Introducción a la Lógica y la Computación

Mariana Badano Héctor Gramaglia Pedro Sánchez Terraf
M. Clara Gorín Matías Steinberg

FaMAF, 9 de septiembre de 2020

Contenidos estimados para hoy

1. Reticulados distributivos
   - (Contra)ejemplos
   - Teorema M_3-N_5
2. Reticulados complementados y álgebras de Boole
   - Leyes de De Morgan
   - Isomorfismo de álgebras de Boole
3. Teoremas de Representación
   - Ejemplos
   - Intermezzo: Posets y Partes
   - Precalentamiento: Representación de posets
   - Teorema de representación de álgebras de Boole finitas

Avisos

- El viernes 11 de septiembre no habrá teórico.
- Entregaremos los dos ejercicios para esta primera parte a fin de mes.

Definición

Sea L un reticulado. $S \subseteq L$ es un **subuniverso** de $(L, \vee, \wedge)$ si es cerrado por las operaciones $\vee$ y $\wedge$. En tal caso, $(S, \vee, \wedge)$ es un **subreticulado** de $(L, \vee, \wedge)$.

Reticulados distributivos

Definición

Sea L un reticulado. $S \subseteq L$ es un **subuniverso** de $(L, \vee, \wedge)$ si es cerrado por las operaciones $\vee$ y $\wedge$. En tal caso, $(S, \vee, \wedge)$ es un **subreticulado** de $(L, \vee, \wedge)$.

Definición

L es **distributivo** si para todos los $a, b, c \in L$,

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$
$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

Reticulados distributivos

Definición

Sea L un reticulado. $S \subseteq L$ es un **subuniverso** de $(L, \vee, \wedge)$ si es cerrado por las operaciones $\vee$ y $\wedge$. En tal caso, $(S, \vee, \wedge)$ es un **subreticulado** de $(L, \vee, \wedge)$.

Definición

L es **distributivo** si para todos los $a, b, c \in L$,

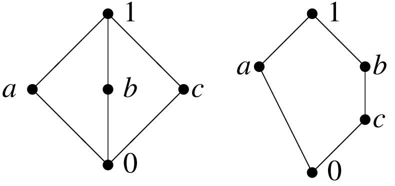
$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$
$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

Lema

Si L es distributivo y L' es isomorfo a un subreticulado L ("L' se ***incrusta*** *en L"), entonces L' es distributivo.*

No todos lo son

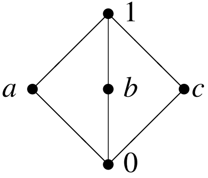
¡Contraejemplos!



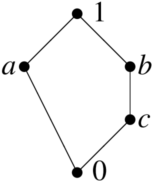
M_3 N_5

No todos lo son

¡Contraejemplos!

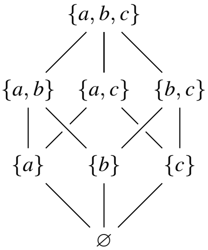


M_3



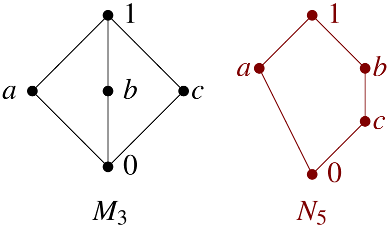
N_5

Subposets pero no subreticulados

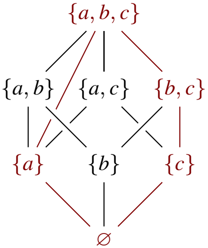


No todos lo son

¡Contraejemplos!

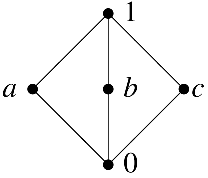


Subposets pero no subreticulados

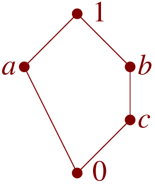


No todos lo son

¡Contraejemplos!

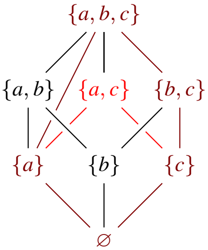


M_3



N_5

Subposets pero no subreticulados



Lema (Propiedad “cancelativa”)

Sea L distributivo. Para todos $a, b, c \in L$,

$$\left.\begin{array}{r} a \vee b = a \vee c \\ a \wedge b = a \wedge c \end{array}\right\} \Longrightarrow b = c.$$

Teorema M_3-N_5

Teorema

L es distributivo si y sólo si ningún subreticulado es isomorfo a M_3 ni a N_5.

Teorema M_3-N_5

Teorema

L es distributivo si y sólo si ningún subreticulado es isomorfo a M_3 ni a N_5.

Teóricamente es muy limpio, pero como algoritmo apesta.

Teorema M_3-N_5

Teorema

L es distributivo si y sólo si ningún subreticulado es isomorfo a M_3 ni a N_5.

Teóricamente es muy limpio, pero como algoritmo apesta.
El teorema de representación de reticulados distributivos al final de esta primera parte va a mejorar esto un poco.

Definición

- L es **acotado** si tiene primer elemento 0^L y último elemento 1^L.
- Sea L acotado y sean $a, b \in L$. b es un **complemento** de a si

$$a \vee b = 1^L \qquad a \wedge b = 0^L.$$

L es **complementado** si todo elemento tiene complemento.

Reticulados complementados y álgebras de Boole

Definición

- L es **acotado** si tiene primer elemento 0^L y último elemento 1^L.
- Sea L acotado y sean $a, b \in L$. b es un **complemento** de a si

$$a \vee b = 1^L \qquad a \wedge b = 0^L.$$

L es **complementado** si todo elemento tiene complemento.

Definición (Álgebra de Boole)

Un **álgebra de Boole** $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ es una estructura donde $(B, \vee, \wedge, 0, 1)$ es un retículo distributivo acotado y $\neg : B \to B$ da un complemento:

$$a \vee \neg a = 1 \qquad a \wedge \neg a = 0.$$

Leyes de De Morgan

Proposición

En toda álgebra de Boole, se dan

$$\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y \qquad \neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$$

Leyes de De Morgan

Proposición

En toda álgebra de Boole, se dan

$$\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y \qquad \neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$$

Demostración.

Ver que $\neg x \wedge \neg y$ es complemento de $x \vee y$ y aplicar la propiedad cancelativa. La segunda ley es análoga.

Isomorfismo de álgebras de Boole

Definición

Un **isomorfismo de álgebras de Boole**
$f:(B,\vee,\wedge,\neg,0,1)\to(B,\vee',\wedge',\neg',0',1')$ es un iso de retículos
$f:(B,\vee,\wedge)\to(B,\vee',\wedge')$ tal que para todo $x\in B$,

$$f(\neg x)=\neg' f(x) \qquad \text{y} \qquad f(0)=0' \qquad \text{y} \qquad f(1)=1'$$

Isomorfismo de álgebras de Boole

Definición

Un **isomorfismo de álgebras de Boole**
$f : (B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1) \to (B, \vee', \wedge', \neg', 0', 1')$ es un iso de retículos
$f : (B, \vee, \wedge) \to (B, \vee', \wedge')$ tal que para todo $x \in B$,

$$f(\neg x) = \neg' f(x) \qquad \text{y} \qquad f(0) = 0' \qquad \text{y} \qquad f(1) = 1'$$

Son lo mismo que los isos de posets (inducidos por la estructura de retículo).

Isomorfismo de álgebras de Boole

Definición

Un **isomorfismo de álgebras de Boole**
$f : (B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1) \to (B, \vee', \wedge', \neg', 0', 1')$ es un iso de retículos
$f : (B, \vee, \wedge) \to (B, \vee', \wedge')$ tal que para todo $x \in B$,

$$f(\neg x) = \neg' f(x) \qquad \text{y} \qquad f(0) = 0' \qquad \text{y} \qquad f(1) = 1'$$

Son lo mismo que los isos de posets (inducidos por la estructura de retículo).

Teorema

$f : (B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1) \to (B, \vee', \wedge', \neg', 0', 1')$ *es iso* $\iff$
$f : (B, \leq) \to (B', \leq')$ *es iso.*

Isomorfismo de álgebras de Boole

Definición

Un **isomorfismo de álgebras de Boole** $f : (B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1) \to (B, \vee', \wedge', \neg', 0', 1')$ es un iso de retículos $f : (B, \vee, \wedge) \to (B, \vee', \wedge')$ tal que para todo $x \in B$,

$$f(\neg x) = \neg' f(x) \qquad \text{y} \qquad f(0) = 0' \qquad \text{y} \qquad f(1) = 1'$$

Son lo mismo que los isos de posets (inducidos por la estructura de retículo).

Teorema

$f : (B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1) \to (B, \vee', \wedge', \neg', 0', 1')$ es iso $\iff$ $f : (B, \leq) \to (B', \leq')$ es iso.

Demostración.

Si y es complemento de x, $f(x)$ es complemento de $f(y)$ (por estar definido usando el orden), y aplico propiedad cancelativa.

Ejemplos

Bien, ahora a los ejemplos de álgebras de Boole.

Ejemplos

Bien, ahora a los ejemplos de álgebras de Boole.

Ejemplo

- $\mathscr{P}(A)$ para todo A.

Bien, ahora a los ejemplos de álgebras de Boole.

Ejemplo

- $\mathscr{P}(A)$ para todo A.
- D_n con $n = p_1 \cdots p_m$ producto de primos distintos.

Ejemplos

Bien, ahora a los ejemplos de álgebras de Boole.

Ejemplo

- $\mathscr{P}(A)$ para todo A.
- D_n con $n = p_1 \cdots p_m$ producto de primos distintos. Es isomorfa a $\mathscr{P}(\{p_1, \ldots, p_m\})$.

Ejemplos

Bien, ahora a los ejemplos de álgebras de Boole.

Ejemplo

- $\mathscr{P}(A)$ para todo A.
- D_n con $n = p_1 \cdots p_m$ producto de primos distintos. Es isomorfa a $\mathscr{P}(\{p_1, \ldots, p_m\})$. Es decir, esencialmente parte del ejemplo anterior.

Bien, ahora a los ejemplos de álgebras de Boole.

Ejemplo

- $\mathscr{P}(A)$ para todo A.
- D_n con $n = p_1 \cdots p_m$ producto de primos distintos. Es isomorfa a $\mathscr{P}(\{p_1, \ldots, p_m\})$. Es decir, esencialmente parte del ejemplo anterior.
- $\ldots$

Ejemplos

Bien, ahora a los ejemplos de álgebras de Boole.

Ejemplo

- $\mathscr{P}(A)$ para todo A.
- D_n con $n = p_1 \cdots p_m$ producto de primos distintos. Es isomorfa a $\mathscr{P}(\{p_1, \ldots, p_m\})$. Es decir, esencialmente parte del ejemplo anterior.
- ...
- ...

Ejemplos

Bien, ahora a los ejemplos de álgebras de Boole.

Ejemplo

- $\mathscr{P}(A)$ para todo A.
- D_n con $n = p_1 \cdots p_m$ producto de primos distintos. Es isomorfa a $\mathscr{P}(\{p_1, \ldots, p_m\})$. Es decir, esencialmente parte del ejemplo anterior.
- ...
- ...

Sí, hay más ejemplos. Pero parece que el conjunto de partes es uno muy importante.

Ejemplos

Bien, ahora a los ejemplos de álgebras de Boole.

Ejemplo

- $\mathscr{P}(A)$ para todo A.
- D_n con $n = p_1 \cdots p_m$ producto de primos distintos. Es isomorfa a $\mathscr{P}(\{p_1, \ldots, p_m\})$. Es decir, esencialmente parte del ejemplo anterior.
- $\ldots$
- $\ldots$

Sí, hay más ejemplos. Pero parece que el conjunto de partes es uno muy importante.
Para continuar, podemos imaginarnos formas de asociar una familia de conjuntos a $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$.

Ejemplos

Bien, ahora a los ejemplos de álgebras de Boole.

Ejemplo

- $\mathscr{P}(A)$ para todo A.
- D_n con $n = p_1 \cdots p_m$ producto de primos distintos. Es isomorfa a $\mathscr{P}(\{p_1, \dots, p_m\})$. Es decir, esencialmente parte del ejemplo anterior.
- $\dots$
- $\dots$

Sí, hay más ejemplos. Pero parece que el conjunto de partes es uno muy importante.
Para continuar, podemos imaginarnos formas de asociar una familia de conjuntos a $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$.

Fuerza bruta

Una estrategia a lo bestia (exponencial)

Si todo falla, considerá todas las combinaciones.

Fuerza bruta

Una estrategia a lo bestia (exponencial)

Si todo falla, considerá todas las combinaciones.

En este caso, es arrancar con $\mathscr{P}(B)$.
Esta estrategia de fuerza bruta también se usará en la tercera parte de la materia.

Fuerza bruta

Una estrategia a lo bestia (exponencial)

Si todo falla, considerá todas las combinaciones.

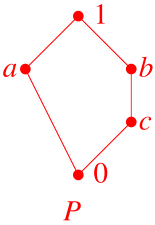
En este caso, es arrancar con $\mathscr{P}(B)$.
Esta estrategia de fuerza bruta también se usará en la tercera parte de la materia.

¿Cómo asociamos a cada $b \in B$ un $F(b) \subseteq B$?

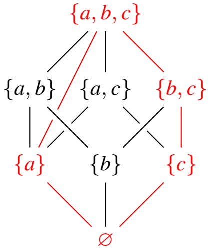
Ayuda: usemos el orden (y b) para definir $F(b)$.

Posets y subconjuntos

Poset

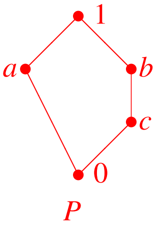


Partes (algunas)

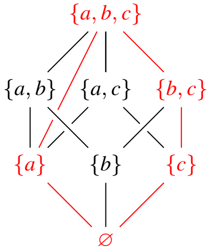


Posets y subconjuntos

Poset



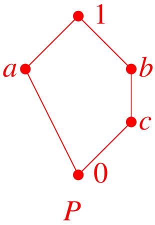
Partes (algunas)



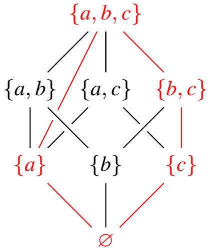
Si ignoramos aquí 0 y 1, notemos que cada $d \in P$ se corresponde con el **ideal principal** $d{\downarrow} := \{x \in P : x \leq d\}$.

Posets y subconjuntos

Poset



Partes (algunas)

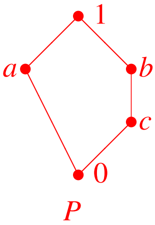


Si ignoramos aquí 0 y 1, notemos que cada $d \in P$ se corresponde con el **ideal principal** $d{\downarrow} := \{x \in P : x \leq d\}$.

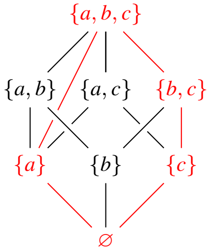
$d \mapsto d{\downarrow}$ es 1-1

Posets y subconjuntos

Poset



Partes (algunas)



Si ignoramos aquí 0 y 1, notemos que cada $d \in P$ se corresponde con el **ideal principal** $d{\downarrow} := \{x \in P : x \leq d\}$.

$d \mapsto d{\downarrow}$ es 1-1

Basta ver que $d = \sup d{\downarrow} = \sup c{\downarrow} = c$.

Precalentamiento: Representación de posets

De hecho, hay más:

Lema

Para todos $d, c \in P, \; d \leq c \iff d\downarrow \subseteq c\downarrow$.

Precalentamiento: Representación de posets

De hecho, hay más:

Lema

Para todos $d, c \in P,\ d \leq c \iff d{\downarrow} \subseteq c{\downarrow}$.

Demostración.

- $(\Rightarrow)$ Por la transitividad de $\leq$.

Precalentamiento: Representación de posets

De hecho, hay más:

Lema

Para todos $d, c \in P, \; d \leq c \iff d{\downarrow} \subseteq c{\downarrow}$.

Demostración.

- $(\Rightarrow)$ Por la transitividad de $\leq$.
- $(\Leftarrow)$ $d \in c{\downarrow}$ implica $d \leq c$.

Precalentamiento: Representación de posets

De hecho, hay más:

Lema

Para todos $d, c \in P,\ d \leq c \iff d{\downarrow} \subseteq c{\downarrow}$.

Demostración.

- $(\Rightarrow)$ Por la transitividad de $\leq$.
- $(\Leftarrow)$ $d \in c{\downarrow}$ implica $d \leq c$.

Teorema

$(P, \leq)$ *es isomorfo a un subposet de* $(\mathscr{P}(P), \subseteq)$.

Precalentamiento: Representación de posets

De hecho, hay más:

Lema

Para todos $d, c \in P,\ d \leq c \iff d{\downarrow} \subseteq c{\downarrow}$.

Demostración.

- $(\Rightarrow)$ Por la transitividad de $\leq$.
- $(\Leftarrow)$ $d \in c{\downarrow}$ implica $d \leq c$.

Teorema

$(P, \leq)$ *es isomorfo a un subposet de* $(\mathscr{P}(P), \subseteq)$.

Un teorema de representación más ajustado nos diría a qué subposets de partes es isomorfo.

De hecho, hay más:

Lema

Para todos $d, c \in P$, $d \leq c \iff d{\downarrow} \subseteq c{\downarrow}$.

Demostración.

- $(\Rightarrow)$ Por la transitividad de $\leq$.
- $(\Leftarrow)$ $d \in c{\downarrow}$ implica $d \leq c$.

Teorema

$(P, \leq)$ *es isomorfo a un subposet de* $(\mathscr{P}(P), \subseteq)$.

Un teorema de representación más ajustado nos diría a qué subposets de partes es isomorfo.

Además "subposet" no es compatible con las operaciones.

Teorema de Representación de álgebras de Boole finitas

Teorema

Para toda álgebra de Boole finita B existe A tal que B es isomorfa a $\mathscr{P}(A)$.

¿Quién es A?

¿Qué objetos juegan el rol de elementos de A?

Átomos

Sea B un poset finito acotado con al menos dos elementos.

Definición

$a \in B$ es un **átomo** si a cubre a 0. $At(B)$ es el conjunto de los átomos de B.

Sea B un poset finito acotado con al menos dos elementos.

Definición

$a \in B$ es un **átomo** si a cubre a 0. $At(B)$ es el conjunto de los átomos de B.

Ejercicios

- Supongamos $a \in At(B)$. ¿Cuántos valores posibles puede dar $b \wedge a$?

  Actividad en Aula virtual!
- Encontrar el conjunto de átomos de D_n.
- Sea $a \leq b$. Entonces a es átomo de $B \iff a$ es átomo del subposet $b\downarrow$.

Teorema de representación de álgebras de Boole finitas

Teorema

Sea $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ *un álgebra de Boole finita. Luego*

$$\begin{aligned} F : B &\to \mathscr{P}(At(B)) \\ x &\mapsto \{a \in At(B) : a \leq x\} \end{aligned}$$

es un isomorfismo entre $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ *y* $\left(\mathscr{P}(At(B)), \cup, \cap, (\cdot)^c, \varnothing, B\right)$*.*

Teorema de representación de álgebras de Boole finitas

Teorema

Sea $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ *un álgebra de Boole finita. Luego*

$$\begin{aligned} F : B &\to \mathscr{P}(At(B)) \\ x &\mapsto \{a \in At(B) : a \leq x\} \end{aligned}$$

es un isomorfismo entre $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ *y* $\left(\mathscr{P}(At(B)), \cup, \cap, (\cdot)^c, \varnothing, B\right)$*.*

Para probarlo, necesitamos ver que F:

Teorema de representación de álgebras de Boole finitas

Teorema

Sea $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ *un álgebra de Boole finita. Luego*

$$\begin{aligned} F : B &\to \mathscr{P}(At(B)) \\ x &\mapsto \{a \in At(B) : a \leq x\} \end{aligned}$$

es un isomorfismo entre $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ *y* $\left(\mathscr{P}(At(B)), \cup, \cap, (\cdot)^c, \varnothing, B\right)$.

Para probarlo, necesitamos ver que F:

- Es biyectiva.
- Preserva el orden $c \leq b \iff F(c) \subseteq F(b)$.

Teorema de representación de álgebras de Boole finitas

Teorema

Sea $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ *un álgebra de Boole finita. Luego*

$$\begin{aligned} F : B &\to \mathscr{P}(At(B)) \\ x &\mapsto \{a \in At(B) : a \leq x\} \end{aligned}$$

es un isomorfismo entre $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ *y* $\left(\mathscr{P}(At(B)), \cup, \cap, (\cdot)^c, \varnothing, B\right)$*.*

Para probarlo, necesitamos ver que F:

- Es biyectiva. Tiene inversa $\sup : \mathscr{P}(At(B)) \to B$. A continuación.
- Preserva el orden $c \leq b \iff F(c) \subseteq F(b)$.

Teorema de representación de álgebras de Boole finitas

Teorema

Sea $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ *un álgebra de Boole finita. Luego*

$$\begin{aligned} F : B &\to \mathscr{P}(At(B)) \\ x &\mapsto \{a \in At(B) : a \leq x\} \end{aligned}$$

es un isomorfismo entre $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ *y* $\left(\mathscr{P}(At(B)), \cup, \cap, (\cdot)^c, \varnothing, B\right)$*.*

Para probarlo, necesitamos ver que F:

- Es biyectiva. Tiene inversa $\sup : \mathscr{P}(At(B)) \to B$. A continuación.
- Preserva el orden $c \leq b \iff F(c) \subseteq F(b)$. Sale directo de:
  - $(\Rightarrow)$ la transitividad de $\leq$;

Teorema de representación de álgebras de Boole finitas

Teorema

Sea $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ *un álgebra de Boole finita. Luego*

$$\begin{aligned} F : B &\to \mathscr{P}(At(B)) \\ x &\mapsto \{a \in At(B) : a \leq x\} \end{aligned}$$

es un isomorfismo entre $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ *y* $\left(\mathscr{P}(At(B)), \cup, \cap, (\cdot)^c, \varnothing, B\right)$*.*

Para probarlo, necesitamos ver que F:

- Es biyectiva. Tiene inversa $\sup : \mathscr{P}(At(B)) \to B$. A continuación.
- Preserva el orden $c \leq b \iff F(c) \subseteq F(b)$. Sale directo de:
  - $(\Rightarrow)$ la transitividad de $\leq$;
  - $(\Leftarrow)$ $X \subseteq Y \implies \sup X \leq \sup Y$.

Teorema de representación de álgebras de Boole finitas

Teorema

Sea $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ *un álgebra de Boole finita. Luego*

$$\begin{aligned} F : B &\to \mathscr{P}(At(B)) \\ x &\mapsto \{a \in At(B) : a \leq x\} \end{aligned}$$

es un isomorfismo entre $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ *y* $\left(\mathscr{P}(At(B)), \cup, \cap, (\cdot)^c, \varnothing, B\right)$*.*

Para probarlo, necesitamos ver que F:

- Es biyectiva. Tiene inversa $\sup : \mathscr{P}(At(B)) \to B$. A continuación.
- Preserva el orden $c \leq b \iff F(c) \subseteq F(b)$. Sale directo de:
  - $(\Rightarrow)$ la transitividad de $\leq$;
  - $(\Leftarrow)$ $X \subseteq Y \implies \sup X \leq \sup Y$.

Nos enfocamos en el caso $|B| \geqslant 2$.

Hay suficiente cantidad de átomos

Lema (Álgebras de Boole finitas son atómicas)

Para todo $b \in B$ *distinto de* 0 *existe* $a \in At(B)$ *tal que* $a \leq b$*.*

Hay suficiente cantidad de átomos

Lema (Álgebras de Boole finitas son atómicas)

Para todo $b \in B$ *distinto de* 0 *existe* $a \in At(B)$ *tal que* $a \leq b$*.*

Demostración.

Por inducción en $|B|$, notando que ser átomo se preserva al pasar a $b\downarrow$.

Hay suficiente cantidad de átomos

Lema (Álgebras de Boole finitas son atómicas)

Para todo $b \in B$ *distinto de* 0 *existe* $a \in At(B)$ *tal que* $a \leq b$*.*

Demostración.

Por inducción en $|B|$, notando que ser átomo se preserva al pasar a $b{\downarrow}$.

Lema (Separación)

Para todo $x, y \in B$ *tales que* $x \nleq y$ *existe* $a \in At(B)$ *tal que* $a \leq x$ *y* $a \nleq y$*.*

Hay suficiente cantidad de átomos

Lema (Álgebras de Boole finitas son atómicas)

Para todo $b \in B$ *distinto de* 0 *existe* $a \in At(B)$ *tal que* $a \leq b$.

Demostración.

Por inducción en $|B|$, notando que ser átomo se preserva al pasar a $b{\downarrow}$.

Lema (Separación)

Para todo $x, y \in B$ *tales que* $x \nleq y$ *existe* $a \in At(B)$ *tal que* $a \leq x$ *y* $a \nleq y$.

Demostración.

Porque $x \wedge \neg y \neq 0$ y hay un átomo debajo.

Hay suficiente cantidad de átomos

Lema (Álgebras de Boole finitas son atómicas)

Para todo $b \in B$ distinto de 0 existe $a \in At(B)$ tal que $a \leq b$.

Demostración.

Por inducción en $|B|$, notando que ser átomo se preserva al pasar a $b{\downarrow}$.

Lema (Separación)

Para todo $x, y \in B$ tales que $x \nleq y$ existe $a \in At(B)$ tal que $a \leq x$ y $a \nleq y$.

Demostración.

Porque $x \wedge \neg y \neq 0$ y hay un átomo debajo.

Pasamos entonces a la prueba principal, la correspondencia entre conjuntos de átomos y elementos de B.

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

F y $\sup$ son inversas

Separación Para todo $x, y \in B$ tales que $x \not\leq y$ existe $a \in At(B)$ tal que $a \leq x$ y $a \not\leq y$.

F y $\sup$ son inversas

Separación Para todo $x, y \in B$ tales que $x \not\leq y$ existe $a \in At(B)$ tal que $a \leq x$ y $a \not\leq y$.

Recordemos: $F(x) := \{a \in At(B) : a \leq x\}$.

F y $\sup$ son inversas

Separación Para todo $x, y \in B$ tales que $x \not\leq y$ existe $a \in At(B)$ tal que $a \leq x$ y $a \not\leq y$.

$x \not\leq y$ implica $\exists a \in F(x) \setminus F(y)$.

Recordemos: $F(x) := \{a \in At(B) : a \leq x\}$.

F y $\sup$ son inversas

Separación Para todo $x, y \in B$ tales que $x \not\leq y$ existe $a \in At(B)$ tal que $a \leq x$ y $a \not\leq y$. $x \not\leq y$ implica $\exists a \in F(x) \setminus F(y)$.

Recordemos: $F(x) := \{a \in At(B) : a \leq x\}$.

Prueba del Teorema de Representación.

Vemos que F y $\sup$ son inversas una de la otra.

F y $\sup$ son inversas

Separación Para todo $x, y \in B$ tales que $x \not\leq y$ existe $a \in At(B)$ tal que $a \leq x$ y $a \not\leq y$.

$x \not\leq y$ implica $\exists a \in F(x) \smallsetminus F(y)$.

Recordemos: $F(x) := \{a \in At(B) : a \leq x\}$.

Prueba del Teorema de Representación.

Vemos que F y $\sup$ son inversas una de la otra.

- $x = \sup F(x) = \sup\{a \in At(B) : a \leq x\}$ para todo $x \in B$:

Separación Para todo $x, y \in B$ tales que $x \not\leq y$ existe $a \in At(B)$ tal que $a \leq x$ y $a \not\leq y$. $x \not\leq y$ implica $\exists a \in F(x) \smallsetminus F(y)$.

Recordemos: $F(x) := \{a \in At(B) : a \leq x\}$.

Prueba del Teorema de Representación.

Vemos que F y $\sup$ son inversas una de la otra.

- $x = \sup F(x) = \sup\{a \in At(B) : a \leq x\}$ para todo $x \in B$: x es claramente cota de $F(x)$. Y si y es cota, $F(x) \subseteq F(y)$, lo que implica $x \leq y$ por Separación.

F y $\sup$ son inversas

Separación Para todo $x, y \in B$ tales que $x \not\leq y$ existe $a \in At(B)$ tal que $a \leq x$ y $a \not\leq y$.

$x \not\leq y$ implica $\exists a \in F(x) \setminus F(y)$.

Recordemos: $F(x) := \{a \in At(B) : a \leq x\}$.

Prueba del Teorema de Representación.

Vemos que F y $\sup$ son inversas una de la otra.

- $x = \sup F(x) = \sup\{a \in At(B) : a \leq x\}$ para todo $x \in B$: x es claramente cota de $F(x)$. Y si y es cota, $F(x) \subseteq F(y)$, lo que implica $x \leq y$ por Separación.

Separación Para todo $x, y \in B$ tales que $x \not\leq y$ existe $a \in At(B)$ tal que $a \leq x$ y $a \not\leq y$. $\qquad x \not\leq y$ implica $\exists a \in F(x) \setminus F(y)$.

Recordemos: $F(x) := \{a \in At(B) : a \leq x\}$.

Prueba del Teorema de Representación.

Vemos que F y $\sup$ son inversas una de la otra.

- $x = \sup F(x) = \sup\{a \in At(B) : a \leq x\}$ para todo $x \in B$:
  x es claramente cota de $F(x)$. Y si y es cota, $F(x) \subseteq F(y)$, lo que implica $x \leq y$ por Separación.
- $A = F(\sup A) = \{a \in At(B) : a \leq \sup A\}$ para todo $A \subseteq At(B)$:

F y $\sup$ son inversas

Separación Para todo $x, y \in B$ tales que $x \not\leq y$ existe $a \in At(B)$ tal que $a \leq x$ y $a \not\leq y$. $x \not\leq y$ implica $\exists a \in F(x) \smallsetminus F(y)$.

Recordemos: $F(x) := \{a \in At(B) : a \leq x\}$.

Prueba del Teorema de Representación.

Vemos que F y $\sup$ son inversas una de la otra.

- $x = \sup F(x) = \sup\{a \in At(B) : a \leq x\}$ para todo $x \in B$:
  x es claramente cota de $F(x)$. Y si y es cota, $F(x) \subseteq F(y)$, lo que implica $x \leq y$ por Separación.
- $A = F(\sup A) = \{a \in At(B) : a \leq \sup A\}$ para todo $A \subseteq At(B)$:
  $A \subseteq F(\sup A)$ sale directo. Y $F(\sup A) \subseteq A$ por distributividad.

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS