Introducción a la Lógica y la Computación

Mariana Badano Héctor Gramaglia Pedro Sánchez Terraf
M. Clara Gorín Matías Steinberg

FaMAF, 4 de septiembre de 2020

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Contenidos estimados para hoy

1. Posets Reticulados y Retículos
   - Subret$\{$ícul,iculad$\}$os
   - Isomorfismo de retículos

2. Clases particulares de reticulados
   - Reticulados acotados y complementados
   - Reticulados distributivos

Definición

$(L, \leq)$ es un poset **reticulado** si para todo $a, b \in L$ existen $a \vee b := \sup\{a, b\}$ y $a \wedge b := \text{ínf}\{a, b\}$.

Posets Reticulados y Retículos

Definición

$(L, \leq)$ es un poset **reticulado** si para todo $a, b \in L$ existen $a \vee b := \sup\{a, b\}$ y $a \wedge b := \text{ínf}\{a, b\}$.

Definición

Un **retículo** $(L, \sqcup, \sqcap)$ consta de un conjunto L y dos operaciones (binarias) $\sqcup : L \times L \to L$ y $\sqcap : L \times L \to L$ que cumplen:

1. Idempotencia: $x \sqcup x = x \sqcap x = x$.
2. Conmutatividad: $x \sqcup y = y \sqcup x \qquad x \sqcap y = y \sqcap x$.
3. Absorción: $x \sqcup (x \sqcap y) = x \qquad x \sqcap (x \sqcup y) = x$.
4. Asociatividad: $(x \sqcup y) \sqcup z = x \sqcup (y \sqcup z) \qquad (x \sqcap y) \sqcap z = x \sqcap (y \sqcap z)$.

Posets Reticulados y Retículos

1. Idempotencia: $x \sqcup x = x \sqcap x = x$.
2. Conmutatividad: $x \sqcup y = y \sqcup x \qquad x \sqcap y = y \sqcap x$.
3. Absorción: $x \sqcup (x \sqcap y) = x \qquad x \sqcap (x \sqcup y) = x$.
4. Asociatividad: $(x \sqcup y) \sqcup z = x \sqcup (y \sqcup z) \qquad (x \sqcap y) \sqcap z = x \sqcap (y \sqcap z)$.

Posets Reticulados y Retículos

1. Idempotencia: $x \sqcup x = x \sqcap x = x$.
2. Conmutatividad: $x \sqcup y = y \sqcup x \qquad x \sqcap y = y \sqcap x$.
3. Absorción: $x \sqcup (x \sqcap y) = x \qquad x \sqcap (x \sqcup y) = x$.
4. Asociatividad: $(x \sqcup y) \sqcup z = x \sqcup (y \sqcup z) \qquad (x \sqcap y) \sqcap z = x \sqcap (y \sqcap z)$.

Teorema

Sea $(L, \sqcup, \sqcap)$ *un retículo. Entonces,* $x \leq y \;:\Longleftrightarrow\; x \sqcup y = y$ *es un orden parcial sobre* L *tal que* $x \sqcup y = \sup\{x, y\}$ *y* $x \sqcap y = \inf\{x, y\}$

Posets Reticulados y Retículos

1. Idempotencia: $x \sqcup x = x \sqcap x = x$.
2. Conmutatividad: $x \sqcup y = y \sqcup x \qquad x \sqcap y = y \sqcap x$.
3. Absorción: $x \sqcup (x \sqcap y) = x \qquad x \sqcap (x \sqcup y) = x$.
4. Asociatividad: $(x \sqcup y) \sqcup z = x \sqcup (y \sqcup z) \qquad (x \sqcap y) \sqcap z = x \sqcap (y \sqcap z)$.

Teorema

Sea $(L, \sqcup, \sqcap)$ un retículo. Entonces, $x \leq y \;:\Longleftrightarrow\; x \sqcup y = y$ es un orden parcial sobre L tal que $x \sqcup y = \sup\{x, y\}$ y $x \sqcap y = \text{ínf}\{x, y\}$

Demostración.

$\boxed{\leq \text{ reflexiva}}$ por Idempotencia.

Posets Reticulados y Retículos

1. Idempotencia: $x \sqcup x = x \sqcap x = x$.
2. Conmutatividad: $x \sqcup y = y \sqcup x \qquad x \sqcap y = y \sqcap x$.
3. Absorción: $x \sqcup (x \sqcap y) = x \qquad x \sqcap (x \sqcup y) = x$.
4. Asociatividad: $(x \sqcup y) \sqcup z = x \sqcup (y \sqcup z) \qquad (x \sqcap y) \sqcap z = x \sqcap (y \sqcap z)$.

Teorema

Sea $(L, \sqcup, \sqcap)$ un retículo. Entonces, $x \leq y \;\; :\Longleftrightarrow \;\; x \sqcup y = y$ es un orden parcial sobre L tal que $x \sqcup y = \sup\{x, y\}$ y $x \sqcap y = \inf\{x, y\}$

Demostración.

$\boxed{\leq \text{ reflexiva}}$ por Idempotencia.

$\boxed{\leq \text{ antisimétrica}}$ por Conmutatividad: $\overbrace{y = x \sqcup y}^{x \leq y} = \overbrace{y \sqcup x = x}^{y \leq x}$.

Posets Reticulados y Retículos

1. Idempotencia: $x \sqcup x = x \sqcap x = x$.
2. Conmutatividad: $x \sqcup y = y \sqcup x \qquad x \sqcap y = y \sqcap x$.
3. Absorción: $x \sqcup (x \sqcap y) = x \qquad x \sqcap (x \sqcup y) = x$.
4. Asociatividad: $(x \sqcup y) \sqcup z = x \sqcup (y \sqcup z) \qquad (x \sqcap y) \sqcap z = x \sqcap (y \sqcap z)$.

Teorema

Sea $(L, \sqcup, \sqcap)$ un retículo. Entonces, $x \leq y \ :\Longleftrightarrow\ x \sqcup y = y$ es un orden parcial sobre L tal que $x \sqcup y = \sup\{x, y\}$ y $x \sqcap y = \inf\{x, y\}$

Demostración.

$\boxed{\leq \text{ reflexiva}}$ por Idempotencia.

$\boxed{\leq \text{ antisimétrica}}$ por Conmutatividad: $\overbrace{y = x \sqcup y}^{x \leq y} = \overbrace{y \sqcup x = x}^{y \leq x}$.

$\boxed{\leq \text{ transitiva}}$ por Asociatividad:

$\overbrace{z = \underline{y} \sqcup z}^{y \leq z} =$

Posets Reticulados y Retículos

1. Idempotencia: $x \sqcup x = x \sqcap x = x$.
2. Conmutatividad: $x \sqcup y = y \sqcup x \qquad x \sqcap y = y \sqcap x$.
3. Absorción: $x \sqcup (x \sqcap y) = x \qquad x \sqcap (x \sqcup y) = x$.
4. Asociatividad: $(x \sqcup y) \sqcup z = x \sqcup (y \sqcup z) \qquad (x \sqcap y) \sqcap z = x \sqcap (y \sqcap z)$.

Teorema

Sea $(L, \sqcup, \sqcap)$ un retículo. Entonces, $x \leq y \ :\Longleftrightarrow\ x \sqcup y = y$ es un orden parcial sobre L tal que $x \sqcup y = \sup\{x, y\}$ y $x \sqcap y = \text{ínf}\{x, y\}$

Demostración.

$\boxed{\leq \text{ reflexiva}}$ por Idempotencia.

$\boxed{\leq \text{ antisimétrica}}$ por Conmutatividad: $\overbrace{y = x \sqcup y}^{x \leq y} = \overbrace{y \sqcup x = x}^{y \leq x}$.

$\boxed{\leq \text{ transitiva}}$ por Asociatividad:

$$\overbrace{z = \underline{y} \sqcup z}^{y \leq z} = (\underline{x \sqcup y}) \sqcup z =$$

Posets Reticulados y Retículos

1. Idempotencia: $x \sqcup x = x \sqcap x = x$.
2. Conmutatividad: $x \sqcup y = y \sqcup x \qquad x \sqcap y = y \sqcap x$.
3. Absorción: $x \sqcup (x \sqcap y) = x \qquad x \sqcap (x \sqcup y) = x$.
4. Asociatividad: $(x \sqcup y) \sqcup z = x \sqcup (y \sqcup z) \qquad (x \sqcap y) \sqcap z = x \sqcap (y \sqcap z)$.

Teorema

Sea $(L, \sqcup, \sqcap)$ un retículo. Entonces, $x \leq y \;\; :\Longleftrightarrow \;\; x \sqcup y = y$ es un orden parcial sobre L tal que $x \sqcup y = \sup\{x, y\}$ y $x \sqcap y = \inf\{x, y\}$

Demostración.

$\boxed{\leq \text{ reflexiva}}$ por Idempotencia.

$\boxed{\leq \text{ antisimétrica}}$ por Conmutatividad: $\overbrace{y = x \sqcup y}^{x \leq y} = \overbrace{y \sqcup x = x}^{y \leq x}$.

$\boxed{\leq \text{ transitiva}}$ por Asociatividad:

$\overbrace{z = \underline{y} \sqcup z}^{y \leq z} = (\underline{x \sqcup y}) \sqcup z = x \sqcup (y \sqcup z) =$

Posets Reticulados y Retículos

1. Idempotencia: $x \sqcup x = x \sqcap x = x$.
2. Conmutatividad: $x \sqcup y = y \sqcup x \qquad x \sqcap y = y \sqcap x$.
3. Absorción: $x \sqcup (x \sqcap y) = x \qquad x \sqcap (x \sqcup y) = x$.
4. Asociatividad: $(x \sqcup y) \sqcup z = x \sqcup (y \sqcup z) \qquad (x \sqcap y) \sqcap z = x \sqcap (y \sqcap z)$.

Teorema

Sea $(L, \sqcup, \sqcap)$ un retículo. Entonces, $x \leq y \;:\Longleftrightarrow\; x \sqcup y = y$ es un orden parcial sobre L tal que $x \sqcup y = \sup\{x, y\}$ y $x \sqcap y = \inf\{x, y\}$

Demostración.

$\boxed{\leq \text{ reflexiva}}$ por Idempotencia.

$\boxed{\leq \text{ antisimétrica}}$ por Conmutatividad: $\overbrace{y = x \sqcup y}^{x \leq y} = \overbrace{y \sqcup x = x}^{y \leq x}$.

$\boxed{\leq \text{ transitiva}}$ por Asociatividad:

$$\overbrace{z = \underline{y} \sqcup z}^{y \leq z} = (\underline{x \sqcup y}) \sqcup z = x \sqcup (y \sqcup z) = x \sqcup z$$

Posets Reticulados y Retículos

1. Idempotencia: $x \sqcup x = x \sqcap x = x$.
2. Conmutatividad: $x \sqcup y = y \sqcup x \qquad x \sqcap y = y \sqcap x$.
3. Absorción: $x \sqcup (x \sqcap y) = x \qquad x \sqcap (x \sqcup y) = x$.
4. Asociatividad: $(x \sqcup y) \sqcup z = x \sqcup (y \sqcup z) \qquad (x \sqcap y) \sqcap z = x \sqcap (y \sqcap z)$.

Teorema

Sea $(L, \sqcup, \sqcap)$ *un retículo. Entonces,* $x \leq y \;:\Longleftrightarrow\; x \sqcup y = y$ *es un orden parcial sobre* L *tal que* $x \sqcup y = \sup\{x, y\}$ *y* $x \sqcap y = \inf\{x, y\}$

Demostración.

$\boxed{\leq \text{ reflexiva}}$ por Idempotencia.

$\boxed{\leq \text{ antisimétrica}}$ por Conmutatividad: $\overbrace{y = x \sqcup y}^{x \leq y} = \overbrace{y \sqcup x = x}^{y \leq x}$.

$\boxed{\leq \text{ transitiva}}$ por Asociatividad:

$$\overbrace{z = \underline{y} \sqcup z}^{y \leq z} = (\underline{x \sqcup y}) \sqcup z = x \sqcup (y \sqcup z) = x \sqcup z \implies x \leq z.$$

Posets Reticulados y Retículos

1. Idempotencia: $x \sqcup x = x \sqcap x = x$.
2. Conmutatividad: $x \sqcup y = y \sqcup x \qquad x \sqcap y = y \sqcap x$.
3. Absorción: $x \sqcup (x \sqcap y) = x \qquad x \sqcap (x \sqcup y) = x$.
4. Asociatividad: $(x \sqcup y) \sqcup z = x \sqcup (y \sqcup z) \qquad (x \sqcap y) \sqcap z = x \sqcap (y \sqcap z)$.

Teorema

Sea $(L, \sqcup, \sqcap)$ un retículo. Entonces, $x \leq y \;:\Longleftrightarrow\; x \sqcup y = y$ es un orden parcial sobre L tal que $x \sqcup y = \sup\{x, y\}$ y $x \sqcap y = \inf\{x, y\}$

Demostración.

$\boxed{x \sqcup y = \sup\{x, y\}}$ Es cota superior: ejercicio.

Posets Reticulados y Retículos

1. Idempotencia: $x \sqcup x = x \sqcap x = x$.
2. Conmutatividad: $x \sqcup y = y \sqcup x \qquad x \sqcap y = y \sqcap x$.
3. Absorción: $x \sqcup (x \sqcap y) = x \qquad x \sqcap (x \sqcup y) = x$.
4. Asociatividad: $(x \sqcup y) \sqcup z = x \sqcup (y \sqcup z) \qquad (x \sqcap y) \sqcap z = x \sqcap (y \sqcap z)$.

Teorema

Sea $(L, \sqcup, \sqcap)$ un retículo. Entonces, $x \leq y \ :\Longleftrightarrow \ x \sqcup y = y$ es un orden parcial sobre L tal que $x \sqcup y = \sup\{x, y\}$ y $x \sqcap y = \inf\{x, y\}$

Demostración.

$\boxed{x \sqcup y = \sup\{x, y\}}$ Es cota superior: ejercicio.

Es la menor: supongamos $x \sqcup u = u$ y $y \sqcup u = u$. Vemos $x \sqcup y \leq u$:

Posets Reticulados y Retículos

1. Idempotencia: $x \sqcup x = x \sqcap x = x$.
2. Conmutatividad: $x \sqcup y = y \sqcup x \qquad x \sqcap y = y \sqcap x$.
3. Absorción: $x \sqcup (x \sqcap y) = x \qquad x \sqcap (x \sqcup y) = x$.
4. Asociatividad: $(x \sqcup y) \sqcup z = x \sqcup (y \sqcup z) \qquad (x \sqcap y) \sqcap z = x \sqcap (y \sqcap z)$.

Teorema

Sea $(L, \sqcup, \sqcap)$ un retículo. Entonces, $x \leq y \;:\Longleftrightarrow\; x \sqcup y = y$ es un orden parcial sobre L tal que $x \sqcup y = \sup\{x, y\}$ y $x \sqcap y = \inf\{x, y\}$

Demostración.

$\boxed{x \sqcup y = \sup\{x, y\}}$ Es cota superior: ejercicio.

Es la menor: supongamos $x \sqcup u = u$ y $y \sqcup u = u$. Vemos $x \sqcup y \leq u$:

$(x \sqcup y) \sqcup u =$

Posets Reticulados y Retículos

1. Idempotencia: $x \sqcup x = x \sqcap x = x$.
2. Conmutatividad: $x \sqcup y = y \sqcup x \qquad x \sqcap y = y \sqcap x$.
3. Absorción: $x \sqcup (x \sqcap y) = x \qquad x \sqcap (x \sqcup y) = x$.
4. Asociatividad: $(x \sqcup y) \sqcup z = x \sqcup (y \sqcup z) \qquad (x \sqcap y) \sqcap z = x \sqcap (y \sqcap z)$.

Teorema

Sea $(L, \sqcup, \sqcap)$ *un retículo. Entonces,* $x \leq y \; :\Longleftrightarrow \; x \sqcup y = y$ *es un orden parcial sobre* L *tal que* $x \sqcup y = \sup\{x, y\}$ *y* $x \sqcap y = \inf\{x, y\}$

Demostración.

$\boxed{x \sqcup y = \sup\{x, y\}}$ Es cota superior: ejercicio.

Es la menor: supongamos $x \sqcup u = u$ y $y \sqcup u = u$. Vemos $x \sqcup y \leq u$:

$(x \sqcup y) \sqcup u = x \sqcup (y \sqcup u) =$

Posets Reticulados y Retículos

1. Idempotencia: $x \sqcup x = x \sqcap x = x$.
2. Conmutatividad: $x \sqcup y = y \sqcup x \qquad x \sqcap y = y \sqcap x$.
3. Absorción: $x \sqcup (x \sqcap y) = x \qquad x \sqcap (x \sqcup y) = x$.
4. Asociatividad: $(x \sqcup y) \sqcup z = x \sqcup (y \sqcup z) \qquad (x \sqcap y) \sqcap z = x \sqcap (y \sqcap z)$.

Teorema

Sea $(L, \sqcup, \sqcap)$ un retículo. Entonces, $x \leq y \;:\Longleftrightarrow\; x \sqcup y = y$ es un orden parcial sobre L tal que $x \sqcup y = \sup\{x,y\}$ y $x \sqcap y = \inf\{x,y\}$

Demostración.

$\boxed{x \sqcup y = \sup\{x,y\}}$ Es cota superior: ejercicio.

Es la menor: supongamos $x \sqcup u = u$ y $y \sqcup u = u$. Vemos $x \sqcup y \leq u$:

$(x \sqcup y) \sqcup u = x \sqcup (y \sqcup u) = x \sqcup u =$

Posets Reticulados y Retículos

1. Idempotencia: $x \sqcup x = x \sqcap x = x$.
2. Conmutatividad: $x \sqcup y = y \sqcup x \qquad x \sqcap y = y \sqcap x$.
3. Absorción: $x \sqcup (x \sqcap y) = x \qquad x \sqcap (x \sqcup y) = x$.
4. Asociatividad: $(x \sqcup y) \sqcup z = x \sqcup (y \sqcup z) \qquad (x \sqcap y) \sqcap z = x \sqcap (y \sqcap z)$.

Teorema

Sea $(L, \sqcup, \sqcap)$ un retículo. Entonces, $x \leq y \;:\Longleftrightarrow\; x \sqcup y = y$ es un orden parcial sobre L tal que $x \sqcup y = \sup\{x, y\}$ y $x \sqcap y = \inf\{x, y\}$

Demostración.

$\boxed{x \sqcup y = \sup\{x, y\}}$ Es cota superior: ejercicio.

Es la menor: supongamos $x \sqcup u = u$ y $y \sqcup u = u$. Vemos $x \sqcup y \leq u$:

$(x \sqcup y) \sqcup u = x \sqcup (y \sqcup u) = x \sqcup u = u \implies x \sqcup y \leq u$.

Posets Reticulados y Retículos

1. Idempotencia: $x \sqcup x = x \sqcap x = x$.
2. Conmutatividad: $x \sqcup y = y \sqcup x \qquad x \sqcap y = y \sqcap x$.
3. Absorción: $x \sqcup (x \sqcap y) = x \qquad x \sqcap (x \sqcup y) = x$.
4. Asociatividad: $(x \sqcup y) \sqcup z = x \sqcup (y \sqcup z) \qquad (x \sqcap y) \sqcap z = x \sqcap (y \sqcap z)$.

Teorema

Sea $(L, \sqcup, \sqcap)$ un retículo. Entonces, $x \leq y \;:\Longleftrightarrow\; x \sqcup y = y$ es un orden parcial sobre L tal que $x \sqcup y = \sup\{x,y\}$ y $x \sqcap y = \inf\{x,y\}$

Demostración.

$\boxed{x \sqcup y = \sup\{x,y\}}$ Es cota superior: ejercicio.

Es la menor: supongamos $x \sqcup u = u$ y $y \sqcup u = u$. Vemos $x \sqcup y \leq u$:

$(x \sqcup y) \sqcup u = x \sqcup (y \sqcup u) = x \sqcup u = u \implies x \sqcup y \leq u$.

$\boxed{x \sqcap y = \inf\{x,y\}}$

Posets Reticulados y Retículos

1. Idempotencia: $x \sqcup x = x \sqcap x = x$.
2. Conmutatividad: $x \sqcup y = y \sqcup x \qquad x \sqcap y = y \sqcap x$.
3. Absorción: $x \sqcup (x \sqcap y) = x \qquad x \sqcap (x \sqcup y) = x$.
4. Asociatividad: $(x \sqcup y) \sqcup z = x \sqcup (y \sqcup z) \qquad (x \sqcap y) \sqcap z = x \sqcap (y \sqcap z)$.

Teorema

Sea $(L, \sqcup, \sqcap)$ un retículo. Entonces, $x \leq y \;:\Longleftrightarrow\; x \sqcup y = y$ es un orden parcial sobre L tal que $x \sqcup y = \sup\{x, y\}$ y $x \sqcap y = \inf\{x, y\}$

Demostración.

$\boxed{x \sqcup y = \sup\{x, y\}}$ Es cota superior: ejercicio.

Es la menor: supongamos $x \sqcup u = u$ y $y \sqcup u = u$. Vemos $x \sqcup y \leq u$:

$(x \sqcup y) \sqcup u = x \sqcup (y \sqcup u) = x \sqcup u = u \implies x \sqcup y \leq u$.

$\boxed{x \sqcap y = \inf\{x, y\}}$ **¡Dualidad!** Basta ver que $x \geq y \iff x \sqcap y = y$:

Posets Reticulados y Retículos

1. Idempotencia: $x \sqcup x = x \sqcap x = x$.
2. Conmutatividad: $x \sqcup y = y \sqcup x \qquad x \sqcap y = y \sqcap x$.
3. Absorción: $x \sqcup (x \sqcap y) = x \qquad x \sqcap (x \sqcup y) = x$.
4. Asociatividad: $(x \sqcup y) \sqcup z = x \sqcup (y \sqcup z) \qquad (x \sqcap y) \sqcap z = x \sqcap (y \sqcap z)$.

Teorema

Sea $(L, \sqcup, \sqcap)$ un retículo. Entonces, $x \leq y \;:\Longleftrightarrow\; x \sqcup y = y$ es un orden parcial sobre L tal que $x \sqcup y = \sup\{x, y\}$ y $x \sqcap y = \inf\{x, y\}$

Demostración.

$\boxed{x \sqcup y = \sup\{x, y\}}$ Es cota superior: ejercicio.

Es la menor: supongamos $x \sqcup u = u$ y $y \sqcup u = u$. Vemos $x \sqcup y \leq u$:

$(x \sqcup y) \sqcup u = x \sqcup (y \sqcup u) = x \sqcup u = u \implies x \sqcup y \leq u$.

$\boxed{x \sqcap y = \inf\{x, y\}}$ **¡Dualidad!** Basta ver que $x \geq y \iff x \sqcap y = y$:

$(\Rightarrow)\; x \sqcap y =$

Posets Reticulados y Retículos

1. Idempotencia: $x \sqcup x = x \sqcap x = x$.
2. Conmutatividad: $x \sqcup y = y \sqcup x \qquad x \sqcap y = y \sqcap x$.
3. Absorción: $x \sqcup (x \sqcap y) = x \qquad x \sqcap (x \sqcup y) = x$.
4. Asociatividad: $(x \sqcup y) \sqcup z = x \sqcup (y \sqcup z) \qquad (x \sqcap y) \sqcap z = x \sqcap (y \sqcap z)$.

Teorema

Sea $(L, \sqcup, \sqcap)$ un retículo. Entonces, $x \leq y \;:\Longleftrightarrow\; x \sqcup y = y$ es un orden parcial sobre L tal que $x \sqcup y = \sup\{x, y\}$ y $x \sqcap y = \text{ínf}\{x, y\}$

Demostración.

$\boxed{x \sqcup y = \sup\{x, y\}}$ Es cota superior: ejercicio.

Es la menor: supongamos $x \sqcup u = u$ y $y \sqcup u = u$. Vemos $x \sqcup y \leq u$:

$(x \sqcup y) \sqcup u = x \sqcup (y \sqcup u) = x \sqcup u = u \implies x \sqcup y \leq u$.

$\boxed{x \sqcap y = \text{ínf}\{x, y\}}$ **¡Dualidad!** Basta ver que $x \geq y \iff x \sqcap y = y$:

$(\Rightarrow)\; x \sqcap y = (x \sqcup y) \sqcap y =$

Posets Reticulados y Retículos

1. Idempotencia: $x \sqcup x = x \sqcap x = x$.
2. Conmutatividad: $x \sqcup y = y \sqcup x \qquad x \sqcap y = y \sqcap x$.
3. Absorción: $x \sqcup (x \sqcap y) = x \qquad x \sqcap (x \sqcup y) = x$.
4. Asociatividad: $(x \sqcup y) \sqcup z = x \sqcup (y \sqcup z) \qquad (x \sqcap y) \sqcap z = x \sqcap (y \sqcap z)$.

Teorema

Sea $(L, \sqcup, \sqcap)$ un retículo. Entonces, $x \leq y \;:\Longleftrightarrow\; x \sqcup y = y$ es un orden parcial sobre L tal que $x \sqcup y = \sup\{x, y\}$ y $x \sqcap y = \text{ínf}\{x, y\}$

Demostración.

$\boxed{x \sqcup y = \sup\{x, y\}}$ Es cota superior: ejercicio.

Es la menor: supongamos $x \sqcup u = u$ y $y \sqcup u = u$. Vemos $x \sqcup y \leq u$:

$(x \sqcup y) \sqcup u = x \sqcup (y \sqcup u) = x \sqcup u = u \implies x \sqcup y \leq u$.

$\boxed{x \sqcap y = \text{ínf}\{x, y\}}$ **¡Dualidad!** Basta ver que $x \geq y \iff x \sqcap y = y$:

$(\Rightarrow)\; x \sqcap y = (x \sqcup y) \sqcap y = y$.

Posets Reticulados y Retículos

1. Idempotencia: $x \sqcup x = x \sqcap x = x$.
2. Conmutatividad: $x \sqcup y = y \sqcup x \qquad x \sqcap y = y \sqcap x$.
3. Absorción: $x \sqcup (x \sqcap y) = x \qquad x \sqcap (x \sqcup y) = x$.
4. Asociatividad: $(x \sqcup y) \sqcup z = x \sqcup (y \sqcup z) \qquad (x \sqcap y) \sqcap z = x \sqcap (y \sqcap z)$.

Teorema

Sea $(L, \sqcup, \sqcap)$ *un retículo. Entonces,* $x \leq y \;:\Longleftrightarrow\; x \sqcup y = y$ *es un orden parcial sobre* L *tal que* $x \sqcup y = \sup\{x, y\}$ *y* $x \sqcap y = \inf\{x, y\}$

Demostración.

$\boxed{x \sqcup y = \sup\{x, y\}}$ Es cota superior: ejercicio.

Es la menor: supongamos $x \sqcup u = u$ y $y \sqcup u = u$. Vemos $x \sqcup y \leq u$:

$(x \sqcup y) \sqcup u = x \sqcup (y \sqcup u) = x \sqcup u = u \implies x \sqcup y \leq u$.

$\boxed{x \sqcap y = \inf\{x, y\}}$ **¡Dualidad!** Basta ver que $x \geq y \iff x \sqcap y = y$:

$(\Rightarrow)$ $x \sqcap y = (x \sqcup y) \sqcap y = y$.

$(\Leftarrow)$ $x \sqcup y = x \sqcup (x \sqcap y) = x$.

Posets reticulados = retículos

De ahora en más, la palabra **reticulado** (a secas) se referirá tanto a un poset reticulado como al retículo asociado, y denotaremos las operaciones de este último simplemente con $\vee$ y $\wedge$.

Posets reticulados = retículos

De ahora en más, la palabra **reticulado** (a secas) se referirá tanto a un poset reticulado como al retículo asociado, y denotaremos las operaciones de este último simplemente con $\vee$ y $\wedge$.
Usaremos los términos específicos si queremos dar énfasis a alguno de los aspectos (relacional o algebraico, respectivamente).

Posets reticulados = retículos

De ahora en más, la palabra **reticulado** (a secas) se referirá tanto a un poset reticulado como al retículo asociado, y denotaremos las operaciones de este último simplemente con $\vee$ y $\wedge$.
Usaremos los términos específicos si queremos dar énfasis a alguno de los aspectos (relacional o algebraico, respectivamente).

Seguiremos un momento con el aspecto algebraico de los reticulados.

Los ejemplos canónicos

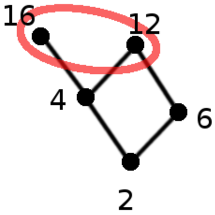
Ejemplo

1. Todos los órdenes totales.
2. $(\mathbb{N}, |)$.
3. $(\mathscr{P}(A), \subseteq)$ para cada conjunto A.

Los ejemplos canónicos

Ejemplo

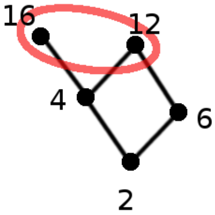
1. Todos los órdenes totales.
2. $(\mathbb{N}, |)$. Subposets no preservan $\vee$ ni $\wedge$
3. $(\mathscr{P}(A), \subseteq)$ para cada conjunto A.



Los ejemplos canónicos

Ejemplo

1. Todos los órdenes totales.
2. $(\mathbb{N}, |)$. Subposets no preservan $\vee$ ni $\wedge$
3. $(\mathscr{P}(A), \subseteq)$ para cada conjunto A.

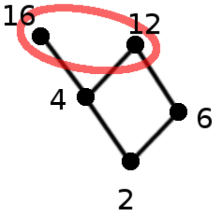


Otro ejemplo similar es el reticulado $L := ([0,1) \cup [2,3), \leqslant)$ de la clase pasada:

Los ejemplos canónicos

Ejemplo

1. Todos los órdenes totales.
2. $(\mathbb{N}, |)$. Subposets no preservan $\vee$ ni $\wedge$
3. $(\mathscr{P}(A), \subseteq)$ para cada conjunto A.



Otro ejemplo similar es el reticulado $L := ([0,1) \cup [2,3), \leqslant)$ de la clase pasada:

$$\sup^{\mathbb{R}}[0,1) = 1 \neq 2 = \sup^{L}[0,1).$$

Subreticulados

Estructuras algebraicas conocidas

$(\mathbb{N}, +)$ es una "subálgebra" de $(\mathbb{R}, +)$:

Subreticulados

Estructuras algebraicas conocidas

$(\mathbb{N}, +)$ es una “subálgebra” de $(\mathbb{R}, +)$: la suma de dos números naturales me da natural.

Subreticulados

Estructuras algebraicas conocidas

$(\mathbb{N}, +)$ es una “subálgebra” de $(\mathbb{R}, +)$: la suma de dos números naturales me da natural.

Definición

Sea $(L, \vee, \wedge)$ un retículo. $S \subseteq L$ es un **subuniverso** de $(L, \vee, \wedge)$ si es cerrado por las operaciones $\vee$ y $\wedge$.

Subreticulados

Estructuras algebraicas conocidas

$(\mathbb{N}, +)$ es una “subálgebra” de $(\mathbb{R}, +)$: la suma de dos números naturales me da natural.

Definición

Sea $(L, \vee, \wedge)$ un retículo. $S \subseteq L$ es un **subuniverso** de $(L, \vee, \wedge)$ si es cerrado por las operaciones $\vee$ y $\wedge$.
Y decimos que $(S, \vee, \wedge)$ es un **subreticulado** ó **subretículo** de $(L, \vee, \wedge)$.

Subreticulados

Estructuras algebraicas conocidas

$(\mathbb{N}, +)$ es una “subálgebra” de $(\mathbb{R}, +)$: la suma de dos números naturales me da natural.

Definición

Sea $(L, \vee, \wedge)$ un retículo. $S \subseteq L$ es un **subuniverso** de $(L, \vee, \wedge)$ si es cerrado por las operaciones $\vee$ y $\wedge$.
Y decimos que $(S, \vee, \wedge)$ es un **subreticulado** ó **subretículo** de $(L, \vee, \wedge)$.
También escribimos “$(S, \leq)$ *es subreticulado de* $(L, \leq)$”.

Subreticulados

Estructuras algebraicas conocidas

$(\mathbb{N}, +)$ es una "subálgebra" de $(\mathbb{R}, +)$: la suma de dos números naturales me da natural.

Definición

Sea $(L, \vee, \wedge)$ un retículo. $S \subseteq L$ es un **subuniverso** de $(L, \vee, \wedge)$ si es cerrado por las operaciones $\vee$ y $\wedge$.
Y decimos que $(S, \vee, \wedge)$ es un **subreticulado** ó **subretículo** de $(L, \vee, \wedge)$.
También escribimos "$(S, \leq)$ *es subreticulado de* $(L, \leq)$".

Ejemplo

- $(D_n, |)$ es subreticulado de $(\mathbb{N}, |)$.

Subreticulados

Estructuras algebraicas conocidas

$(\mathbb{N}, +)$ es una "subálgebra" de $(\mathbb{R}, +)$: la suma de dos números naturales me da natural.

Definición

Sea $(L, \vee, \wedge)$ un retículo. $S \subseteq L$ es un **subuniverso** de $(L, \vee, \wedge)$ si es cerrado por las operaciones $\vee$ y $\wedge$.
Y decimos que $(S, \vee, \wedge)$ es un **subreticulado** ó **subretículo** de $(L, \vee, \wedge)$.
También escribimos "$(S, \leq)$ *es subreticulado de* $(L, \leq)$".

Ejemplo

- $(D_n, |)$ es subreticulado de $(\mathbb{N}, |)$.
- $([0, 1) \cup [2, 3), \leqslant)$ es subreticulado de $(\mathbb{R}, \leqslant)$.

Isomorfismo de retículos

También hay noción de isomorfismo para estructuras algebraicas.

Isomorfismo de retículos

También hay noción de isomorfismo para estructuras algebraicas.

Definición

Un **isomorfismo de retículos** $f : (L, \vee, \wedge) \to (L', \vee', \wedge')$ es una función biyectiva $f : L \to L'$ tal que para todos $x, y \in L$,

$$f(x \vee y) = f(x) \vee' f(y) \qquad \text{y} \qquad f(x \wedge y) = f(x) \wedge' f(y).$$

Isomorfismo de retículos

También hay noción de isomorfismo para estructuras algebraicas.

Definición

Un **isomorfismo de retículos** $f : (L, \vee, \wedge) \to (L', \vee', \wedge')$ es una función biyectiva $f : L \to L'$ tal que para todos $x, y \in L$,

$$f(x \vee y) = f(x) \vee' f(y) \qquad \text{y} \qquad f(x \wedge y) = f(x) \wedge' f(y).$$

Pero en el contexto de los reticulados, esta noción no es nueva.

Isomorfismo de retículos

También hay noción de isomorfismo para estructuras algebraicas.

Definición

Un **isomorfismo de retículos** $f : (L, \vee, \wedge) \to (L', \vee', \wedge')$ es una función biyectiva $f : L \to L'$ tal que para todos $x, y \in L$,

$$f(x \vee y) = f(x) \vee' f(y) \qquad \text{y} \qquad f(x \wedge y) = f(x) \wedge' f(y).$$

Pero en el contexto de los reticulados, esta noción no es nueva.

Teorema

$f : (L, \vee, \wedge) \to (L', \vee', \wedge')$ *es iso* $\iff$ $f : (L, \leq) \to (L', \leq')$ *es iso.*

Isomorfismo de retículos

También hay noción de isomorfismo para estructuras algebraicas.

Definición

Un **isomorfismo de retículos** $f : (L, \vee, \wedge) \to (L', \vee', \wedge')$ es una función biyectiva $f : L \to L'$ tal que para todos $x, y \in L$,

$$f(x \vee y) = f(x) \vee' f(y) \qquad \text{y} \qquad f(x \wedge y) = f(x) \wedge' f(y).$$

Pero en el contexto de los reticulados, esta noción no es nueva.

Teorema

$f : (L, \vee, \wedge) \to (L', \vee', \wedge')$ *es iso* $\iff$ $f : (L, \leq) \to (L', \leq')$ *es iso.*

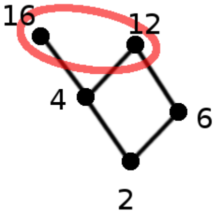
Demostración.

El orden y las operaciones son interdefinibles.

Los ejemplos canónicos

Ejemplo

1. Todos los órdenes totales.
2. $(\mathbb{N}, |)$.
3. $(\mathscr{P}(A), \subseteq)$ para cada conjunto A.



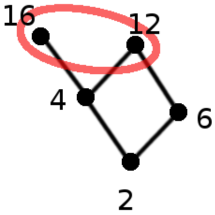
Otro ejemplo similar es el reticulado $L := ([0,1) \cup [2,3), \leqslant)$ de la clase pasada:

$$\sup^{\mathbb{R}}[0,1) = 1 \neq 2 = \sup^{L}[0,1).$$

Los ejemplos canónicos

Ejemplo

1. Todos los órdenes totales.
2. $(\mathbb{N}, |)$.
3. $(\mathscr{P}(A), \subseteq)$ para cada conjunto A.



Otro ejemplo similar es el reticulado $L := ([0,1) \cup [2,3), \leqslant)$ de la clase pasada:

$$\sup^{\mathbb{R}}[0,1) = 1 \neq 2 = \sup^{L}[0,1).$$

Algunas propiedades de $\mathscr{P}(A)$

Partes de un conjunto $(\mathscr{P}(A), \subseteq) \longleftrightarrow (\mathscr{P}(A), \cup, \cap)$

- Tiene primer elemento $\varnothing$ y último elemento A.

Algunas propiedades de $\mathscr{P}(A)$

Partes de un conjunto $(\mathscr{P}(A), \subseteq) \longleftrightarrow (\mathscr{P}(A), \cup, \cap)$

- Tiene primer elemento $\varnothing$ y último elemento A.
- Todo $X \in \mathscr{P}(A)$ tiene un **complemento**: un $Y \in \mathscr{P}(A)$ tal que

$$X \cup Y = A \qquad X \cap Y = \varnothing.$$

Algunas propiedades de $\mathscr{P}(A)$

Partes de un conjunto $(\mathscr{P}(A), \subseteq) \longleftrightarrow (\mathscr{P}(A), \cup, \cap)$

- Tiene primer elemento $\varnothing$ y último elemento A.
- Todo $X \in \mathscr{P}(A)$ tiene un **complemento**: un $Y \in \mathscr{P}(A)$ tal que

$$X \cup Y = A \qquad X \cap Y = \varnothing.$$

- Las operaciones **distribuyen**:

$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$$
$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z).$$

Partes de un conjunto $(\mathscr{P}(A), \subseteq) \longleftrightarrow (\mathscr{P}(A), \cup, \cap)$

- Tiene primer elemento $\varnothing$ y último elemento A.
- Todo $X \in \mathscr{P}(A)$ tiene un **complemento**: un $Y \in \mathscr{P}(A)$ tal que

$$X \cup Y = A \qquad X \cap Y = \varnothing.$$

- Las operaciones **distribuyen**:

$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$$
$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z).$$

Definimos estas propiedades para reticulados en general.

Reticulados acotados y complementados

Definición

- L es **acotado** si tiene primer elemento 0^L y último elemento 1^L.

Reticulados acotados y complementados

Definición

- L es **acotado** si tiene primer elemento 0^L y último elemento 1^L.
- Sea L acotado y sean $a, b \in L$. b es un **complemento** de a si

$$a \vee b = 1^L \qquad a \wedge b = 0^L.$$

Reticulados acotados y complementados

Definición

- L es **acotado** si tiene primer elemento 0^L y último elemento 1^L.
- Sea L acotado y sean $a, b \in L$. b es un **complemento** de a si

$$a \vee b = 1^L \qquad a \wedge b = 0^L.$$

L es **complementado** si todo elemento tiene complemento.

Reticulados acotados y complementados

Definición

- L es **acotado** si tiene primer elemento 0^L y último elemento 1^L.
- Sea L acotado y sean $a, b \in L$. b es un **complemento** de a si

$$a \vee b = 1^L \qquad a \wedge b = 0^L.$$

L es **complementado** si todo elemento tiene complemento.

Actividad

Encontrar los menores $n > 1$ tales que

1. $(D_n, |)$ es complementado.
2. $(D_n, |)$ no lo es pero hay más de 2 elementos con complemento.
3. $(D_n, |)$ tiene al menos 5 elementos y sólo tiene dos elementos con complemento.

Reticulados distributivos

Definición

L es **distributivo** si para todos los $a, b, c \in L$,

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$
$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

Reticulados distributivos

Definición

L es **distributivo** si para todos los $a, b, c \in L$,

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$
$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

Lema

Si L es distributivo y L' es isomorfo a L, entonces L' es distributivo

Reticulados distributivos

Definición

L es **distributivo** si para todos los $a, b, c \in L$,

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$
$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

Lema

Si L es distributivo y L' es isomorfo a L, entonces L' es distributivo

Lema

Si L es distributivo, entonces todos sus subreticulados lo son.

Reticulados distributivos

Definición

L es **distributivo** si para todos los $a, b, c \in L$,

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$
$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

Lema

Si L es distributivo y L' es isomorfo a L, entonces L' es distributivo

Lema

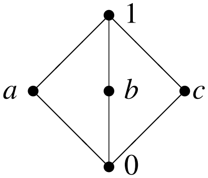
Si L es distributivo, entonces todos sus subreticulados lo son.

Demostración.

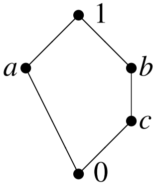
Las operaciones de un subreticulado son las mismas del reticulado grande.

No todos lo son

¡Contraejemplos!



M_3



N_5