

Introducción a la Lógica y la Computación

Mariana Badano Héctor Gramaglia Pedro Sánchez Terraf
M. Clara Gorín Matías Steinberg

FaMAF, 18 de noviembre de 2020



1 Repaso

- Gramáticas libres de contexto
- Ejemplo en forma Backus-Naur (BNF)

2 Gramáticas regulares

- Relación con lenguajes regulares
- De gramáticas a autómatas
- De autómatas a gramáticas

Gramáticas libres de contexto (CFG)

$L_{01} := \{0^n 1^n : n \in \mathbb{N}\}$ es **libre de contexto** (¡no regular!).

Gramáticas libres de contexto (CFG)

$L_{01} := \{0^n 1^n : n \in \mathbb{N}\}$ es **libre de contexto** (¡no regular!).

$$G = (V, T, P, S)$$

- **Componentes:** **variables** (“no terminales”), **alfabeto terminal**, **reglas** (“producciones”) y **símbolo inicial**

Gramáticas libres de contexto (CFG)

$L_{01} := \{0^n 1^n : n \in \mathbb{N}\}$ es **libre de contexto** (¡no regular!).

$$G = (V, T, P, S)$$

- **Componentes:** **variables** (“no terminales”), **alfabeto terminal**, **reglas** (“producciones”) y **símbolo inicial**

Ejemplo:

$$G_{01} := (\{S\}, \{0, 1\}, \{S \rightarrow \epsilon; S \rightarrow 0S1\}, S).$$

Gramáticas libres de contexto (CFG)

$L_{01} := \{0^n 1^n : n \in \mathbb{N}\}$ es **libre de contexto** (¡no regular!).

$$G = (V, T, P, S)$$

- **Componentes:** **variables** (“no terminales”), **alfabeto terminal**, **reglas** (“producciones”) y **símbolo inicial**

Ejemplo:

$$G_{01} := (\{S\}, \{0, 1\}, \{S \rightarrow \epsilon; S \rightarrow 0S1\}, S).$$

- **Derivación** usando una CFG: $S \xRightarrow{*} 000111$

Gramáticas libres de contexto (CFG)

$L_{01} := \{0^n 1^n : n \in \mathbb{N}\}$ es **libre de contexto** (¡no regular!).

$$G = (V, T, P, S)$$

- **Componentes:** **variables** (“no terminales”), **alfabeto terminal**, **reglas** (“producciones”) y **símbolo inicial**

Ejemplo:

$$G_{01} := (\{S\}, \{0, 1\}, \{S \rightarrow \epsilon; S \rightarrow 0S1\}, S).$$

- **Derivación** usando una CFG: $S \xRightarrow{*} 000111$ porque

$$S \implies 0S1$$

Gramáticas libres de contexto (CFG)

$L_{01} := \{0^n 1^n : n \in \mathbb{N}\}$ es **libre de contexto** (¡no regular!).

$$G = (V, T, P, S)$$

- **Componentes:** **variables** (“no terminales”), **alfabeto terminal**, **reglas** (“producciones”) y **símbolo inicial**

Ejemplo:

$$G_{01} := (\{S\}, \{0, 1\}, \{S \rightarrow \epsilon; S \rightarrow 0S1\}, S).$$

- **Derivación** usando una CFG: $S \xRightarrow{*} 000111$ porque

$$S \implies 0S1 \implies 00S11$$

Gramáticas libres de contexto (CFG)

$L_{01} := \{0^n 1^n : n \in \mathbb{N}\}$ es **libre de contexto** (¡no regular!).

$$G = (V, T, P, S)$$

- **Componentes:** **variables** (“no terminales”), **alfabeto terminal**, **reglas** (“producciones”) y **símbolo inicial**

Ejemplo:

$$G_{01} := (\{S\}, \{0, 1\}, \{S \rightarrow \epsilon; S \rightarrow 0S1\}, S).$$

- **Derivación** usando una CFG: $S \xRightarrow{*} 000111$ porque

$$S \Rightarrow 0S1 \Rightarrow 00S11 \Rightarrow 000S111$$

Gramáticas libres de contexto (CFG)

$L_{01} := \{0^n 1^n : n \in \mathbb{N}\}$ es **libre de contexto** (¡no regular!).

$$G = (V, T, P, S)$$

- **Componentes:** **variables** (“no terminales”), **alfabeto terminal**, **reglas** (“producciones”) y **símbolo inicial**

Ejemplo:

$$G_{01} := (\{S\}, \{0, 1\}, \{S \rightarrow \epsilon; S \rightarrow 0S1\}, S).$$

- **Derivación** usando una CFG: $S \xRightarrow{*} 000111$ porque

$$S \implies 0S1 \implies 00S11 \implies 000S111 \implies 000\epsilon 111 = 000111.$$

Gramáticas libres de contexto (CFG)

$L_{01} := \{0^n 1^n : n \in \mathbb{N}\}$ es **libre de contexto** (¡no regular!).

$$G = (V, T, P, S)$$

- **Componentes:** **variables** (“no terminales”), **alfabeto terminal**, **reglas** (“producciones”) y **símbolo inicial**

Ejemplo:

$$G_{01} := (\{S\}, \{0, 1\}, \{S \rightarrow \epsilon; S \rightarrow 0S1\}, S).$$

- **Derivación** usando una CFG: $S \xRightarrow{*} 000111$ porque

$$S \Rightarrow 0S1 \Rightarrow 00S11 \Rightarrow 000S111 \Rightarrow 000\epsilon 111 = 000111.$$

- **Lenguaje** de una gramática: $L(G) := \{\alpha \in T^* \mid S \xRightarrow{*} \alpha\}$.

Gramáticas libres de contexto (CFG)

$L_{01} := \{0^n 1^n : n \in \mathbb{N}\}$ es **libre de contexto** (¡no regular!).

$$G = (V, T, P, S)$$

- **Componentes:** **variables** (“no terminales”), **alfabeto terminal**, **reglas** (“producciones”) y **símbolo inicial**

Ejemplo:

$$G_{01} := (\{S\}, \{0, 1\}, \{S \rightarrow \epsilon; S \rightarrow 0S1\}, S).$$

- **Derivación** usando una CFG: $S \xRightarrow{*} 000111$ porque

$$S \Rightarrow 0S1 \Rightarrow 00S11 \Rightarrow 000S111 \Rightarrow 000\epsilon 111 = 000111.$$

- **Lenguaje** de una gramática: $L(G) := \{\alpha \in T^* \mid S \xRightarrow{*} \alpha\}$.
Luego $L(G_{01}) = L_{01}$.

Forma Backus-Naur (BNF)

Gramática para expresiones aritméticas

$$G_{ar} = (\{E, N, D, I\}, \{a, 0, \dots, 9, +, *, (,)\}, P_{ar}, E)$$

Forma Backus-Naur (BNF)

Gramática para expresiones aritméticas

$$G_{ar} = (\{E, N, D, I\}, \{a, 0, \dots, 9, +, *, (,)\}, P_{ar}, E)$$

$$E \longrightarrow N \mid I \mid E + E \mid E * E \mid (E)$$

$$I \longrightarrow a \mid I0 \mid \dots \mid I9$$

$$N \longrightarrow 1D \mid \dots \mid 9D$$

$$D \longrightarrow 0D \mid \dots \mid 9D \mid \epsilon$$

Forma Backus-Naur (BNF)

Gramática para expresiones aritméticas

$$G_{ar} = (\{E, N, D, I\}, \{a, 0, \dots, 9, +, *, (,)\}, P_{ar}, E)$$

$$E \longrightarrow N \mid I \mid E + E \mid E * E \mid (E)$$

$$I \longrightarrow a \mid I0 \mid \dots \mid I9$$

$$N \longrightarrow 1D \mid \dots \mid 9D$$

$$D \longrightarrow 0D \mid \dots \mid 9D \mid \epsilon$$

En forma BNF

$$\langle E \rangle ::= \langle N \rangle \mid \langle I \rangle \mid \langle E \rangle + \langle E \rangle \mid \langle E \rangle * \langle E \rangle \mid (\langle E \rangle)$$

$$\langle I \rangle ::= a \mid \langle I \rangle 0 \mid \dots \mid \langle I \rangle 9$$

$$\langle N \rangle ::= 1\langle D \rangle \mid \dots \mid 9\langle D \rangle$$

$$\langle D \rangle ::= 0\langle D \rangle \mid \dots \mid 9\langle D \rangle \mid \epsilon$$

Definición

$G = (V, T, P, S)$ es **regular** si todas sus producciones son de la forma

- $A \longrightarrow aB \quad (a \in T, B \in V),$
- $A \longrightarrow \epsilon.$

Definición

$G = (V, T, P, S)$ es **regular** si todas sus producciones son de la forma

- $A \rightarrow aB \quad (a \in T, B \in V),$
- $A \rightarrow \epsilon.$

Lema

- Si $X \xRightarrow{*} \beta$ y $\beta \in (V \cup T)^* \setminus T^*$ entonces $\beta = \alpha Y$ con $\alpha \in T^*$ y $Y \in V$. Más aún, si $\beta \in V$ entonces $\beta = X$.

Definición

$G = (V, T, P, S)$ es **regular** si todas sus producciones son de la forma

- $A \rightarrow aB \quad (a \in T, B \in V),$
- $A \rightarrow \epsilon.$

Lema

- Si $X \xRightarrow{*} \beta$ y $\beta \in (V \cup T)^* \setminus T^*$ entonces $\beta = \alpha Y$ con $\alpha \in T^*$ y $Y \in V$. Más aún, si $\beta \in V$ entonces $\beta = X$.
- Si $X \xRightarrow{*} \alpha$ y $\alpha \in T^*$ entonces existe $Y \in V$ tal que $X \xRightarrow{*} \alpha Y$ y $Y \rightarrow \epsilon$ está en P (y luego $X \xRightarrow{*} \alpha Y \Rightarrow \alpha$).

Definición

$G = (V, T, P, S)$ es **regular** si todas sus producciones son de la forma

- $A \rightarrow aB \quad (a \in T, B \in V),$
- $A \rightarrow \epsilon.$

Lema

- Si $X \xRightarrow{*} \beta$ y $\beta \in (V \cup T)^* \setminus T^*$ entonces $\beta = \alpha Y$ con $\alpha \in T^*$ y $Y \in V$. Más aún, si $\beta \in V$ entonces $\beta = X$.
- Si $X \xRightarrow{*} \alpha$ y $\alpha \in T^*$ entonces existe $Y \in V$ tal que $X \xRightarrow{*} \alpha Y$ y $Y \rightarrow \epsilon$ está en P (y luego $X \xRightarrow{*} \alpha Y \Rightarrow \alpha$).

Teorema

L es regular $\iff L = L(G)$ para alguna G regular.

Repaso de NFA (sin movimientos ϵ)

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Q)$

Repaso de NFA (sin movimientos ϵ)

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Q)$

Transiciones compuestas

$$q \xRightarrow{\epsilon} q$$
$$q \xRightarrow{\beta x} q' \quad \text{si y sólo si} \quad \exists r : q \xRightarrow{\beta} r \xrightarrow{x} q'$$



UNC
Universidad
Nacional
de Córdoba



Repaso de NFA (sin movimientos ϵ)

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Q)$

Transiciones compuestas

$$q \xRightarrow{\epsilon} q$$

$$q \xRightarrow{\beta x} q' \quad \text{si y sólo si} \quad \exists r : q \xRightarrow{\beta} r \xrightarrow{x} q'$$

$$L(\mathbb{A}) := \{\alpha \mid \exists q' : q_0 \xRightarrow{\alpha} q' \in F\}.$$



UNC
Universidad
Nacional
de Córdoba



Repaso de NFA (sin movimientos ϵ)

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Q)$

Transiciones compuestas

$$q \xrightarrow{\epsilon} q$$

$$q \xrightarrow{\beta x} q' \quad \text{si y sólo si} \quad \exists r : q \xrightarrow{\beta} r \xrightarrow{x} q'$$

$$L(\mathbb{A}) := \{\alpha \mid \exists q' : q_0 \xrightarrow{\alpha} q' \in F\}.$$

- Gramática regular $G \rightsquigarrow$ NFA $\mathbb{A}(G)$,
- NFA $\mathbb{A} \rightsquigarrow$ gramática regular $G(\mathbb{A})$,

Repaso de NFA (sin movimientos ϵ)

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Q)$

Transiciones compuestas

$$q \xrightarrow{\epsilon} q$$

$$q \xrightarrow{\beta x} q' \quad \text{si y sólo si} \quad \exists r : q \xrightarrow{\beta} r \xrightarrow{x} q'$$

$$L(\mathbb{A}) := \{\alpha \mid \exists q' : q_0 \xrightarrow{\alpha} q' \in F\}.$$

- Gramática regular $G \rightsquigarrow$ NFA $\mathbb{A}(G)$,
- NFA $\mathbb{A} \rightsquigarrow$ gramática regular $G(\mathbb{A})$,

de manera que $L(G) = L(\mathbb{A}(G))$ y $L(\mathbb{A}) = L(G(\mathbb{A}))$.



UNC
Universidad
Nacional
de Córdoba



G regular

$$S \longrightarrow aA$$

$$A \longrightarrow bS \mid cA \mid \epsilon$$

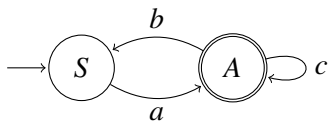
De gramáticas a autómatas, ejemplo

G regular

$$S \longrightarrow aA$$

$$A \longrightarrow bS \mid cA \mid \epsilon$$

NFA $\mathbb{A}(G)$



De gramáticas a autómatas, en general

- $G = (V, T, P, S)$ regular: $A \longrightarrow aB, \quad A \longrightarrow \epsilon.$
- $X \xRightarrow{*} \beta \in (V \cup T)^* \setminus T^*$ implica $\beta = \alpha Y$ con $\alpha \in T^*$ y $Y \in V.$
- $X \xRightarrow{*} \alpha \in T^*$ implica $\exists Y \in V : X \xRightarrow{*} \alpha Y \Rightarrow \alpha.$
- $q \xRightarrow{\beta x} q'$ si y sólo si $\exists r : q \xRightarrow{\beta} r \xrightarrow{x} q'$

De gramáticas a autómatas, en general

- $G = (V, T, P, S)$ regular: $A \longrightarrow aB$, $A \longrightarrow \epsilon$.
- $X \xRightarrow{*} \beta \in (V \cup T)^* \setminus T^*$ implica $\beta = \alpha Y$ con $\alpha \in T^*$ y $Y \in V$.
- $X \xRightarrow{*} \alpha \in T^*$ implica $\exists Y \in V : X \xRightarrow{*} \alpha Y \Rightarrow \alpha$.
- $q \xRightarrow{\beta x} q'$ si y sólo si $\exists r : q \xRightarrow{\beta} r \xrightarrow{x} q'$

$$\mathbb{A}(G) := (V, T, \delta_G, \{X \in V \mid (X \longrightarrow \epsilon) \in P\});$$

$$X \xrightarrow{a} Y \quad \text{si y sólo si} \quad (X \longrightarrow aY) \in P.$$



De gramáticas a autómatas, en general

- $G = (V, T, P, S)$ regular: $A \longrightarrow aB$, $A \longrightarrow \epsilon$.
- $X \xRightarrow{*} \beta \in (V \cup T)^* \setminus T^*$ implica $\beta = \alpha Y$ con $\alpha \in T^*$ y $Y \in V$.
- $X \xRightarrow{*} \alpha \in T^*$ implica $\exists Y \in V : X \xRightarrow{*} \alpha Y \Rightarrow \alpha$.
- $q \xRightarrow{\beta x} q'$ si y sólo si $\exists r : q \xRightarrow{\beta} r \xrightarrow{x} q'$

$$\mathbb{A}(G) := (V, T, \delta_G, \{X \in V \mid (X \longrightarrow \epsilon) \in P\});$$
$$X \xrightarrow{a} Y \quad \text{si y sólo si} \quad (X \longrightarrow aY) \in P.$$

Sea $\alpha \in T^*$

Lema

$$X \xRightarrow{*} \alpha Y \text{ (según } G) \iff X \xRightarrow{\alpha} Y \text{ (según } \mathbb{A}(G)).$$

De gramáticas a autómatas, en general

- $G = (V, T, P, S)$ regular: $A \longrightarrow aB$, $A \longrightarrow \epsilon$.
- $X \xRightarrow{*} \beta \in (V \cup T)^* \setminus T^*$ implica $\beta = \alpha Y$ con $\alpha \in T^*$ y $Y \in V$.
- $X \xRightarrow{*} \alpha \in T^*$ implica $\exists Y \in V : X \xRightarrow{*} \alpha Y \Rightarrow \alpha$.
- $q \xRightarrow{\beta x} q'$ si y sólo si $\exists r : q \xRightarrow{\beta} r \xrightarrow{x} q'$

$$\mathbb{A}(G) := (V, T, \delta_G, \{X \in V \mid (X \longrightarrow \epsilon) \in P\});$$

$$X \xrightarrow{a} Y \quad \text{si y sólo si} \quad (X \longrightarrow aY) \in P.$$

Sea $\alpha \in T^*$

Lema

$$X \xRightarrow{*} \alpha Y \text{ (según } G) \iff X \xRightarrow{\alpha} Y \text{ (según } \mathbb{A}(G)).$$

Demostración.

Por inducción en α .

Las gramáticas regulares definen lenguajes regulares

- $X \xRightarrow{*} \alpha \in T^*$ implica $\exists Y \in V : X \xRightarrow{*} \alpha Y$ y $Y \rightarrow \epsilon$.
- $\mathbb{A}(G) := (V, T, \delta_G, S, F)$ con $F = \{X \in V \mid (X \rightarrow \epsilon) \in P\}$.
- $L(\mathbb{A}(G)) = \{\alpha \mid \exists q : S \xRightarrow{\alpha} q \in F\}$.
- $X \xRightarrow{*} \alpha Y$ (según G) $\iff X \xRightarrow{\alpha} Y$ (según $\mathbb{A}(G)$).

Las gramáticas regulares definen lenguajes regulares

- $X \xRightarrow{*} \alpha \in T^*$ implica $\exists Y \in V : X \xRightarrow{*} \alpha Y$ y $Y \longrightarrow \epsilon$.
- $\mathbb{A}(G) := (V, T, \delta_G, S, F)$ con $F = \{X \in V \mid (X \longrightarrow \epsilon) \in P\}$.
- $L(\mathbb{A}(G)) = \{\alpha \mid \exists q : S \xRightarrow{\alpha} q \in F\}$.
- $X \xRightarrow{*} \alpha Y$ (según G) $\iff X \xRightarrow{\alpha} Y$ (según $\mathbb{A}(G)$).

$$L(G) = L(\mathbb{A}(G))$$

$\alpha \in L(G)$ si y sólo si

Las gramáticas regulares definen lenguajes regulares

- $X \xRightarrow{*} \alpha \in T^*$ implica $\exists Y \in V : X \xRightarrow{*} \alpha Y$ y $Y \rightarrow \epsilon$.
- $\mathbb{A}(G) := (V, T, \delta_G, S, F)$ con $F = \{X \in V \mid (X \rightarrow \epsilon) \in P\}$.
- $L(\mathbb{A}(G)) = \{\alpha \mid \exists q : S \xRightarrow{\alpha} q \in F\}$.
- $X \xRightarrow{*} \alpha Y$ (según G) $\iff X \xRightarrow{\alpha} Y$ (según $\mathbb{A}(G)$).

$$L(G) = L(\mathbb{A}(G))$$

$\alpha \in L(G)$ si y sólo si $S \xRightarrow{*} \alpha$

Las gramáticas regulares definen lenguajes regulares

- $X \xRightarrow{*} \alpha \in T^*$ implica $\exists Y \in V : X \xRightarrow{*} \alpha Y$ y $Y \rightarrow \epsilon$.
- $\mathbb{A}(G) := (V, T, \delta_G, S, F)$ con $F = \{X \in V \mid (X \rightarrow \epsilon) \in P\}$.
- $L(\mathbb{A}(G)) = \{\alpha \mid \exists q : S \xRightarrow{\alpha} q \in F\}$.
- $X \xRightarrow{*} \alpha Y$ (según G) $\iff X \xRightarrow{\alpha} Y$ (según $\mathbb{A}(G)$).

$$L(G) = L(\mathbb{A}(G))$$

$\alpha \in L(G)$ si y sólo si $S \xRightarrow{*} \alpha$

si y sólo si $S \xRightarrow{*} \alpha Y$ y $Y \rightarrow \epsilon$

Las gramáticas regulares definen lenguajes regulares

- $X \xRightarrow{*} \alpha \in T^*$ implica $\exists Y \in V : X \xRightarrow{*} \alpha Y$ y $Y \rightarrow \epsilon$.
- $\mathbb{A}(G) := (V, T, \delta_G, S, F)$ con $F = \{X \in V \mid (X \rightarrow \epsilon) \in P\}$.
- $L(\mathbb{A}(G)) = \{\alpha \mid \exists q : S \xRightarrow{\alpha} q \in F\}$.
- $X \xRightarrow{*} \alpha Y$ (según G) $\iff X \xRightarrow{\alpha} Y$ (según $\mathbb{A}(G)$).

$$L(G) = L(\mathbb{A}(G))$$

$\alpha \in L(G)$ si y sólo si $S \xRightarrow{*} \alpha$

si y sólo si $S \xRightarrow{*} \alpha Y$ y $Y \rightarrow \epsilon$

si y sólo si $S \xRightarrow{\alpha} Y$ y $Y \in F$

Las gramáticas regulares definen lenguajes regulares

- $X \xRightarrow{*} \alpha \in T^*$ implica $\exists Y \in V : X \xRightarrow{*} \alpha Y$ y $Y \longrightarrow \epsilon$.
- $\mathbb{A}(G) := (V, T, \delta_G, S, F)$ con $F = \{X \in V \mid (X \longrightarrow \epsilon) \in P\}$.
- $L(\mathbb{A}(G)) = \{\alpha \mid \exists q : S \xrightarrow{\alpha} q \in F\}$.
- $X \xRightarrow{*} \alpha Y$ (según G) $\iff X \xrightarrow{\alpha} Y$ (según $\mathbb{A}(G)$).

$$L(G) = L(\mathbb{A}(G))$$

$\alpha \in L(G)$ si y sólo si $S \xRightarrow{*} \alpha$
si y sólo si $S \xRightarrow{*} \alpha Y$ y $Y \longrightarrow \epsilon$
si y sólo si $S \xrightarrow{\alpha} Y$ y $Y \in F$
si y sólo si $\alpha \in L(\mathbb{A}(G))$

■ $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

■ $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

$$G(\mathbb{A}) := (Q, \Sigma, P_{\mathbb{A}}, q_0);$$

$$P_{\mathbb{A}} := \begin{cases} q \longrightarrow aq' & \text{sii } q \xrightarrow{a} q' \\ q \longrightarrow \epsilon & \text{sii } q \in F \end{cases}$$

$$\blacksquare \mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F).$$

$$G(\mathbb{A}) := (Q, \Sigma, P_{\mathbb{A}}, q_0);$$

$$P_{\mathbb{A}} := \begin{cases} q \longrightarrow aq' & \text{sii } q \xrightarrow{a} q' \\ q \longrightarrow \epsilon & \text{sii } q \in F \end{cases}$$

Exactamente la misma prueba de antes muestra que $L(\mathbb{A}) = L(G(\mathbb{A}))$.