Introducción a la Lógica y la Computación

Mariana Badano   Héctor Gramaglia   Pedro Sánchez Terraf
M. Clara Gorín   Matías Steinberg

FaMAF, 9 de octubre de 2020

Contenidos estimados para hoy

1. Repaso
2. Deducción natural
   - Reglas de inferencia
   - Cancelación de hipótesis: introducción de $\rightarrow$
   - Ejemplos con cancelación
   - Reducción al absurdo y de eliminación de $\vee$
   - Ejemplos con RAA y $\vee E$
   - Definición de $\mathscr{D}$
   - Recursión en derivaciones

Repaso

Tres componentes de la lógica

- Sintaxis: descripción simbólica de los objetos que estudiamos: **proposiciones** (= “fórmulas proposicionales”, “fórmulas”).

Repaso

Tres componentes de la lógica

- Sintaxis: descripción simbólica de los objetos que estudiamos: **proposiciones** (= "fórmulas proposicionales", "fórmulas").
  - Conjunto inductivo $PROP$: **inducción** y **recursión**.
  - **Abreviaturas** $(\neg\varphi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$.
  - Operaciones simbólicas: **sustitución** $\varphi[\psi/p]$.

Repaso

Tres componentes de la lógica

- Sintaxis: descripción simbólica de los objetos que estudiamos: **proposiciones** (= “fórmulas proposicionales”, “fórmulas”).
  - Conjunto inductivo $PROP$: **inducción** y **recursión**.
  - **Abreviaturas** $(\neg\varphi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$.
  - Operaciones simbólicas: **sustitución** $\varphi[\psi/p]$.
- Semántica: cómo asignamos *significado* a las proposiciones.

Tres componentes de la lógica

- Sintaxis: descripción simbólica de los objetos que estudiamos: **proposiciones** (= "fórmulas proposicionales", "fórmulas").
  - Conjunto inductivo $PROP$: **inducción** y **recursión**.
  - **Abreviaturas** $(\neg\varphi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$.
  - Operaciones simbólicas: **sustitución** $\varphi[\psi/p]$.
- Semántica: cómo asignamos *significado* a las proposiciones.
  - *Modelos* para dar sentido: **asignaciones** $v : \mathcal{V} \to \{0, 1\}$.
  - Se extienden a **valuaciones**: $[\![\cdot]\!]_v : PROP \to \{0, 1\}$.
  - La verdad es información local sobre el modelo: Lema de **Coincidencia** y **tablas de verdad**.

Repaso

Tres componentes de la lógica

- Sintaxis: descripción simbólica de los objetos que estudiamos: **proposiciones** (= "fórmulas proposicionales", "fórmulas").
  - Conjunto inductivo $PROP$: **inducción** y **recursión**.
  - **Abreviaturas** $(\neg\varphi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$.
  - Operaciones simbólicas: **sustitución** $\varphi[\psi/p]$.
- Semántica: cómo asignamos *significado* a las proposiciones.
  - *Modelos* para dar sentido: **asignaciones** $v : \mathcal{V} \rightarrow \{0, 1\}$.
  - Se extienden a **valuaciones**: $[\![\cdot]\!]_v : PROP \rightarrow \{0, 1\}$.
  - La verdad es información local sobre el modelo: Lema de **Coincidencia** y **tablas de verdad**.
- Cálculo: cómo se **deducen** proposiciones a partir de otras y se obtienen **teoremas**.

Repaso

Tres componentes de la lógica

- Sintaxis: descripción simbólica de los objetos que estudiamos: **proposiciones** (= "fórmulas proposicionales", "fórmulas").
  - Conjunto inductivo $PROP$: **inducción** y **recursión**.
  - **Abreviaturas** $(\neg\varphi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$.
  - Operaciones simbólicas: **sustitución** $\varphi[\psi/p]$.
- Semántica: cómo asignamos *significado* a las proposiciones.
  - *Modelos* para dar sentido: **asignaciones** $v : \mathcal{V} \to \{0, 1\}$.
  - Se extienden a **valuaciones**: $[\![\cdot]\!]_v : PROP \to \{0, 1\}$.
  - La verdad es información local sobre el modelo: Lema de **Coincidencia** y **tablas de verdad**.
- Cálculo: cómo se **deducen** proposiciones a partir de otras y se obtienen **teoremas**. Ahora

El cálculo en primer año

Una demostración de *Introducción a los Algoritmos*.

$$
\begin{array}{ll}
 & \underline{p \Rightarrow q \vee p} \\
\equiv & \{ \text{ Definición de } \Rightarrow \ \} \\
 & \underline{p} \vee q \vee \underline{p} \equiv \underline{q \vee q} \vee p \\
\equiv & \{ \text{ Conmutativa } \vee\text{, Idempotencia } \vee \ \} \\
 & p \vee q \equiv q \vee p \\
\equiv & \{ \text{ Conmutativa } \vee \ \} \\
 & \mathit{True}
\end{array}
$$

El cálculo en primer año

Una demostración de *Introducción a los Algoritmos*.

$$
\begin{array}{ll}
 & \underline{p \Rightarrow q \vee p} \\
\equiv & \{ \text{ Definición de } \Rightarrow \ \} \\
 & \underline{p} \vee q \vee \underline{p} \equiv \underline{q \vee q} \vee p \\
\equiv & \{ \text{ Conmutativa } \vee, \text{ Idempotencia } \vee \ \} \\
 & p \vee q \equiv q \vee p \\
\equiv & \{ \text{ Conmutativa } \vee \ \} \\
 & \mathit{True}
\end{array}
$$

Es un cálculo ecuacional:

$$\frac{q \vee q \equiv q}{}$$

El cálculo en primer año

Una demostración de *Introducción a los Algoritmos*.

$$
\begin{array}{ll}
 & \underline{p \Rightarrow q \vee p} \\
\equiv & \{ \text{ Definición de } \Rightarrow \ \} \\
 & \underline{p} \vee q \vee \underline{p} \equiv \underline{q \vee q} \vee p \\
\equiv & \{ \text{ Conmutativa } \vee, \text{ Idempotencia } \vee \ \} \\
 & p \vee q \equiv q \vee p \\
\equiv & \{ \text{ Conmutativa } \vee \ \} \\
 & \mathit{True}
\end{array}
$$

Es un cálculo ecuacional:

$$
\frac{q \vee q \equiv q}{q \vee q \vee p \equiv q \vee p}
$$

El cálculo en primer año

Una demostración de *Introducción a los Algoritmos*.

$$
\begin{array}{ll}
 & \underline{p \Rightarrow q \vee p} \\
\equiv \{ & \text{Definición de} \Rightarrow \ \} \\
 & \underline{p} \vee q \vee \underline{p} \equiv \underline{q \vee q} \vee p \\
\equiv \{ & \text{Conmutativa} \vee, \text{Idempotencia} \vee \} \\
 & p \vee q \equiv q \vee p \\
\equiv \{ & \text{Conmutativa} \vee \ \} \\
 & \mathit{True}
\end{array}
$$

Es un cálculo ecuacional:

$$\frac{q \vee q \equiv q}{q \vee q \vee p \equiv q \vee p}$$

Deducción natural: un cálculo más parecido a los razonamientos “intuitivos”.

Deducción natural

$$\frac{\varphi \qquad \psi}{(\varphi \wedge \psi)} \wedge\boldsymbol{I}$$

Deducción natural

$$\frac{\varphi \qquad \psi}{(\varphi \wedge \psi)} \wedge\boldsymbol{I}$$

Derivaciones: árboles punteados decorados

Deducción natural

$$\frac{\color{red}{\varphi} \qquad \color{red}{\psi}}{(\varphi \wedge \psi)} \wedge \boldsymbol{I}$$

Derivaciones: árboles punteados decorados

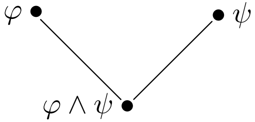
- *Algunas* hojas son las Hipótesis no canceladas (Hip): $\{\varphi, \psi\}$.

Deducción natural

$$\frac{\varphi \qquad \psi}{(\varphi \wedge \psi)} \wedge I$$

Derivaciones: árboles punteados decorados

- *Algunas* hojas son las Hipótesis no canceladas (Hip): $\{\varphi, \psi\}$.
- Nodo (raíz) distinguido conclusión ($Concl$): $(\varphi \wedge \psi)$

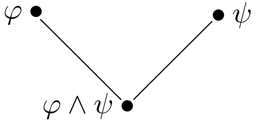


Deducción natural

$$\frac{\color{red}{\varphi} \qquad \color{red}{\psi}}{\color{blue}{(\varphi \wedge \psi)}} \wedge I$$

Derivaciones: árboles punteados decorados

- *Algunas* hojas son las Hipótesis no canceladas (Hip): $\{\varphi, \psi\}$.
- Nodo (raíz) distinguido conclusión $(Concl)$: $(\varphi \wedge \psi)$



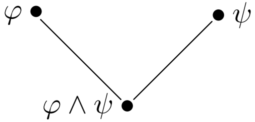
"De $\{\varphi, \psi\}$ **deduce** $(\varphi \wedge \psi)$"

Deducción natural

$$\frac{\color{red}{\varphi} \qquad \color{red}{\psi}}{\color{blue}{(\varphi \wedge \psi)}} \wedge I$$

Derivaciones: árboles punteados decorados

- *Algunas* hojas son las Hipótesis no canceladas (Hip): $\{\varphi, \psi\}$.
- Nodo (raíz) distinguido conclusión $(Concl)$: $(\varphi \wedge \psi)$



"De $\{\varphi, \psi\}$ **deduce** $(\varphi \wedge \psi)$"

$\{\color{red}{\varphi, \psi}\} \vdash \color{blue}{(\varphi \wedge \psi)}$.

Algunas reglas de inferencia

Notación. Usaremos precedencia para eliminar paréntesis:

$$\neg\varphi \wedge (\psi \vee \varphi) \to \chi := \big(((\neg\varphi) \wedge (\psi \vee \varphi)) \to \chi\big).$$

Algunas reglas de inferencia

Notación. Usaremos precedencia para eliminar paréntesis:

$$\neg\varphi \wedge (\psi \vee \varphi) \to \chi := \big(((\neg\varphi) \wedge (\psi \vee \varphi)) \to \chi\big).$$

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} \wedge I$$

Algunas reglas de inferencia

Notación. Usaremos precedencia para eliminar paréntesis:

$$\neg\varphi \wedge (\psi \vee \varphi) \to \chi := \big(((\neg\varphi) \wedge (\psi \vee \varphi)) \to \chi\big).$$

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\,\wedge I \qquad\qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\,\wedge E$$

Algunas reglas de inferencia

Notación. Usaremos precedencia para eliminar paréntesis:

$$\neg\varphi \wedge (\psi \vee \varphi) \to \chi := \big(((\neg\varphi) \wedge (\psi \vee \varphi)) \to \chi\big).$$

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\wedge I \qquad\qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\wedge E \qquad\qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\wedge E$$

Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Algunas reglas de inferencia

Notación. Usaremos precedencia para eliminar paréntesis:

$$\neg\varphi \wedge (\psi \vee \varphi) \to \chi := \big(((\neg\varphi) \wedge (\psi \vee \varphi)) \to \chi\big).$$

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} \wedge I \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} \wedge E \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi} \wedge E$$

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} \vee I \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi} \vee I$$

Algunas reglas de inferencia

Notación. Usaremos precedencia para eliminar paréntesis:

$$\neg\varphi \wedge (\psi \vee \varphi) \to \chi := \big(((\neg\varphi) \wedge (\psi \vee \varphi)) \to \chi\big).$$

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\wedge I \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\wedge E \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\wedge E$$

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\vee I \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi}\vee I$$

$$\frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi} \to E$$

Algunas reglas de inferencia

Notación. Usaremos precedencia para eliminar paréntesis:

$$\neg\varphi \wedge (\psi \vee \varphi) \to \chi := \big(((\neg\varphi) \wedge (\psi \vee \varphi)) \to \chi\big).$$

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\wedge I \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\wedge E \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\wedge E$$

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\vee I \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi}\vee I$$

$$\frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}\to E$$

Ejemplo

De $\{\varphi, \varphi \vee \psi \to \chi\}$ se deduce χ.

Cancelación de hipótesis

$$\dfrac{\begin{matrix}[\varphi] \\ \vdots \\ \psi\end{matrix}}{\varphi \to \psi} \to I$$

Cancelación de hipótesis

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]\\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi} \to I$$

Introducción de la implicación

Cancelación de hipótesis

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]\\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi} \to I$$

Introducción de la implicación

- Hipótesis cancelada: φ.

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Cancelación de hipótesis

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]_1\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi} \to I_1$$

Introducción de la implicación

- Hipótesis cancelada: φ.

Cancelación de hipótesis

$$D \quad := \quad \cfrac{\cfrac{\psi \wedge \chi}{\psi}\,\wedge E}{\psi \wedge \chi \to \psi}\to I$$

Introducción de la implicación

Cancelación de hipótesis

$$D \quad := \quad \cfrac{\cfrac{[\psi \wedge \chi]_1}{\psi}\wedge E}{\psi \wedge \chi \to \psi} \to I_1$$

Introducción de la implicación

- Hipótesis cancelada: $\psi \wedge \chi$.

Cancelación de hipótesis

$$D \quad := \quad \cfrac{\cfrac{[\psi \wedge \chi]_1}{\psi}\,\wedge E}{\psi \wedge \chi \to \psi}\,{\to} I_1$$

Introducción de la implicación

- Hipótesis cancelada: $\psi \wedge \chi$.
  Hipótesis no canceladas $Hip(D) = \emptyset$.

Cancelación de hipótesis

$$D \quad := \quad \cfrac{\cfrac{[\psi \wedge \chi]_1}{\psi}\wedge E}{\psi \wedge \chi \to \psi} \to I_1$$

Introducción de la implicación

- Hipótesis cancelada: $\psi \wedge \chi$.
  Hipótesis no canceladas $Hip(D) = \emptyset$.
- Conclusión $Concl(D) = \psi \wedge \chi \to \psi$.

Cancelación de hipótesis

$$D \quad := \quad \dfrac{\dfrac{[\psi \land \chi]_1}{\psi}\ \land E}{\psi \land \chi \to \psi}\ \to I_1$$

Introducción de la implicación

- Hipótesis cancelada: $\psi \land \chi$.
  Hipótesis no canceladas $Hip(D) = \emptyset$.
- Conclusión $Concl(D) = \psi \land \chi \to \psi$.

"$\psi \land \chi \to \psi$ es un **teorema** ".

Cancelación de hipótesis

$$D \quad := \quad \cfrac{\cfrac{[\psi \wedge \chi]_1}{\psi}\,\wedge E}{\psi \wedge \chi \rightarrow \psi}\,\rightarrow I_1$$

Introducción de la implicación

- Hipótesis cancelada: $\psi \wedge \chi$.
  Hipótesis no canceladas $Hip(D) = \emptyset$.
- Conclusión $Concl(D) = \psi \wedge \chi \rightarrow \psi$.

"$\psi \wedge \chi \rightarrow \psi$ es un **teorema** ". $\vdash \psi \wedge \chi \rightarrow \psi$.

Ejemplos de derivaciones

1. $\varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi$ es un teorema.

$$\vdash \varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi$$

Ejemplos de derivaciones

1. $\varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi$ es un teorema.

$$\vdash \varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi \wedge \psi]_1}{\psi}\,\wedge E \qquad \dfrac{[\varphi \wedge \psi]_1}{\varphi}\,\wedge E}{\psi \wedge \varphi}\,\wedge I}{\varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi}\,\to I_1$$

Ejemplos de derivaciones

1. $\varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi$ es un teorema.

$$\vdash \varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi \wedge \psi]_1}{\psi}\wedge E \quad \dfrac{[\varphi \wedge \psi]_1}{\varphi}\wedge E}{\psi \wedge \varphi}\wedge I}{\varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi}\to I_1$$

2. De $\{\varphi \to \psi, \neg\psi\}$ se deduce $\neg\varphi$.

$$\{\varphi \to \psi, \neg\psi\} \vdash \neg\varphi$$

Ejemplos de derivaciones

1. $\varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi$ es un teorema.

$$\vdash \varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi \wedge \psi]_1}{\psi}\wedge E \qquad \dfrac{[\varphi \wedge \psi]_1}{\varphi}\wedge E}{\psi \wedge \varphi}\wedge I}{\varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi} \to I_1$$

2. De $\{\varphi \to \psi, \neg\psi\}$ se deduce $\neg\varphi$.

$$\{\varphi \to \psi, \neg\psi\} \vdash \neg\varphi$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi} \to E \qquad \neg\psi}{\bot} \to E}{\neg\varphi} \to I_3$$

Más reglas con cancelación de hipótesis

Son las reglas de *reducción al absurdo* y de *eliminación de* $\vee$.

Más reglas con cancelación de hipótesis

Son las reglas de *reducción al absurdo* y de *eliminación de* $\vee$.

$$\dfrac{\begin{matrix}[\neg\varphi] \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\varphi}\, RAA$$

Más reglas con cancelación de hipótesis

Son las reglas de *reducción al absurdo* y de *eliminación de* $\vee$.

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\varphi]\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\varphi}\,RAA \qquad\qquad \dfrac{\varphi\vee\psi \quad \begin{array}{c}[\varphi]\\ \vdots\\ \chi\end{array} \quad \begin{array}{c}[\psi]\\ \vdots\\ \chi\end{array}}{\chi}\,\vee E.$$

Ejemplo usando *RAA*

De $\{\varphi, \neg\psi \to \neg\varphi\}$ se deduce ψ.

Ejemplo usando *RAA*

De $\{\varphi, \neg\psi \to \neg\varphi\}$ se deduce ψ.

$$\dfrac{\dfrac{\varphi \qquad \dfrac{[\neg\psi]_1 \quad \neg\psi \to \neg\varphi}{\neg\varphi} \to E}{\bot} \to E}{\psi}\, RAA_1$$

Ejemplo usando $\vee E$

Introducimos la última regla, con el personaje misterioso como protagonista:

$$\dfrac{\perp}{\varphi}\ \perp$$

Ejemplo usando $\vee E$

Introducimos la última regla, con el personaje misterioso como protagonista:

$$\frac{\perp}{\varphi}\perp$$

Veamos ahora que de $\neg\varphi \vee \psi$ se deduce $\varphi \to \psi$.

Ejemplo usando $\vee E$

Introducimos la última regla, con el personaje misterioso como protagonista:

$$\frac{\bot}{\varphi}\ \bot$$

Veamos ahora que de $\neg\varphi \vee \psi$ se deduce $\varphi \to \psi$.

$$\dfrac{\dfrac{\neg\varphi \vee \psi \qquad \dfrac{\dfrac{[\varphi]_2 \quad [\neg\varphi]_1}{\bot}\to E}{\psi}\ \bot \qquad [\psi]_1}{\psi}\ \vee E_1}{\varphi \to \psi}\to I_2$$

El conjunto $\mathscr{D}$ de las derivaciones

Definimos simultáneamente el conjunto de las **derivaciones** con sus nodos distinguidos $Concl$ de manera recursiva.

El conjunto $\mathscr{D}$ de las derivaciones

Definimos simultáneamente el conjunto de las **derivaciones** con sus nodos distinguidos $Concl$ de manera recursiva.

$\mathscr{D}$ es el menor conjunto de árboles decorados con proposiciones tales que:

El conjunto $\mathscr{D}$ de las derivaciones

Definimos simultáneamente el conjunto de las **derivaciones** con sus nodos distinguidos $Concl$ de manera recursiva.

$\mathscr{D}$ es el menor conjunto de árboles decorados con proposiciones tales que:

- Un árbol de un sólo nodo $\varphi \in PROP$ pertenece a $\mathscr{D}$.

El conjunto $\mathscr{D}$ de las derivaciones

Definimos simultáneamente el conjunto de las **derivaciones** con sus nodos distinguidos $Concl$ de manera recursiva.

$\mathscr{D}$ es el menor conjunto de árboles decorados con proposiciones tales que:

- Un árbol de un sólo nodo $\varphi \in PROP$ pertenece a $\mathscr{D}$.

$$Concl(\varphi) := \varphi.$$

El conjunto $\mathscr{D}$ de las derivaciones

Definimos simultáneamente el conjunto de las **derivaciones** con sus nodos distinguidos $Concl$ de manera recursiva.

$\mathscr{D}$ es el menor conjunto de árboles decorados con proposiciones tales que:

- Un árbol de un sólo nodo $\varphi \in PROP$ pertenece a $\mathscr{D}$.

$$Concl(\varphi) := \varphi.$$

- $\begin{array}{c} \vdots D_1 \\ \varphi \end{array} \in \mathscr{D}$ y $\begin{array}{c} \vdots D_2 \\ \varphi' \end{array} \in \mathscr{D} \implies$

El conjunto $\mathscr{D}$ de las derivaciones

Definimos simultáneamente el conjunto de las **derivaciones** con sus nodos distinguidos $Concl$ de manera recursiva.

$\mathscr{D}$ es el menor conjunto de árboles decorados con proposiciones tales que:

- Un árbol de un sólo nodo $\varphi \in PROP$ pertenece a $\mathscr{D}$.

$$Concl(\varphi) := \varphi.$$

- $$\begin{array}{c} \vdots D_1 \\ \varphi \end{array} \in \mathscr{D} \text{ y } \begin{array}{c} \vdots D_2 \\ \varphi' \end{array} \in \mathscr{D} \implies D := \dfrac{\begin{array}{c} \vdots D_1 \\ \varphi \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots D_2 \\ \varphi' \end{array}}{\varphi \wedge \varphi'} \wedge I \in \mathscr{D}.$$

El conjunto $\mathscr{D}$ de las derivaciones

Definimos simultáneamente el conjunto de las **derivaciones** con sus nodos distinguidos $Concl$ de manera recursiva.

$\mathscr{D}$ es el menor conjunto de árboles decorados con proposiciones tales que:

- Un árbol de un sólo nodo $\varphi \in PROP$ pertenece a $\mathscr{D}$.

$$Concl(\varphi) := \varphi.$$

- $\begin{array}{c} \vdots D_1 \\ \varphi \end{array} \in \mathscr{D}$ y $\begin{array}{c} \vdots D_2 \\ \varphi' \end{array} \in \mathscr{D} \implies D := \dfrac{\begin{array}{c} \vdots D_1 \\ \varphi \end{array} \qquad \begin{array}{c} \vdots D_2 \\ \varphi' \end{array}}{\varphi \wedge \varphi'} \wedge I \in \mathscr{D}$.

$$Concl(D) := \varphi \wedge \varphi'$$

El conjunto $\mathscr{D}$ de las derivaciones

- $\dfrac{\vdots\, D}{\varphi \wedge \varphi'} \in \mathscr{D} \implies$

El conjunto $\mathscr{D}$ de las derivaciones

- $$\begin{array}{c} \vdots D \\ \varphi \wedge \varphi' \end{array} \in \mathscr{D} \implies D_1 := \dfrac{\begin{array}{c} \vdots D \\ \varphi \wedge \varphi' \end{array}}{\varphi} \wedge E \in \mathscr{D}, \qquad D_2 := \dfrac{\begin{array}{c} \vdots D \\ \varphi \wedge \varphi' \end{array}}{\varphi'} \wedge E \in \mathscr{D}.$$

El conjunto $\mathscr{D}$ de las derivaciones

- $$\begin{array}{c} \vdots\, D \\ \varphi \wedge \varphi' \end{array} \in \mathscr{D} \implies D_1 := \dfrac{\begin{array}{c} \vdots\, D \\ \varphi \wedge \varphi' \end{array}}{\varphi} \wedge E \in \mathscr{D}, \qquad D_2 := \dfrac{\begin{array}{c} \vdots\, D \\ \varphi \wedge \varphi' \end{array}}{\varphi'} \wedge E \in \mathscr{D}.$$

  $$Concl(D_1) := \varphi \qquad Concl(D_2) := \varphi'$$

El conjunto $\mathscr{D}$ de las derivaciones

- $\begin{array}{c} \vdots D \\ \varphi \wedge \varphi' \end{array} \in \mathscr{D} \implies D_1 := \dfrac{\begin{array}{c} \vdots D \\ \varphi \wedge \varphi' \end{array}}{\varphi} \wedge E \in \mathscr{D}, \qquad D_2 := \dfrac{\begin{array}{c} \vdots D \\ \varphi \wedge \varphi' \end{array}}{\varphi'} \wedge E \in \mathscr{D}.$

$$Concl(D_1) := \varphi \qquad Concl(D_2) := \varphi'$$

- $\begin{array}{c} \varphi \\ \vdots D \\ \psi \end{array} \in \mathscr{D} \implies D' := \dfrac{\begin{array}{c} [\varphi] \\ \vdots D \\ \psi \end{array}}{\varphi \to \psi} \to I \in \mathscr{D}.$

El conjunto $\mathscr{D}$ de las derivaciones

- $\begin{array}{c} \vdots \, D_1 \\ \varphi \vee \psi \end{array} \in \mathscr{D}$, $\begin{array}{c} \varphi \\ \vdots \, D_2 \\ \chi \end{array} \in \mathscr{D}$ y $\begin{array}{c} \psi \\ \vdots \, D_3 \\ \chi \end{array} \in \mathscr{D} \implies$

- $\begin{array}{c} \vdots\, D_1 \\ \varphi \vee \psi \end{array} \in \mathscr{D}$, $\begin{array}{c} \varphi \\ \vdots\, D_2 \\ \chi \end{array} \in \mathscr{D}$ y $\begin{array}{c} \psi \\ \vdots\, D_3 \\ \chi \end{array} \in \mathscr{D} \implies$

$$D_4 \quad := \quad \dfrac{\begin{array}{c} \vdots\, D_1 \\ \varphi \vee \psi \end{array} \qquad \begin{array}{c} [\varphi] \\ \vdots\, D_2 \\ \chi \end{array} \qquad \begin{array}{c} [\psi] \\ \vdots\, D_3 \\ \chi \end{array}}{\chi} \vee E \quad \in \quad \mathscr{D}$$

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

El conjunto $\mathscr{D}$ de las derivaciones

- $(\vee I)$ y $(\perp)$ son como $(\wedge E)$

El conjunto $\mathscr{D}$ de las derivaciones

- $(\vee I)$ y $(\bot)$ son como $(\wedge E)$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D \\ \varphi \wedge \varphi'\end{array}}{\varphi'}\,\wedge E \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D \\ \varphi\end{array}}{\varphi \vee \varphi'}\,\vee I$$

El conjunto $\mathscr{D}$ de las derivaciones

- $(\vee I)$ y $(\bot)$ son como $(\wedge E)$

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\, D \\ \varphi \wedge \varphi'\end{matrix}}{\varphi'}\wedge E \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\, D \\ \varphi\end{matrix}}{\varphi \vee \varphi'}\vee I$$

- $(\to E)$ es como $(\wedge I)$.

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\, D_1 \\ \varphi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots\, D_2 \\ \varphi'\end{matrix}}{\varphi \wedge \varphi'}\wedge I \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\, D_1 \\ \varphi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots\, D_2 \\ \varphi \to \psi\end{matrix}}{\psi}\to E$$

El conjunto $\mathscr{D}$ de las derivaciones

- $(\vee I)$ y $(\bot)$ son como $(\wedge E)$

$$\dfrac{\begin{array}{c} \vdots\, D \\ \varphi \wedge \varphi' \end{array}}{\varphi'}\wedge E \qquad \dfrac{\begin{array}{c} \vdots\, D \\ \varphi \end{array}}{\varphi \vee \varphi'}\vee I$$

- $(\to E)$ es como $(\wedge I)$.

$$\dfrac{\begin{array}{c} \vdots\, D_1 \\ \varphi \end{array} \qquad \begin{array}{c} \vdots\, D_2 \\ \varphi' \end{array}}{\varphi \wedge \varphi'}\wedge I \qquad \dfrac{\begin{array}{c} \vdots\, D_1 \\ \varphi \end{array} \qquad \begin{array}{c} \vdots\, D_2 \\ \varphi \to \psi \end{array}}{\psi}\to E$$

- (RAA) es como $(\to I)$.

Recursión en derivaciones: Hip

Al igual que con $PROP$, se puede hacer recursión en $\mathscr{D}$.

Recursión en derivaciones: Hip

Al igual que con $PROP$, se puede hacer recursión en $\mathscr{D}$.

Definimos recursivamente el conjunto de las **hipótesis no canceladas** $Hip(D)$ de una derivación D.

Recursión en derivaciones: Hip

Al igual que con $PROP$, se puede hacer recursión en $\mathscr{D}$.

Definimos recursivamente el conjunto de las **hipótesis no canceladas** $Hip(D)$ de una derivación D.

$$\boxed{PROP} \;\; Hip(\varphi) := \{\varphi\}.$$

Recursión en derivaciones: Hip

Al igual que con $PROP$, se puede hacer recursión en $\mathscr{D}$.

Definimos recursivamente el conjunto de las **hipótesis no canceladas** $Hip(D)$ de una derivación D.

$\boxed{PROP}$ $Hip(\varphi) := \{\varphi\}$.

$$\boxed{\wedge I} \quad D = \dfrac{\begin{array}{cc} \vdots D_1 & \vdots D_2 \\ \varphi & \varphi' \end{array}}{\varphi \wedge \varphi'} \wedge I \quad \in \mathscr{D}.$$

$$Hip(D) = Hip(D_1) \cup Hip(D_2).$$

Recursión en derivaciones: *Hip*

$$\boxed{\wedge E}\quad D_1 = \dfrac{\begin{array}{c}\vdots D\\ \varphi \wedge \varphi'\end{array}}{\varphi}\wedge E \in \mathscr{D}, \qquad D_2 := \dfrac{\begin{array}{c}\vdots D\\ \varphi \wedge \varphi'\end{array}}{\varphi'}\wedge E \in \mathscr{D}.$$

$$Hip(D_1) = Hip(D_2) := Hip(D).$$

Recursión en derivaciones: *Hip*

$$\boxed{\wedge E}\quad D_1 = \dfrac{\begin{array}{c} \vdots\, D \\ \varphi \wedge \varphi' \end{array}}{\varphi}\wedge E \in \mathscr{D}, \qquad D_2 := \dfrac{\begin{array}{c} \vdots\, D \\ \varphi \wedge \varphi' \end{array}}{\varphi'}\wedge E \in \mathscr{D}.$$

$$Hip(D_1) = Hip(D_2) := Hip(D).$$

$$\boxed{\to I}\quad D' = \dfrac{\begin{array}{c} [\varphi] \\ \vdots\, D \\ \psi \end{array}}{\varphi \to \psi}\to I \in \mathscr{D}.$$

$$Hip(D') := Hip(D) \setminus \{\varphi\}.$$

Recursión en derivaciones: *Hip*

$\boxed{\vee E}$

$$D_4 \quad = \quad \dfrac{\begin{array}{c} \vdots\, D_1 \\ \varphi \vee \psi \end{array} \qquad \begin{array}{c} [\varphi] \\ \vdots\, D_2 \\ \chi \end{array} \qquad \begin{array}{c} [\psi] \\ \vdots\, D_3 \\ \chi \end{array}}{\chi}\,\vee E \quad \in \quad \mathscr{D}$$

$$Hip(D_4) = Hip(D_1) \cup \big(Hip(D_2) \setminus \{\varphi\}\big) \cup \big(Hip(D_2) \setminus \{\psi\}\big)$$

Recursión en derivaciones: Hip

$\boxed{\vee I,\ \bot}$ Son como $(\wedge E)$

Recursión en derivaciones: Hip

$\boxed{\vee I,\ \perp}$ Son como $(\wedge E)$ $\longrightarrow$ Hip se define igual.

$$\dfrac{\begin{array}{c} \vdots\, D \\ \varphi \wedge \varphi' \end{array}}{\varphi'}\wedge E \qquad \dfrac{\begin{array}{c} \vdots\, D \\ \varphi \end{array}}{\varphi \vee \varphi'}\vee I$$

Recursión en derivaciones: *Hip*

$\boxed{\vee I, \bot}$ Son como $(\wedge E)$ $\longrightarrow$ Hip se define igual.

$$\dfrac{\overset{\vdots\, D}{\varphi \wedge \varphi'}}{\varphi'}\wedge E \qquad \dfrac{\overset{\vdots\, D}{\varphi}}{\varphi \vee \varphi'}\vee I$$

$\boxed{\to E}$ Es como $(\wedge I)$.

$$\dfrac{\overset{\vdots\, D_1}{\varphi} \qquad \overset{\vdots\, D_2}{\varphi'}}{\varphi \wedge \varphi'}\wedge I \qquad \dfrac{\overset{\vdots\, D_1}{\varphi} \qquad \overset{\vdots\, D_2}{\varphi \to \psi}}{\psi}\to E$$

Recursión en derivaciones: *Hip*

$\boxed{\vee I, \bot}$ Son como $(\wedge E)$ $\longrightarrow$ Hip se define igual.

$$\dfrac{\begin{matrix} \vdots\, D \\ \varphi \wedge \varphi' \end{matrix}}{\varphi'} \wedge E \qquad \dfrac{\begin{matrix} \vdots\, D \\ \varphi \end{matrix}}{\varphi \vee \varphi'} \vee I$$

$\boxed{\to E}$ Es como $(\wedge I)$.

$$\dfrac{\begin{matrix} \vdots\, D_1 \\ \varphi \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \vdots\, D_2 \\ \varphi' \end{matrix}}{\varphi \wedge \varphi'} \wedge I \qquad \dfrac{\begin{matrix} \vdots\, D_1 \\ \varphi \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \vdots\, D_2 \\ \varphi \to \psi \end{matrix}}{\psi} \to E$$

$\boxed{RAA}$ Es como $(\to I)$.