphi \in At}$ $[\![p_n]\!]_f := f(p_n)$ para $n \in \mathbb{N}_0$ y $[\![\bot]\!]_f := 0$. H_{At}

$\boxed{(\varphi \wedge \psi)}$ $[\![(\varphi \wedge \psi)]\!]_f := \min\{[\![\varphi]\!]_f, [\![\psi]\!]_f\}$. $H_\wedge$

$\boxed{(\varphi \to \psi)}$ $[\![(\varphi \to \psi)]\!]_f := 0$ si $[\![\varphi]\!]_f = 1$ y $[\![\psi]\!]_f = 0$, y $[\![(\varphi \to \psi)]\!]_f := 1$ en caso contrario. $H_\to$

$\boxed{(\varphi \vee \psi)}$ $[\![(\varphi \vee \psi)]\!]_f := \max\{[\![\varphi]\!]_f, [\![\psi]\!]_f\}$. $H_\vee$

Extensión de asignaciones

Teorema (de Extensión)

Para toda asignación f, existe una única función semántica $[\![\cdot]\!]_f$ tal que $[\![\varphi]\!]_f = f(\varphi)$ para toda $\varphi \in \mathcal{V}$.

Demostración.

Unicidad:

Extensión de asignaciones

Teorema (de Extensión)

Para toda asignación f, existe una única función semántica $[\![\cdot]\!]_f$ tal que $[\![\varphi]\!]_f = f(\varphi)$ para toda $\varphi \in \mathcal{V}$.

Demostración.

Unicidad:

Por definición, una valuación debe cumplir con los casos inductivos de la definición recursiva anterior (las $H_{\odot}$).

Extensión de asignaciones

Teorema (de Extensión)

Para toda asignación f, existe una única función semántica $[\![\cdot]\!]_f$ tal que $[\![\varphi]\!]_f = f(\varphi)$ para toda $\varphi \in \mathcal{V}$.

Demostración.

Unicidad:
Por definición, una valuación debe cumplir con los casos inductivos de la definición recursiva anterior (las $H_\odot$).
Y el caso base (la H_{At}) está fijado por la hipótesis y la definición de valuación en $\perp$.

Extensión de asignaciones

Teorema (de Extensión)

Para toda asignación f, existe una única función semántica $[\![\cdot]\!]_f$ tal que $[\![\varphi]\!]_f = f(\varphi)$ para toda $\varphi \in \mathcal{V}$.

Demostración.

Unicidad:

Por definición, una valuación debe cumplir con los casos inductivos de la definición recursiva anterior (las $H_\odot$).

Y el caso base (la H_{At}) está fijado por la hipótesis y la definición de valuación en $\perp$.

Luego el Teorema de Recursión nos dice que hay a lo sumo una función que satisface todo esto.

Extensión de asignaciones

Teorema (de Extensión)

Para toda asignación f, existe una única función semántica $[\![\cdot]\!]_f$ tal que $[\![\varphi]\!]_f = f(\varphi)$ para toda $\varphi \in At$.

Extensión de asignaciones

Teorema (de Extensión)

Para toda asignación f*, existe una única función semántica* $[\![\cdot]\!]_f$ *tal que* $[\![\varphi]\!]_f = f(\varphi)$ *para toda* $\varphi \in At$.

Corolario

$[\![\varphi]\!]_1 = [\![\varphi]\!]_2$ *para toda* $\varphi \in At \implies [\![\varphi]\!]_1 = [\![\varphi]\!]_2$ *para toda* $\varphi \in PROP$.

Extensión de asignaciones

Teorema (de Extensión)

Para toda asignación f*, existe una única función semántica* $[\![\cdot]\!]_f$ *tal que* $[\![\varphi]\!]_f = f(\varphi)$ *para toda* $\varphi \in At$.

Corolario

$[\![\varphi]\!]_1 = [\![\varphi]\!]_2$ *para toda* $\varphi \in At \implies [\![\varphi]\!]_1 = [\![\varphi]\!]_2$ *para toda* $\varphi \in PROP$.

Demostración.

Por la unicidad en el Teorema de Extensión

Extensión de asignaciones

Teorema (de Extensión)

Para toda asignación f, existe una única función semántica $[\![\cdot]\!]_f$ tal que $[\![\varphi]\!]_f = f(\varphi)$ para toda $\varphi \in At$.

Corolario

$[\![\varphi]\!]_1 = [\![\varphi]\!]_2$ *para toda* $\varphi \in At \implies [\![\varphi]\!]_1 = [\![\varphi]\!]_2$ *para toda* $\varphi \in PROP$.

Demostración.

Por la unicidad en el Teorema de Extensión: ambas valuaciones son extensiones de la misma asignación $[\![\cdot]\!]_1 \restriction \mathcal{V} = [\![\cdot]\!]_2 \restriction \mathcal{V}$.

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Conectivos nuevos

Introducimos nueva notación.

Conectivos nuevos

Introducimos nueva notación.

Abreviaturas

- $(\neg\varphi)$ denotará $(\varphi \to \bot)$.
- $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ denotará $((\varphi \to \psi) \land (\psi \to \varphi))$.

Conectivos nuevos

Introducimos nueva notación.

Abreviaturas

- $(\neg\varphi)$ denotará $(\varphi \to \perp)$.
- $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ denotará $((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi))$.

Ejercicio

Para toda valuación $[\![\cdot]\!]$:

1. $[\![(\neg\varphi)]\!] = 1 - [\![\varphi]\!]$.
2. $[\![(\varphi \leftrightarrow \psi)]\!] = 1 \iff [\![\varphi]\!] = [\![\psi]\!]$.

La relación de consecuencia y tautologías

Sea $\Gamma \subseteq PROP$ y v una asignación.

Sea $\Gamma \subseteq PROP$ y v una asignación.

Definición

- v **valida** $\Gamma \iff$ para toda $\psi \in \Gamma$, $[\![\psi]\!]_v = 1$.

La relación de consecuencia y tautologías

Sea $\Gamma \subseteq PROP$ y v una asignación.

Definición

- v **valida** $\Gamma \iff$ para toda $\psi \in \Gamma$, $[\![\psi]\!]_v = 1$. (**notación**: $[\![\Gamma]\!]_v = 1$)

Sea $\Gamma \subseteq PROP$ y v una asignación.

Definición

- v **valida** $\Gamma \iff$ para toda $\psi \in \Gamma$, $[\![\psi]\!]_v = 1$. (**notación**: $[\![\Gamma]\!]_v = 1$)
- φ es **consecuencia** de $\Gamma \iff$ toda asignación v que valida Γ hace verdadera a φ:
$$[\![\Gamma]\!]_v = 1 \implies [\![\varphi]\!]_v = 1$$

La relación de consecuencia y tautologías

Sea $\Gamma \subseteq PROP$ y v una asignación.

Definición

- v **valida** $\Gamma \iff$ para toda $\psi \in \Gamma$, $[\![\psi]\!]_v = 1$. (**notación**: $[\![\Gamma]\!]_v = 1$)
- φ es **consecuencia** de $\Gamma \iff$ toda asignación v que valida Γ hace verdadera a φ:

$$[\![\Gamma]\!]_v = 1 \implies [\![\varphi]\!]_v = 1$$

(**notación**: $\Gamma \models \varphi$)

La relación de consecuencia y tautologías

Sea $\Gamma \subseteq PROP$ y v una asignación.

Definición

- v **valida** $\Gamma \iff$ para toda $\psi \in \Gamma$, $[\![\psi]\!]_v = 1$. (**notación**: $[\![\Gamma]\!]_v = 1$)
- φ es **consecuencia** de $\Gamma \iff$ toda asignación v que valida Γ hace verdadera a φ:

$$[\![\Gamma]\!]_v = 1 \implies [\![\varphi]\!]_v = 1$$

  (**notación**: $\Gamma \models \varphi$)
- φ es una **tautología** $\iff [\![\varphi]\!]_v = 1$ para toda asignación v.

La relación de consecuencia y tautologías

Sea $\Gamma \subseteq PROP$ y v una asignación.

Definición

- v **valida** $\Gamma \iff$ para toda $\psi \in \Gamma$, $[\![\psi]\!]_v = 1$. (**notación**: $[\![\Gamma]\!]_v = 1$)
- φ es **consecuencia** de $\Gamma \iff$ toda asignación v que valida Γ hace verdadera a φ:

  $$[\![\Gamma]\!]_v = 1 \implies [\![\varphi]\!]_v = 1$$

  (**notación**: $\Gamma \models \varphi$)
- φ es una **tautología** $\iff$ $[\![\varphi]\!]_v = 1$ para toda asignación v. (**notación**: $\models \varphi$)

La relación de consecuencia y tautologías

Sea $\Gamma \subseteq PROP$ y v una asignación.

Definición

- v **valida** $\Gamma \iff$ para toda $\psi \in \Gamma$, $[\![\psi]\!]_v = 1$. (**notación**: $[\![\Gamma]\!]_v = 1$)
- φ es **consecuencia** de $\Gamma \iff$ toda asignación v que valida Γ hace verdadera a φ:
$$[\![\Gamma]\!]_v = 1 \implies [\![\varphi]\!]_v = 1$$
(**notación**: $\Gamma \models \varphi$)
- φ es una **tautología** $\iff$ $[\![\varphi]\!]_v = 1$ para toda asignación v. (**notación**: $\models \varphi$)

Ejercicio

$\models \varphi \iff \emptyset \models \varphi$.

Ejemplos

1. $\models (\varphi \to \varphi)$.

Ejemplos

1. $\models (\varphi \to \varphi)$.
   Tenemos que ver que para toda asignación v, $[\![(\varphi \to \varphi)]\!]_v = 1$.

Ejemplos

1. $\models (\varphi \to \varphi)$.
   Tenemos que ver que para toda asignación v, $[\![(\varphi \to \varphi)]\!]_v = 1$.
   Equivalentemente, $[\![(\varphi \to \varphi)]\!]_v \neq 0$.

Ejemplos

1. $\models (\varphi \to \varphi)$.
   Tenemos que ver que para toda asignación v, $[\![(\varphi \to \varphi)]\!]_v = 1$.
   Equivalentemente, $[\![(\varphi \to \varphi)]\!]_v \neq 0$.
2. $\models ((\neg(\neg\varphi)) \to \varphi)$ (Ejercicio).

Ejemplos

1. $\models (\varphi \to \varphi)$.
   Tenemos que ver que para toda asignación v, $[\![(\varphi \to \varphi)]\!]_v = 1$.
   Equivalentemente, $[\![(\varphi \to \varphi)]\!]_v \neq 0$.
2. $\models ((\neg(\neg\varphi)) \to \varphi)$ (Ejercicio).
3. $\{\varphi, (\varphi \to \psi)\} \models \psi$.

Ejemplos

1. $\models (\varphi \to \varphi)$.
   Tenemos que ver que para toda asignación v, $[\![(\varphi \to \varphi)]\!]_v = 1$.
   Equivalentemente, $[\![(\varphi \to \varphi)]\!]_v \neq 0$.
2. $\models ((\neg(\neg\varphi)) \to \varphi)$ (Ejercicio).
3. $\{\varphi, (\varphi \to \psi)\} \models \psi$.
   Debemos ver que si v valida $\{\varphi, (\varphi \to \psi)\}$, entonces $[\![\psi]\!]_v = 1$

Ejemplos

1. $\models (\varphi \to \varphi)$.
   Tenemos que ver que para toda asignación v, $[\![(\varphi \to \varphi)]\!]_v = 1$.
   Equivalentemente, $[\![(\varphi \to \varphi)]\!]_v \neq 0$.
2. $\models ((\neg(\neg\varphi)) \to \varphi)$ (Ejercicio).
3. $\{\varphi, (\varphi \to \psi)\} \models \psi$.
   Debemos ver que si v valida $\{\varphi, (\varphi \to \psi)\}$, entonces $[\![\psi]\!]_v = 1$:

$$[\![\varphi]\!]_v = [\![(\varphi \to \psi)]\!]_v = 1 \implies [\![\psi]\!]_v = 1.$$

Ejemplos

1. $\models (\varphi \to \varphi)$.
   Tenemos que ver que para toda asignación v, $[\![(\varphi \to \varphi)]\!]_v = 1$.
   Equivalentemente, $[\![(\varphi \to \varphi)]\!]_v \neq 0$.
2. $\models ((\neg(\neg\varphi)) \to \varphi)$ (Ejercicio).
3. $\{\varphi, (\varphi \to \psi)\} \models \psi$.
   Debemos ver que si v valida $\{\varphi, (\varphi \to \psi)\}$, entonces $[\![\psi]\!]_v = 1$:

$$[\![\varphi]\!]_v = [\![(\varphi \to \psi)]\!]_v = 1 \implies [\![\psi]\!]_v = 1.$$

4. $\not\models p_1$

Ejemplos

1. $\models (\varphi \to \varphi)$.
   Tenemos que ver que para toda asignación v, $[\![(\varphi \to \varphi)]\!]_v = 1$.
   Equivalentemente, $[\![(\varphi \to \varphi)]\!]_v \neq 0$.
2. $\models ((\neg(\neg\varphi)) \to \varphi)$ (Ejercicio).
3. $\{\varphi, (\varphi \to \psi)\} \models \psi$.
   Debemos ver que si v valida $\{\varphi, (\varphi \to \psi)\}$, entonces $[\![\psi]\!]_v = 1$:

$$[\![\varphi]\!]_v = [\![(\varphi \to \psi)]\!]_v = 1 \implies [\![\psi]\!]_v = 1.$$

4. $\not\models p_1$
   Sale negando la definición

Ejemplos

1. $\models (\varphi \to \varphi)$.
   Tenemos que ver que para toda asignación v, $[\![(\varphi \to \varphi)]\!]_v = 1$.
   Equivalentemente, $[\![(\varphi \to \varphi)]\!]_v \neq 0$.
2. $\models ((\neg(\neg\varphi)) \to \varphi)$ (Ejercicio).
3. $\{\varphi, (\varphi \to \psi)\} \models \psi$.
   Debemos ver que si v valida $\{\varphi, (\varphi \to \psi)\}$, entonces $[\![\psi]\!]_v = 1$:
   $$[\![\varphi]\!]_v = [\![(\varphi \to \psi)]\!]_v = 1 \implies [\![\psi]\!]_v = 1.$$
4. $\not\models p_1$
   Sale negando la definición:
   p_1 no es una tautología $\iff$ existe alguna v tal que $[\![p_1]\!]_v = 0$.

Lema de Coincidencia

La verdad de una proposición se determina localmente.

Lema de Coincidencia

La verdad de una proposición se determina localmente.

Lema (de Coincidencia)

Si $v(p_i) = v'(p_i)$ *para todos los* p_i *que ocurran en* φ*, entonces* $[\![\varphi]\!]_v = [\![\varphi]\!]_{v'}$*.*

Lema de Coincidencia

La verdad de una proposición se determina localmente.

Lema (de Coincidencia)

Si $v(p_i) = v'(p_i)$ *para todos los* p_i *que ocurran en* φ*, entonces* $[\![\varphi]\!]_v = [\![\varphi]\!]_{v'}$*.*

Demostración.

$\boxed{\varphi \in At}$ Si $\varphi = p_n$, sólo ocurre p_n en φ.

Lema de Coincidencia

La verdad de una proposición se determina localmente.

Lema (de Coincidencia)

Si $v(p_i) = v'(p_i)$ *para todos los* p_i *que ocurran en* φ*, entonces* $[\![\varphi]\!]_v = [\![\varphi]\!]_{v'}$*.*

Demostración.

$\boxed{\varphi \in At}$ Si $\varphi = p_n$, sólo ocurre p_n en φ. Luego $[\![\varphi]\!]_v = v(\varphi) = v'(\varphi) = [\![\varphi]\!]_{v'}$.

Lema de Coincidencia

La verdad de una proposición se determina localmente.

Lema (de Coincidencia)

Si $v(p_i) = v'(p_i)$ *para todos los* p_i *que ocurran en* φ*, entonces* $[\![\varphi]\!]_v = [\![\varphi]\!]_{v'}$*.*

Demostración.

$\boxed{\varphi \in At}$ Si $\varphi = p_n$, sólo ocurre p_n en φ. Luego $[\![\varphi]\!]_v = v(\varphi) = v'(\varphi) = [\![\varphi]\!]_{v'}$. Además, $[\![\bot]\!]_v = [\![\bot]\!]_{v'} = 0$ siempre.

Lema de Coincidencia

La verdad de una proposición se determina localmente.

Lema (de Coincidencia)

Si $v(p_i) = v'(p_i)$ *para todos los* p_i *que ocurran en* φ*, entonces* $[\![\varphi]\!]_v = [\![\varphi]\!]_{v'}$*.*

Demostración.

$\boxed{\varphi \in At}$ Si $\varphi = p_n$, sólo ocurre p_n en φ. Luego $[\![\varphi]\!]_v = v(\varphi) = v'(\varphi) = [\![\varphi]\!]_{v'}$. Además, $[\![\bot]\!]_v = [\![\bot]\!]_{v'} = 0$ siempre.

$\boxed{(\varphi \wedge \psi)}$ Supongamos que v y v' coinciden en los átomos de $(\varphi \wedge \psi)$

Lema de Coincidencia

La verdad de una proposición se determina localmente.

Lema (de Coincidencia)

Si $v(p_i) = v'(p_i)$ para todos los p_i que ocurran en φ, entonces $[\![\varphi]\!]_v = [\![\varphi]\!]_{v'}$.

Demostración.

$\boxed{\varphi \in At}$ Si $\varphi = p_n$, sólo ocurre p_n en φ. Luego $[\![\varphi]\!]_v = v(\varphi) = v'(\varphi) = [\![\varphi]\!]_{v'}$. Además, $[\![\bot]\!]_v = [\![\bot]\!]_{v'} = 0$ siempre.

$\boxed{(\varphi \wedge \psi)}$ Supongamos que v y v' coinciden en los átomos de $(\varphi \wedge \psi)$

Probamos que $[\![(\varphi \wedge \psi)]\!]_v = [\![(\varphi \wedge \psi)]\!]_{v'}$.

Lema de Coincidencia

La verdad de una proposición se determina localmente.

Lema (de Coincidencia)

Si $v(p_i) = v'(p_i)$ para todos los p_i que ocurran en φ, entonces $[\![\varphi]\!]_v = [\![\varphi]\!]_{v'}$.

Demostración.

$\boxed{\varphi \in At}$ Si $\varphi = p_n$, sólo ocurre p_n en φ. Luego $[\![\varphi]\!]_v = v(\varphi) = v'(\varphi) = [\![\varphi]\!]_{v'}$. Además, $[\![\bot]\!]_v = [\![\bot]\!]_{v'} = 0$ siempre.

$\boxed{(\varphi \wedge \psi)}$ Supongamos que v y v' coinciden en los átomos de $(\varphi \wedge \psi)$

Probamos que $[\![(\varphi \wedge \psi)]\!]_v = [\![(\varphi \wedge \psi)]\!]_{v'}$.

$\boxed{(\varphi \odot \psi)}$ El resto de los casos queda como ejercicio.

Tablas de verdad

Recordemos que una asignación es una función de $\mathcal{V} = \{p_0, p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots\}$ en $\{0, 1\}$.

Tablas de verdad

Recordemos que una asignación es una función de $\mathcal{V} = \{p_0, p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots\}$ en $\{0, 1\}$.

Pregunta

¿Cuántas asignaciones posibles hay?

Tablas de verdad

Recordemos que una asignación es una función de $\mathcal{V} = \{p_0, p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots\}$ en $\{0, 1\}$.

Pregunta

¿Cuántas asignaciones posibles hay? $\longrightarrow$ Actividad en Aula virtual!

Tablas de verdad

Recordemos que una asignación es una función de $\mathcal{V} = \{p_0, p_1, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots\}$ en $\{0, 1\}$.

Pregunta

¿Cuántas asignaciones posibles hay? $\longrightarrow$ Actividad en Aula virtual!

Demasiadas.

Tablas de verdad

Recordemos que una asignación es una función de
$\mathcal{V} = \{p_0, p_1, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots\}$ en $\{0, 1\}$.

Pregunta

¿Cuántas asignaciones posibles hay? $\longrightarrow$ Actividad en Aula virtual!

Demasiadas.
¿Hay que chequear todas para saber si $\models ((p_0 \wedge p_2) \rightarrow p_2)$?

Tablas de verdad

Recordemos que una asignación es una función de
$\mathcal{V} = \{p_0, p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots\}$ en $\{0, 1\}$.

Pregunta

¿Cuántas asignaciones posibles hay? $\longrightarrow$ Actividad en Aula virtual!

Demasiadas.
¿Hay que chequear todas para saber si $\models ((p_0 \wedge p_2) \rightarrow p_2)$?
Por el Lema de Coincidencia, no.

Tablas de verdad

	p_0	p_1	p_2	p_3	$\dots$
v_1	1	0	1	1	$\dots$

Tablas de verdad

	p_0	p_1	p_2	p_3	$\dots$
v_1	1	0	1	1	$\dots$
v_2	1	1	0	1	$\dots$

Tablas de verdad

	p_0	p_1	p_2	p_3	$\dots$
v_1	1	0	1	1	$\dots$
v_2	1	1	0	1	$\dots$
v_3	1	0	1	0	$\dots$

Tablas de verdad

	p_0	p_1	p_2	p_3	$\dots$
v_1	1	0	1	1	$\dots$
v_2	1	1	0	1	$\dots$
v_3	1	0	1	0	$\dots$
v_4	0	0	1	1	$\dots$

Tablas de verdad

	p_0	p_1	p_2	p_3	$\dots$
v_1	1	0	1	1	$\dots$
v_2	1	1	0	1	$\dots$
v_3	1	0	1	0	$\dots$
v_4	0	0	1	1	$\dots$
v_5	0	1	0	0	$\dots$

Tablas de verdad

	p_0	p_1	p_2	p_3	$\dots$
v_1	1	0	1	1	$\dots$
v_2	1	1	0	1	$\dots$
v_3	1	0	1	0	$\dots$
v_4	0	0	1	1	$\dots$
v_5	0	1	0	0	$\dots$
$\vdots$			$\vdots$		$\ddots$

Tablas de verdad

	p_0	p_1	p_2	p_3	$\ldots$	$(p_0 \wedge p_2)$	$((p_0 \wedge p_2) \rightarrow p_2)$
v_1	1	0	1	1	$\ldots$		
v_2	1	1	0	1	$\ldots$		
v_3	1	0	1	0	$\ldots$		
v_4	0	0	1	1	$\ldots$		
v_5	0	1	0	0	$\ldots$		
$\vdots$			$\vdots$		$\ddots$		

Tablas de verdad

	p_0	p_1	p_2	p_3	$\dots$	$(p_0 \wedge p_2)$	$((p_0 \wedge p_2) \to p_2)$
v_1	1	0	1	1	$\dots$	1	1
v_2	1	1	0	1	$\dots$		
v_3	1	0	1	0	$\dots$		
v_4	0	0	1	1	$\dots$		
v_5	0	1	0	0	$\dots$		
$\vdots$			$\vdots$		$\ddots$		

Tablas de verdad

	p_0	p_1	p_2	p_3	$\ldots$	$(p_0 \wedge p_2)$	$((p_0 \wedge p_2) \to p_2)$
v_1	1	0	1	1	$\ldots$	1	1
v_2	1	1	0	1	$\ldots$	0	1
v_3	1	0	1	0	$\ldots$		
v_4	0	0	1	1	$\ldots$		
v_5	0	1	0	0	$\ldots$		
$\vdots$			$\vdots$		$\ddots$		

Tablas de verdad

	p_0	p_1	p_2	p_3	$\dots$	$(p_0 \wedge p_2)$	$((p_0 \wedge p_2) \to p_2)$
v_1	1	0	1	1	$\dots$	1	1
v_2	1	1	0	1	$\dots$	0	1
v_3	1	0	1	0	$\dots$	1	1
v_4	0	0	1	1	$\dots$		
v_5	0	1	0	0	$\dots$		
$\vdots$			$\vdots$		$\ddots$		

Tablas de verdad

	p_0	p_1	p_2	p_3	$\dots$	$(p_0 \wedge p_2)$	$((p_0 \wedge p_2) \to p_2)$
v_1	1	0	1	1	$\dots$	1	1
v_2	1	1	0	1	$\dots$	0	1
v_3	1	0	1	0	$\dots$	1	1
v_4	0	0	1	1	$\dots$	0	1
v_5	0	1	0	0	$\dots$		
$\vdots$			$\vdots$		$\ddots$		

Tablas de verdad

	p_0	p_1	p_2	p_3	$\ldots$	$(p_0 \wedge p_2)$	$((p_0 \wedge p_2) \rightarrow p_2)$
v_1	1	0	1	1	$\ldots$	1	1
v_2	1	1	0	1	$\ldots$	0	1
v_3	1	0	1	0	$\ldots$	1	1
v_4	0	0	1	1	$\ldots$	0	1
v_5	0	1	0	0	$\ldots$	0	1
$\vdots$			$\vdots$		$\ddots$		

Tablas de verdad

	p_0	p_1	p_2	p_3	$\ldots$	$(p_0 \wedge p_2)$	$((p_0 \wedge p_2) \to p_2)$
v_1	1	0	1	1	$\ldots$	1	1
v_2	1	1	0	1	$\ldots$	0	1
v_3	1	0	1	0	$\ldots$	1	1
v_4	0	0	1	1	$\ldots$	0	1
v_5	0	1	0	0	$\ldots$	0	1
$\vdots$			$\vdots$		$\ddots$		

Tablas de verdad

	p_0	p_1	p_2	p_3	$\dots$	$(p_0 \wedge p_2)$	$((p_0 \wedge p_2) \to p_2)$
v_1	1	0	1	1	$\dots$	1	1
v_2	1	1	0	1	$\dots$	0	1
v_3	1	0	1	0	$\dots$	1	1
v_4	0	0	1	1	$\dots$	0	1
v_5	0	1	0	0	$\dots$	0	1
$\vdots$			$\vdots$		$\ddots$		

Tablas de verdad

	p_0	p_2	$(p_0 \wedge p_2)$	$((p_0 \wedge p_2) \rightarrow p_2)$
v_1	1	1	1	1
v_2	1	0	0	1
v_4	0	1	0	1
v_5	0	0	0	1

Sustitución

Definición

$\varphi[\psi/p]$:= **sustitución** del símbolo proposicional p **por** la proposición ψ **en** φ:

Sustitución

Definición

$\varphi[\psi/p]$:= **sustitución** del símbolo proposicional p **por** la proposición ψ **en** φ:

$\boxed{\varphi \in At}$ Si $\varphi = p$ entonces $\varphi[\psi/p] := \psi$.

Sustitución

Definición

$\varphi[\psi/p]$:= **sustitución** del símbolo proposicional p **por** la proposición ψ **en** φ:

$\boxed{\varphi \in At}$ Si $\varphi = p$ entonces $\varphi[\psi/p] := \psi$. Caso contrario, $\varphi[\psi/p] := \varphi$.

Sustitución

Definición

$\varphi[\psi/p]$:= **sustitución** del símbolo proposicional p **por** la proposición ψ **en** φ:

$\boxed{\varphi \in At}$ Si $\varphi = p$ entonces $\varphi[\psi/p] := \psi$. Caso contrario, $\varphi[\psi/p] := \varphi$.

$\boxed{(\varphi \odot \chi)}$ $(\varphi \odot \chi)[\psi/p] := (\varphi[\psi/p] \odot \chi[\psi/p])$.

Sustitución

Definición

$\varphi[\psi/p]$:= **sustitución** del símbolo proposicional p **por** la proposición ψ **en** φ:

$\boxed{\varphi \in At}$ Si $\varphi = p$ entonces $\varphi[\psi/p] := \psi$. Caso contrario, $\varphi[\psi/p] := \varphi$.

$\boxed{(\varphi \odot \chi)}$ $(\varphi \odot \chi)[\psi/p] := (\varphi[\psi/p] \odot \chi[\psi/p])$.

Ejemplo

- $p_1[(p_1 \wedge p_2)/p_3] = p_1$.

Sustitución

Definición

$\varphi[\psi/p]$:= **sustitución** del símbolo proposicional p **por** la proposición ψ **en** φ:

$\boxed{\varphi \in At}$ Si $\varphi = p$ entonces $\varphi[\psi/p] := \psi$. Caso contrario, $\varphi[\psi/p] := \varphi$.

$\boxed{(\varphi \odot \chi)}$ $(\varphi \odot \chi)[\psi/p] := (\varphi[\psi/p] \odot \chi[\psi/p])$.

Ejemplo

- $p_1[(p_1 \wedge p_2)/p_3] = p_1$.
- $p_1[(p_1 \wedge p_2)/p_1] = (p_1 \wedge p_2)$.

Sustitución

Definición

$\varphi[\psi/p]$:= **sustitución** del símbolo proposicional p **por** la proposición ψ **en** φ:

$\boxed{\varphi \in At}$ Si $\varphi = p$ entonces $\varphi[\psi/p] := \psi$. Caso contrario, $\varphi[\psi/p] := \varphi$.

$\boxed{(\varphi \odot \chi)}$ $(\varphi \odot \chi)[\psi/p] := (\varphi[\psi/p] \odot \chi[\psi/p])$.

Ejemplo

- $p_1[(p_1 \wedge p_2)/p_3] = p_1$.
- $p_1[(p_1 \wedge p_2)/p_1] = (p_1 \wedge p_2)$.

Sustitución

Definición

$\varphi[\psi/p]$:= **sustitución** del símbolo proposicional p **por** la proposición ψ **en** φ:

$\boxed{\varphi \in At}$ Si $\varphi = p$ entonces $\varphi[\psi/p] := \psi$. Caso contrario, $\varphi[\psi/p] := \varphi$.

$\boxed{(\varphi \odot \chi)}$ $(\varphi \odot \chi)[\psi/p] := (\varphi[\psi/p] \odot \chi[\psi/p])$.

Ejemplo

- $p_1[(p_1 \wedge p_2)/p_3] = p_1$.
- $p_1[(p_1 \wedge p_2)/p_1] = (p_1 \wedge p_2)$.
- $(p_1 \wedge p_2)[(p_3 \wedge p_4)/p_1] = ((p_3 \wedge p_4) \wedge p_2)$.

Sustitución

Definición

$\varphi[\psi/p]$:= **sustitución** del símbolo proposicional p **por** la proposición ψ **en** φ:

$\boxed{\varphi \in At}$ Si $\varphi = p$ entonces $\varphi[\psi/p] := \psi$. Caso contrario, $\varphi[\psi/p] := \varphi$.

$\boxed{(\varphi \odot \chi)}$ $(\varphi \odot \chi)[\psi/p] := (\varphi[\psi/p] \odot \chi[\psi/p])$.

Ejemplo

- $p_1[(p_1 \wedge p_2)/p_3] = p_1$.
- $p_1[(p_1 \wedge p_2)/p_1] = (p_1 \wedge p_2)$.
- $(p_1 \wedge p_2)[(p_3 \wedge p_4)/p_1] = ((p_3 \wedge p_4) \wedge p_2)$.

Sustitución

Definición

$\varphi[\psi/p]$:= **sustitución** del símbolo proposicional p **por** la proposición ψ **en** φ:

$\boxed{\varphi \in At}$ Si $\varphi = p$ entonces $\varphi[\psi/p] := \psi$. Caso contrario, $\varphi[\psi/p] := \varphi$.

$\boxed{(\varphi \odot \chi)}$ $(\varphi \odot \chi)[\psi/p] := (\varphi[\psi/p] \odot \chi[\psi/p])$.

Ejemplo

- $p_1[(p_1 \wedge p_2)/p_3] = p_1$.
- $p_1[(p_1 \wedge p_2)/p_1] = (p_1 \wedge p_2)$.
- $(p_1 \wedge p_2)[(p_3 \wedge p_4)/p_1] = ((p_3 \wedge p_4) \wedge p_2)$.

Ejercicio

1. $(\neg\varphi)[\psi/p] = (\neg\varphi[\psi/p])$
2. $(\varphi \leftrightarrow \chi)[\psi/p] = (\varphi[\psi/p] \leftrightarrow \chi[\psi/p])$.

La regla de Leibnitz

$$\boxed{\varphi \in At} \quad p[\psi/p] := \psi. \qquad \varphi \neq p \implies \varphi[\psi/p] = \varphi.$$

$$\boxed{(\varphi \odot \chi)} \quad (\varphi \odot \chi)[\psi/p] := (\varphi[\psi/p] \odot \chi[\psi/p]).$$

La regla de Leibnitz

$$\boxed{\varphi \in At} \;\; p[\psi/p] := \psi. \qquad \varphi \neq p \implies \varphi[\psi/p] = \varphi.$$

$$\boxed{(\varphi \odot \chi)} \;\; (\varphi \odot \chi)[\psi/p] := (\varphi[\psi/p] \odot \chi[\psi/p]).$$

Teorema (Regla de Leibnitz)

Si $\models \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$ *entonces* $\models \psi[\varphi_1/p] \leftrightarrow \psi[\varphi_2/p]$.

La regla de Leibnitz

$$\boxed{\varphi \in At} \quad p[\psi/p] := \psi. \qquad \varphi \neq p \implies \varphi[\psi/p] = \varphi.$$

$$\boxed{(\varphi \odot \chi)} \quad (\varphi \odot \chi)[\psi/p] := (\varphi[\psi/p] \odot \chi[\psi/p]).$$

Teorema (Regla de Leibnitz)

Si $\models \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$ *entonces* $\models \psi[\varphi_1/p] \leftrightarrow \psi[\varphi_2/p]$*.*

Lema

$[\![\varphi_1]\!] = [\![\varphi_2]\!]$ *implica* $[\![\psi[\varphi_1/p]]\!] = [\![\psi[\varphi_2/p]]\!]$*.*

La regla de Leibnitz

$$\boxed{\varphi \in At} \quad p[\psi/p] := \psi. \qquad \varphi \neq p \implies \varphi[\psi/p] = \varphi.$$

$$\boxed{(\varphi \odot \chi)} \quad (\varphi \odot \chi)[\psi/p] := (\varphi[\psi/p] \odot \chi[\psi/p]).$$

Teorema (Regla de Leibnitz)

Si $\models \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$ *entonces* $\models \psi[\varphi_1/p] \leftrightarrow \psi[\varphi_2/p]$.

Lema

$[\![\varphi_1]\!] = [\![\varphi_2]\!]$ *implica* $[\![\psi[\varphi_1/p]]\!] = [\![\psi[\varphi_2/p]]\!]$.

Demostración.

Inducción en ψ.

La regla de Leibnitz

$$\boxed{\varphi \in At} \quad p[\psi/p] := \psi. \qquad \varphi \neq p \implies \varphi[\psi/p] = \varphi.$$

$$\boxed{(\varphi \odot \chi)} \quad (\varphi \odot \chi)[\psi/p] := (\varphi[\psi/p] \odot \chi[\psi/p]).$$

Teorema (Regla de Leibnitz)

Si $\models \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$ *entonces* $\models \psi[\varphi_1/p] \leftrightarrow \psi[\varphi_2/p]$.

Lema

$[\![\varphi_1]\!] = [\![\varphi_2]\!]$ *implica* $[\![\psi[\varphi_1/p]]\!] = [\![\psi[\varphi_2/p]]\!]$.

Demostración.

Inducción en ψ. En cada caso, suponemos en antecedente y probamos el consecuente.