Introducción a la Lógica y la Computación

Mariana Badano Héctor Gramaglia Pedro Sánchez Terraf
M. Clara Gorín Matías Steinberg

FaMAF, 6 de noviembre de 2020

Contenidos estimados para hoy

1. Repaso
   - Lenguajes regulares
2. Operaciones con lenguajes
3. Expresiones regulares
   - Lenguaje de una expresión regular
4. *Regex* definen lenguajes regulares
5. Propiedades de clausura de los lenguajes regulares
   - Clausura bajo complementos e intersección

Repaso: lenguajes regulares

Lenguajes

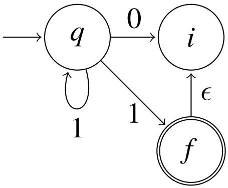
- **Lenguaje**: cualquier subconjunto $L \subseteq \Sigma^*$ para cierto **alfabeto** finito Σ.
- **Lenguaje regular**: uno de la forma $L(\mathbb{A})$ con $\mathbb{A}$ DFA ó NFA ó ϵ-NFA.

Repaso: lenguajes regulares

Lenguajes

- **Lenguaje**: cualquier subconjunto $L \subseteq \Sigma^*$ para cierto **alfabeto** finito Σ.
- **Lenguaje regular**: uno de la forma $L(\mathbb{A})$ con $\mathbb{A}$ DFA ó NFA ó ϵ-NFA.

Ejemplo



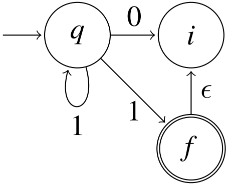
$$\mathbb{A} = (\{q, i, f\}, \{0, 1\}, \rightarrow, q, \{f\})$$

Repaso: lenguajes regulares

Lenguajes

- **Lenguaje**: cualquier subconjunto $L \subseteq \Sigma^*$ para cierto **alfabeto** finito Σ.
- **Lenguaje regular**: uno de la forma $L(\mathbb{A})$ con $\mathbb{A}$ DFA ó NFA ó ϵ-NFA.

Ejemplo



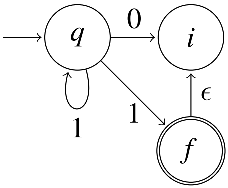
$$\mathbb{A} = (\{q, i, f\}, \{0, 1\}, \rightarrow, q, \{f\})$$

$$L(\mathbb{A}) = \{\alpha \in \{0, 1\}^* : |\alpha|_0 = 0 < |\alpha|_1\}$$

Lenguajes

- **Lenguaje**: cualquier subconjunto $L \subseteq \Sigma^*$ para cierto **alfabeto** finito Σ.
- **Lenguaje regular**: uno de la forma $L(\mathbb{A})$ con $\mathbb{A}$ DFA ó NFA ó ϵ-NFA.

Ejemplo



$$\mathbb{A} = (\{q, i, f\}, \{0, 1\}, \rightarrow, q, \{f\})$$

$$L(\mathbb{A}) = \{\alpha \in \{0, 1\}^* : |\alpha|_0 = 0 < |\alpha|_1\}$$

Expresiones regulares

Una forma de algebraica de describir un lenguaje regular: $\mathbf{1\,(1)^*}$.

Operaciones con lenguajes

vacío	$\emptyset$
singulete	$\{x\} \quad (x \in \Sigma)$
complemento	$L^c = \Sigma^* \setminus L$
intersección	$L \cap L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \text{ y } \alpha \in L'\}$
unión	$L \cup L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \text{ ó } \alpha \in L'\}$
concatenación	$L\,L' = \{\alpha\beta \mid \alpha \in L \text{ y } \beta \in L'\}$
potencias	$L^n = \begin{cases} \{\epsilon\} & \text{si } n = 0 \\ L\,L^k & \text{si } n = k+1 \end{cases}$
clausura	$L^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L^n$

Operaciones con lenguajes

vacío	$\emptyset$
singulete	$\{x\} \quad (x \in \Sigma)$
complemento	$L^c = \Sigma^* \setminus L$
intersección	$L \cap L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \ \text{ y } \ \alpha \in L'\}$
unión	$L \cup L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \ \text{ ó } \ \alpha \in L'\}$
concatenación	$L\,L' = \{\alpha\beta \mid \alpha \in L \ \text{ y } \ \beta \in L'\}$
potencias	$L^n = \begin{cases} \{\epsilon\} & \text{si } n = 0 \\ L\,L^k & \text{si } n = k+1 \end{cases}$
clausura	$L^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^n$

$\emptyset$

Operaciones con lenguajes

vacío	$\emptyset$	$\boldsymbol{\emptyset}$
singulete	$\{x\} \quad (x \in \Sigma)$	$\boldsymbol{x}$
complemento	$L^c = \Sigma^* \setminus L$	
intersección	$L \cap L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \ \text{ y } \ \alpha \in L'\}$	
unión	$L \cup L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \ \text{ ó } \ \alpha \in L'\}$	
concatenación	$L\,L' = \{\alpha\beta \mid \alpha \in L \ \text{ y } \ \beta \in L'\}$	
potencias	$L^n = \begin{cases} \{\epsilon\} & \text{si } n = 0 \\ L\,L^k & \text{si } n = k+1 \end{cases}$	
clausura	$L^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^n$	

vacío	$\emptyset$	$\boldsymbol{\emptyset}$
singulete	$\{x\} \quad (x \in \Sigma)$	$\boldsymbol{x}$
complemento	$L^c = \Sigma^* \setminus L$	
intersección	$L \cap L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \text{ y } \alpha \in L'\}$	
unión	$L \cup L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \text{ ó } \alpha \in L'\}$	$r + r'$
concatenación	$L\,L' = \{\alpha\beta \mid \alpha \in L \text{ y } \beta \in L'\}$	
potencias	$L^n = \begin{cases} \{\epsilon\} & \text{si } n = 0 \\ L\,L^k & \text{si } n = k+1 \end{cases}$	
clausura	$L^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^n$	

Operaciones con lenguajes

vacío	$\emptyset$	$\boldsymbol{\emptyset}$
singulete	$\{x\} \quad (x \in \Sigma)$	$\boldsymbol{x}$
complemento	$L^c = \Sigma^* \setminus L$	
intersección	$L \cap L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \;\text{ y }\; \alpha \in L'\}$	
unión	$L \cup L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \;\text{ ó }\; \alpha \in L'\}$	$r + r'$
concatenación	$L\,L' = \{\alpha\beta \mid \alpha \in L \;\text{ y }\; \beta \in L'\}$	$r\,r'$
potencias	$L^n = \begin{cases} \{\epsilon\} & \text{si } n = 0 \\ L\,L^k & \text{si } n = k+1 \end{cases}$	
clausura	$L^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L^n$	

Operaciones con lenguajes

vacío	$\emptyset$	$\emptyset$
singulete	$\{x\} \quad (x \in \Sigma)$	x
complemento	$L^c = \Sigma^* \setminus L$	
intersección	$L \cap L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \text{ y } \alpha \in L'\}$	
unión	$L \cup L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \text{ ó } \alpha \in L'\}$	$r + r'$
concatenación	$L\,L' = \{\alpha\beta \mid \alpha \in L \text{ y } \beta \in L'\}$	$r\,r'$
potencias	$L^n = \begin{cases} \{\epsilon\} & \text{si } n = 0 \\ L\,L^k & \text{si } n = k+1 \end{cases}$	$r^0 = \epsilon$
clausura	$L^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^n$	

Operaciones con lenguajes

vacío	$\emptyset$	$\boldsymbol{\emptyset}$
singulete	$\{x\} \quad (x \in \Sigma)$	$\boldsymbol{x}$
complemento	$L^c = \Sigma^* \setminus L$	
intersección	$L \cap L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \;\text{ y }\; \alpha \in L'\}$	
unión	$L \cup L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \;\text{ ó }\; \alpha \in L'\}$	$r + r'$
concatenación	$L\,L' = \{\alpha\beta \mid \alpha \in L \;\text{ y }\; \beta \in L'\}$	$r\,r'$
potencias	$L^n = \begin{cases} \{\epsilon\} & \text{si } n = 0 \\ L\,L^k & \text{si } n = k+1 \end{cases}$	$r^0 = \epsilon$ r^n
clausura	$L^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^n$	

Operaciones con lenguajes

vacío	$\emptyset$	$\boldsymbol{\emptyset}$
singulete	$\{x\} \quad (x \in \Sigma)$	$\boldsymbol{x}$
complemento	$L^c = \Sigma^* \setminus L$	
intersección	$L \cap L' = \{\alpha \mid \alpha \in L$ y $\alpha \in L'\}$	
unión	$L \cup L' = \{\alpha \mid \alpha \in L$ ó $\alpha \in L'\}$	$r + r'$
concatenación	$L\,L' = \{\alpha\beta \mid \alpha \in L$ y $\beta \in L'\}$	$r\,r'$
potencias	$L^n = \begin{cases} \{\epsilon\} & \text{si } n = 0 \\ L\,L^k & \text{si } n = k+1 \end{cases}$	$r^0 = \epsilon$ r^n
clausura	$L^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^n$	r^*

donde r y r' son expresiones regulares y $n \in \mathbb{N}$.

Expresiones regulares

Fijado un alfabeto Σ, son el menor conjunto $Regex$ que cumple:

vacío	$\emptyset \in Regex$.
épsilon	$\epsilon \in Regex$.
símbolo	$x \in \Sigma \implies \boldsymbol{x} \in Regex$.
unión	$r_1, r_2 \in Regex \implies r_1 + r_2 \in Regex$.
concatenación	$r_1, r_2 \in Regex \implies r_1\, r_2 \in Regex$.
clausura	$r \in Regex \implies r^* \in Regex$.

Lenguaje de una expresión regular

Como $Regex$ fue definido inductivamente, podemos definir por recursión:

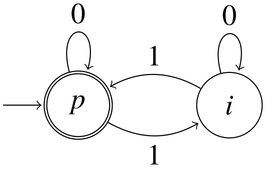
vacío	$L(\boldsymbol{\emptyset}) := \emptyset$.
épsilon	$L(\boldsymbol{\epsilon}) := \{\epsilon\}$.
símbolo	$L(\boldsymbol{x}) := \{x\}$.
unión	$L(r_1 + r_2) := L(r_1) \cup L(r_2)$.
concatenación	$L(r_1\, r_2) := L(r_1)\, L(r_2)$.
clausura	$L(r^{\boldsymbol{*}}) := (L(r))^*$.

Lenguaje de una expresión regular

Como $Regex$ fue definido inductivamente, podemos definir por recursión:

vacío	$L(\boldsymbol{\emptyset}) := \emptyset$.
épsilon	$L(\boldsymbol{\epsilon}) := \{\epsilon\}$.
símbolo	$L(\boldsymbol{x}) := \{x\}$.
unión	$L(r_1 \boldsymbol{+} r_2) := L(r_1) \cup L(r_2)$.
concatenación	$L(r_1\, r_2) := L(r_1)\, L(r_2)$.
clausura	$L(r^{\boldsymbol{*}}) := (L(r))^*$.

Ejemplo



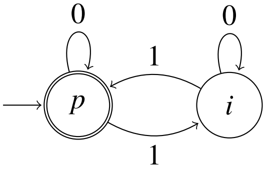
$$L(\mathbb{A}) = \{\alpha \in \{0,1\}^* : |\alpha|_1 \text{ es par}\}$$

Lenguaje de una expresión regular

Como $Regex$ fue definido inductivamente, podemos definir por recursión:

vacío	$L(\boldsymbol{\emptyset}) := \emptyset$.
épsilon	$L(\boldsymbol{\epsilon}) := \{\epsilon\}$.
símbolo	$L(\boldsymbol{x}) := \{x\}$.
unión	$L(r_1 + r_2) := L(r_1) \cup L(r_2)$.
concatenación	$L(r_1\, r_2) := L(r_1)\, L(r_2)$.
clausura	$L(r^{\boldsymbol{*}}) := (L(r))^*$.

Ejemplo



$$L(\mathbb{A}) = \{\alpha \in \{0,1\}^* : |\alpha|_1 \text{ es par}\}$$

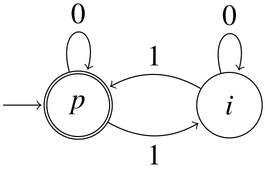
$$L(\mathbb{A}) = L((\mathbf{0^*10^*10^*})^*\mathbf{0^*})$$

Lenguaje de una expresión regular

Como $Regex$ fue definido inductivamente, podemos definir por recursión:

vacío	$L(\boldsymbol{\emptyset}) := \emptyset$.
épsilon	$L(\boldsymbol{\epsilon}) := \{\epsilon\}$.
símbolo	$L(\boldsymbol{x}) := \{x\}$.
unión	$L(r_1 + r_2) := L(r_1) \cup L(r_2)$.
concatenación	$L(r_1\, r_2) := L(r_1)\, L(r_2)$.
clausura	$L(r^{\boldsymbol{*}}) := (L(r))^*$.

Ejemplo



$$L(\mathbb{A}) = \{\alpha \in \{0,1\}^* : |\alpha|_1 \text{ es par}\}$$

$$\begin{aligned} L(\mathbb{A}) &= L((\mathbf{0^*10^*10^*})^{\boldsymbol{*}}\mathbf{0^*}) \\ &= L((\mathbf{10^*1} + \mathbf{0})^{\boldsymbol{*}}) \end{aligned}$$

Regex definen lenguajes regulares

Teorema

Para toda expresión regular r, existe un ϵ-NFA $\mathbb{A}(r)$ con un único estado final tal que $L(r) = L(\mathbb{A}(r))$.

Regex definen lenguajes regulares

Teorema

Para toda expresión regular r, existe un ϵ-NFA $\mathbb{A}(r)$ con un único estado final tal que $L(r) = L(\mathbb{A}(r))$.

Demostración.

Por recursión en r.

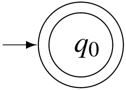
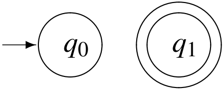
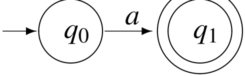
Regex definen lenguajes regulares

Teorema

Para toda expresión regular r, existe un ϵ-NFA $\mathbb{A}(r)$ con un único estado final tal que $L(r) = L(\mathbb{A}(r))$.

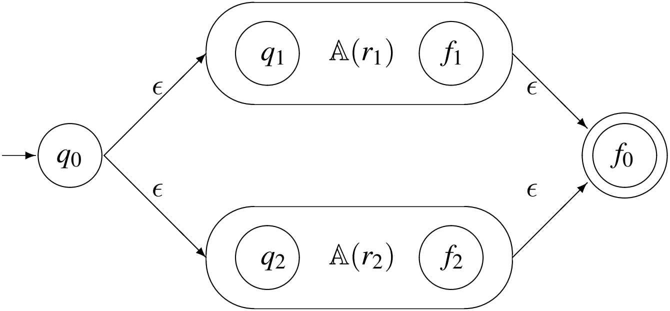
Demostración.

Por recursión en r.

r	ϵ	$\emptyset$	a
$\mathbb{A}(r)$			

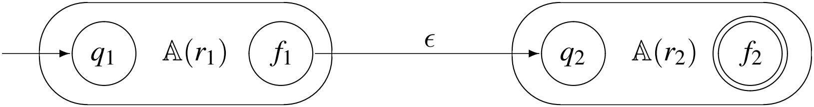
Regex definen lenguajes regulares

$\mathbb{A}(r_1 + r_2)$



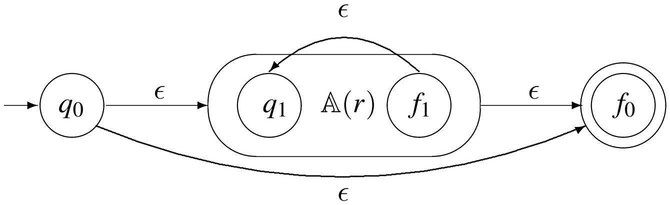
Regex definen lenguajes regulares

$\mathbb{A}(r_1\, r_2)$



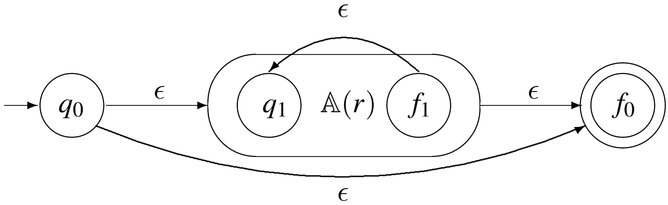
Regex definen lenguajes regulares

$\mathbb{A}(r^*)$



Regex definen lenguajes regulares

$\mathbb{A}(r^*)$



¿Qué pasa con las otras operaciones?

Operaciones con lenguajes

vacío	$\emptyset$	$\boldsymbol{\emptyset}$
singulete	$\{x\} \quad (x \in \Sigma)$	$\boldsymbol{x}$
complemento	$L^c = \Sigma^* \setminus L$	
intersección	$L \cap L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \ \text{ y } \ \alpha \in L'\}$	
unión	$L \cup L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \ \text{ ó } \ \alpha \in L'\}$	$r + r'$
concatenación	$L\,L' = \{\alpha\beta \mid \alpha \in L \ \text{ y } \ \beta \in L'\}$	$r\,r'$
potencias	$L^n = \begin{cases} \{\epsilon\} & \text{si } n = 0 \\ L\,L^k & \text{si } n = k+1 \end{cases}$	$r^0 = \epsilon$ r^n
clausura	$L^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^n$	r^*

Operaciones con lenguajes

vacío	$\emptyset$	$\boldsymbol{\emptyset}$
singulete	$\{x\} \quad (x \in \Sigma)$	$\boldsymbol{x}$
complemento	$L^c = \Sigma^* \setminus L$	
intersección	$L \cap L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \;\text{ y }\; \alpha \in L'\}$	
unión	$L \cup L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \;\text{ ó }\; \alpha \in L'\}$	$r + r'$
concatenación	$L\,L' = \{\alpha\beta \mid \alpha \in L \;\text{ y }\; \beta \in L'\}$	$r\,r'$
potencias	$L^n = \begin{cases} \{\epsilon\} & \text{si } n = 0 \\ L\,L^k & \text{si } n = k+1 \end{cases}$	$r^0 = \epsilon$ r^n
clausura	$L^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^n$	r^*

Clausura bajo complementos e intersección

complemento $L^c = \Sigma^* \setminus L$.

intersección $L \cap L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \text{ y } \alpha \in L'\}$

Clausura bajo complementos e intersección

complemento $L^c = \Sigma^* \setminus L$.

intersección $L \cap L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \text{ y } \alpha \in L'\}$

Proposición

1. L_1 *regular* $\implies L_1^c$ *regular.*
2. L_1 *y* L_2 *regulares* $\implies L \cap L'$ *regular.*

Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Clausura bajo complementos e intersección

complemento $L^c = \Sigma^* \setminus L$.

intersección $L \cap L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \text{ y } \alpha \in L'\}$

Proposición

1. *L_1 regular $\Longrightarrow$ L_1^c regular.*
2. *L_1 y L_2 regulares $\Longrightarrow$ $L \cap L'$ regular.*

En ambos casos es muy útil saber que hay DFAs $\mathbb{A}_i = (Q_i, \Sigma, \delta_i, q_i, F_i)$ tales que $L_i = L(\mathbb{A}_i)$ (con $i = 1, 2$).

Clausura bajo complementos e intersección

complemento $L^c = \Sigma^* \setminus L$.

intersección $L \cap L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \text{ y } \alpha \in L'\}$

Proposición

1. *L_1 regular $\implies$ L_1^c regular.*
2. *L_1 y L_2 regulares $\implies$ $L \cap L'$ regular.*

En ambos casos es muy útil saber que hay DFAs $\mathbb{A}_i = (Q_i, \Sigma, \delta_i, q_i, F_i)$ tales que $L_i = L(\mathbb{A}_i)$ (con $i = 1, 2$).

Demostración.

1. Casi el mismo $\mathbb{A}_1$ nos sirve, sólo hay que cambiar F_1.

Clausura bajo complementos e intersección

complemento $L^c = \Sigma^* \setminus L$.

intersección $L \cap L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \ \text{ y } \ \alpha \in L'\}$

Proposición

1. *L_1 regular $\implies$ L_1^c regular.*
2. *L_1 y L_2 regulares $\implies$ $L \cap L'$ regular.*

En ambos casos es muy útil saber que hay DFAs $\mathbb{A}_i = (Q_i, \Sigma, \delta_i, q_i, F_i)$ tales que $L_i = L(\mathbb{A}_i)$ (con $i = 1, 2$).

Demostración.

1. Casi el mismo $\mathbb{A}_1$ nos sirve, sólo hay que cambiar F_1.
2. Vemos a cada $\mathbb{A}_i$ como una estructura (como con reticulados). Para hacerlo más simple, pensemos que $\Sigma = \{a, b\}$.

DFAs como estructuras

- $\mathbb{A} = (Q, \{a, b\}, \delta, q, F)$

DFAs como estructuras

- $\mathbb{A} = (Q, \{a, b\}, \delta, q, F) \quad \rightsquigarrow \quad \overline{\mathbb{A}} = (Q, \delta^a, \delta^b, q, F)$

donde

$$\begin{aligned} \delta^a &: Q \to Q & \qquad \delta^b &: Q \to Q \\ \delta^a(x) &:= \delta(x, a) & \qquad \delta^b(x) &:= \delta(x, b). \end{aligned}$$

DFAs como estructuras

- $\mathbb{A} = (Q, \{a, b\}, \delta, q, F) \quad \rightsquigarrow \quad \overline{\mathbb{A}} = (Q, \delta^a, \delta^b, q, F)$

donde

$$\delta^a : Q \to Q \qquad\qquad \delta^b : Q \to Q$$
$$\delta^a(x) := \delta(x, a) \qquad\qquad \delta^b(x) := \delta(x, b).$$

Entonces podemos definir el DFA $\mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_2$ correspondiente al producto de las estructuras $\mathbb{A}_1$ y $\mathbb{A}_2$:

DFAs como estructuras

- $\mathbb{A} = (Q, \{a, b\}, \delta, q, F) \quad \rightsquigarrow \quad \overline{\mathbb{A}} = (Q, \delta^a, \delta^b, q, F)$

donde

$$\begin{aligned} \delta^a &: Q \to Q \\ \delta^a(x) &:= \delta(x, a) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \delta^b &: Q \to Q \\ \delta^b(x) &:= \delta(x, b). \end{aligned}$$

Entonces podemos definir el DFA $\mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_2$ correspondiente al producto de las estructuras $\mathbb{A}_1$ y $\mathbb{A}_2$:

$$\overline{\mathbb{A}_1} \times \overline{\mathbb{A}_2} = (Q_1 \times Q_2, \delta^a_{1\times 2}, \delta^b_{1\times 2}, (q_1, q_2), F_1 \times F_2)$$
$$\delta^a_{1\times 2}(s) := (\delta^a_1(s), \delta^a_2(s))$$
$$\delta^b_{1\times 2}(s) := (\delta^b_1(s), \delta^b_2(s))$$

DFAs como estructuras

- $\mathbb{A} = (Q, \{a, b\}, \delta, q, F) \quad \rightsquigarrow \quad \overline{\mathbb{A}} = (Q, \delta^a, \delta^b, q, F)$

donde

$$\begin{aligned} \delta^a &: Q \to Q & \qquad \delta^b &: Q \to Q \\ \delta^a(x) &:= \delta(x, a) & \qquad \delta^b(x) &:= \delta(x, b). \end{aligned}$$

Entonces podemos definir el DFA $\mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_2$ correspondiente al producto de las estructuras $\mathbb{A}_1$ y $\mathbb{A}_2$:

$$\overline{\mathbb{A}_1} \times \overline{\mathbb{A}_2} = (Q_1 \times Q_2, \delta^a_{1\times 2}, \delta^b_{1\times 2}, (q_1, q_2), F_1 \times F_2)$$
$$\delta^a_{1\times 2}(s) := (\delta^a_1(s), \delta^a_2(s))$$
$$\delta^b_{1\times 2}(s) := (\delta^b_1(s), \delta^b_2(s))$$

Ejercicio

$L(\mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_2) = L(\mathbb{A}_1) \cap L(\mathbb{A}_2)$.