Introducción a la Lógica y la Computación

Mariana Badano Héctor Gramaglia Pedro Sánchez Terraf
M. Clara Gorín Matías Steinberg

FaMAF, 16 de septiembre de 2020

Universidad Nacional de Córdoba

Contenidos estimados para hoy

1. Repaso
   - Teorema de representación de posets
   - Teorema de representación de álgebras de Boole finitas

2. Teorema de representación de reticulados distributivos finitos
   - Conjuntos decrecientes de un poset
   - Elementos $\vee$-irreducibles
   - Teorema de Birkhoff
   - Caracterizaciones de distributividad

Repaso: Representación de posets

Definición

Sean $(P, \leq)$ poset y $d \in P$. El **ideal principal** determinado por d es $d\!\downarrow := \{x \in P : x \leq d\}$.

Repaso: Representación de posets

Definición

Sean $(P, \leq)$ poset y $d \in P$. El **ideal principal** determinado por d es $d\!\downarrow := \{x \in P : x \leq d\}$.

Lema

Para todos $d, c \in P$, $d \leq c \iff d\!\downarrow \subseteq c\!\downarrow$.

Repaso: Representación de posets

Definición

Sean $(P, \leq)$ poset y $d \in P$. El **ideal principal** determinado por d es $d{\downarrow} := \{x \in P : x \leq d\}$.

Lema

Para todos $d, c \in P$, $d \leq c \iff d{\downarrow} \subseteq c{\downarrow}$.

Teorema

La función definida por

$$\begin{aligned} F : P &\to \mathscr{P}(P) \\ d &\mapsto d{\downarrow} = \{a \in P : a \leq d\} \end{aligned}$$

es un isomorfismo entre $(P, \leq)$ *y el subposet* $(F(P), \subseteq)$ *de* $(\mathscr{P}(P), \subseteq)$.

Teorema de representación de álgebras de Boole finitas

Lema

Atomicidad *Para todo* $b \in B$ *distinto de* 0 *existe* $a \in At(B)$ *tal que* $a \leq b$*.*

Separación *Para todo* $x, y \in B$ *tales que* $x \nleq y$ *existe* $a \in At(B)$ *tal que* $a \leq x$ *y* $a \nleq y$*.*

Teorema de representación de álgebras de Boole finitas

Lema

Atomicidad *Para todo* $b \in B$ *distinto de* 0 *existe* $a \in At(B)$ *tal que* $a \leq b$.

Separación *Para todo* $x, y \in B$ *tales que* $x \nleq y$ *existe* $a \in At(B)$ *tal que* $a \leq x$ *y* $a \nleq y$.

Teorema

Sea $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ *un álgebra de Boole finita. Luego*

$$\begin{aligned} F : B &\to \mathscr{P}(At(B)) \\ x &\mapsto \{a \in At(B) : a \leq x\} \end{aligned}$$

es un isomorfismo entre $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ *y* $\left(\mathscr{P}(At(B)), \cup, \cap, (\cdot)^c, \varnothing, B\right)$.

Teorema de representación de álgebras de Boole finitas

Lema

Atomicidad *Para todo* $b \in B$ *distinto de* 0 *existe* $a \in At(B)$ *tal que* $a \leq b$.

Separación *Para todo* $x, y \in B$ *tales que* $x \nleq y$ *existe* $a \in At(B)$ *tal que* $a \leq x$ *y* $a \nleq y$.

$F(x) \subseteq F(y)$ *implica* $x \leq y$.

Teorema

Sea $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ *un álgebra de Boole finita. Luego*

$$\begin{aligned} F : B &\to \mathscr{P}(At(B)) \\ x &\mapsto \{a \in At(B) : a \leq x\} \end{aligned}$$

es un isomorfismo entre $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ *y* $\left(\mathscr{P}(At(B)), \cup, \cap, (\cdot)^c, \varnothing, B\right)$.

Conjuntos decrecientes de un poset

Sea $(P, \leq)$ un poset.

Definición

Un subconjunto $D \subseteq P$ es **decreciente** si para todo $x, z \in P$ se tiene que:

$$x \in D \ \ \& \ \ z \leq x \implies z \in D.$$

Denotaremos mediante $\mathscr{D}(P)$ a la familia de todos los subconjuntos decrecientes de P.

Conjuntos decrecientes de un poset

Sea $(P, \leq)$ un poset.

Definición

Un subconjunto $D \subseteq P$ es **decreciente** si para todo $x, z \in P$ se tiene que:

$$x \in D \;\; \& \;\; z \leq x \implies z \in D.$$

Denotaremos mediante $\mathscr{D}(P)$ a la familia de todos los subconjuntos decrecientes de P.

Ejemplo

- P es decreciente

Conjuntos decrecientes de un poset

Sea $(P, \leq)$ un poset.

Definición

Un subconjunto $D \subseteq P$ es **decreciente** si para todo $x, z \in P$ se tiene que:

$$x \in D \ \ \& \ \ z \leq x \implies z \in D.$$

Denotaremos mediante $\mathscr{D}(P)$ a la familia de todos los subconjuntos decrecientes de P.

Ejemplo

- P es decreciente (consecuente trivial).

Conjuntos decrecientes de un poset

Sea $(P, \leq)$ un poset.

Definición

Un subconjunto $D \subseteq P$ es **decreciente** si para todo $x, z \in P$ se tiene que:

$$x \in D \;\; \& \;\; z \leq x \implies z \in D.$$

Denotaremos mediante $\mathscr{D}(P)$ a la familia de todos los subconjuntos decrecientes de P.

Ejemplo

- P es decreciente (consecuente trivial).
- $\varnothing$ lo es

Conjuntos decrecientes de un poset

Sea $(P, \leq)$ un poset.

Definición

Un subconjunto $D \subseteq P$ es **decreciente** si para todo $x, z \in P$ se tiene que:

$$x \in D \;\;\&\;\; z \leq x \implies z \in D.$$

Denotaremos mediante $\mathscr{D}(P)$ a la familia de todos los subconjuntos decrecientes de P.

Ejemplo

- P es decreciente (consecuente trivial).
- $\varnothing$ lo es (antecedente falso).

Conjuntos decrecientes de un poset

Sea $(P, \leq)$ un poset.

Definición

Un subconjunto $D \subseteq P$ es **decreciente** si para todo $x, z \in P$ se tiene que:

$$x \in D \ \ \& \ \ z \leq x \implies z \in D.$$

Denotaremos mediante $\mathscr{D}(P)$ a la familia de todos los subconjuntos decrecientes de P.

Ejemplo

- P es decreciente (consecuente trivial).
- $\varnothing$ lo es (antecedente falso).
- $d{\downarrow}$ es decreciente (por transitividad).

Conjuntos decrecientes de un poset

Sea $(P, \leq)$ un poset.

Definición

Un subconjunto $D \subseteq P$ es **decreciente** si para todo $x, z \in P$ se tiene que:

$$x \in D \;\;\&\;\; z \leq x \implies z \in D.$$

Denotaremos mediante $\mathscr{D}(P)$ a la familia de todos los subconjuntos decrecientes de P.

Ejemplo

- P es decreciente (consecuente trivial).
- $\varnothing$ lo es (antecedente falso).
- $d{\downarrow}$ es decreciente (por transitividad).
- Cualquier conjunto de átomos junto con el primer elemento.

Conjuntos decrecientes de un poset

Lema

Si D_1 *y* D_2 *son decrecientes en* $(P, \leq)$*, entonces* $D_1 \cap D_2$ *y* $D_1 \cup D_2$ *también lo son.*

Conjuntos decrecientes de un poset

Lema

Si D_1 y D_2 son decrecientes en $(P, \leq)$, entonces $D_1 \cap D_2$ y $D_1 \cup D_2$ también lo son.

Ejercicio

1. Probar la segunda afirmación.
2. ¿Valen las mismas propiedades de clausura para los ideales principales?

Conjuntos decrecientes de un poset

Lema

Si D_1 *y* D_2 *son decrecientes en* $(P, \leq)$*, entonces* $D_1 \cap D_2$ *y* $D_1 \cup D_2$ *también lo son.*

Ejercicio

1. Probar la segunda afirmación.
2. ¿Valen las mismas propiedades de clausura para los ideales principales?

Corolario

$(\mathscr{D}(P), \subseteq)$ *es un subreticulado de* $(\mathscr{P}(P), \subseteq)$*.*

Codificación de posets en el conjunto de partes

Todo poset se representa como un subposet de $(\mathscr{P}(P), \subseteq)$.

Codificación de posets en el conjunto de partes

Todo poset se representa como un subposet de $(\mathscr{P}(P), \subseteq)$.
¿Qué información es estrictamente necesaria para esa codificación?

Codificación de posets en el conjunto de partes

Todo poset se representa como un subposet de $(\mathscr{P}(P), \subseteq)$.
¿Qué información es estrictamente necesaria para esa codificación?

- Poset generales: los ideales principales $d\!\downarrow$ (i.e., decrecientes determinados por cada elemento d).

Codificación de posets en el conjunto de partes

Todo poset se representa como un subposet de $(\mathscr{P}(P), \subseteq)$.
¿Qué información es estrictamente necesaria para esa codificación?

- Poset generales: los ideales principales $d\downarrow$ (i.e., decrecientes determinados por cada elemento d).
- Álgebras de Boole: mucho menos, bastan los átomos que están en $d\downarrow$.

Codificación de posets en el conjunto de partes

Todo poset se representa como un subposet de $(\mathscr{P}(P), \subseteq)$.
¿Qué información es estrictamente necesaria para esa codificación?

- Poset generales: los ideales principales $d{\downarrow}$ (i.e., decrecientes determinados por cada elemento d).
- Álgebras de Boole: mucho menos, bastan los átomos que están en $d{\downarrow}$. Esencialmente, algunos decrecientes.

Codificación de posets en el conjunto de partes

Todo poset se representa como un subposet de $(\mathscr{P}(P), \subseteq)$.
¿Qué información es estrictamente necesaria para esa codificación?

- Poset generales: los ideales principales $d{\downarrow}$ (i.e., decrecientes determinados por cada elemento d).
- Álgebras de Boole: mucho menos, bastan los átomos que están en $d{\downarrow}$. Esencialmente, algunos decrecientes.
- Reticulados distributivos: veamos ejemplos.

Elementos $\vee$-irreducibles

Definición

Un elemento x de un reticulado L es $\vee$**-irreducible** si

1. x no es el primer elemento, y
2. Para todos $y, z \in L$, si $x = y \vee z$, entonces $y = x$ ó $z = x$.

Denotaremos mediante $Irr(L)$ al conjunto de los elementos irreducibles de L.

Elementos $\vee$-irreducibles

Definición

Un elemento x de un reticulado L es $\vee$**-irreducible** si

1. x no es el primer elemento, y
2. Para todos $y, z \in L$, si $x = y \vee z$, entonces $y = x$ ó $z = x$.

Denotaremos mediante $Irr(L)$ al conjunto de los elementos irreducibles de L.

Es decir, x no se escribe como supremo de elementos todos distintos a él.

Elementos $\vee$-irreducibles

Definición

Un elemento x de un reticulado L es $\vee$**-irreducible** si

1. x no es el primer elemento, y
2. Para todos $y, z \in L$, si $x = y \vee z$, entonces $y = x$ ó $z = x$.

Denotaremos mediante $Irr(L)$ al conjunto de los elementos irreducibles de L.

Es decir, x no se escribe como supremo de elementos todos distintos a él.

Lema

Si L es finito, entonces $x \in L$ es $\vee$-irreducible $\iff$ el conjunto $\{a \in L : a < x\} = x{\downarrow} \setminus \{x\}$ tiene máximo.

Elementos $\vee$-irreducibles

Definición

Un elemento x de un reticulado L es $\vee$**-irreducible** si

1. x no es el primer elemento, y
2. Para todos $y, z \in L$, si $x = y \vee z$, entonces $y = x$ ó $z = x$.

Denotaremos mediante $Irr(L)$ al conjunto de los elementos irreducibles de L.

Es decir, x no se escribe como supremo de elementos todos distintos a él.

Lema

Si L es finito, entonces $x \in L$ es $\vee$-irreducible $\iff$ el conjunto $\{a \in L : a < x\} = x{\downarrow} \setminus \{x\}$ tiene máximo.

Demostración.

El supremo de dicho conjunto finito no puede ser igual a x.

Representación de reticulados distributivos finitos

Teorema (Birkhoff)

Sea L un reticulado distributivo finito. Entonces la función

$$\begin{aligned} F : L &\to \mathscr{D}(Irr(L)) \\ x &\mapsto \{a \in Irr(L) : a \leq x\} \end{aligned}$$

es un isomorfismo entre $(L, \leq)$ y $\big(\mathscr{D}(Irr(L)), \subseteq\big)$ con inversa $\sup$.

Representación de reticulados distributivos finitos

Teorema (Birkhoff)

Sea L un reticulado distributivo finito. Entonces la función

$$\begin{aligned} F : L &\to \mathscr{D}(Irr(L)) \\ x &\mapsto \{a \in Irr(L) : a \leq x\} \end{aligned}$$

es un isomorfismo entre $(L, \leq)$ y $\left(\mathscr{D}(Irr(L)), \subseteq\right)$ con inversa $\sup$.

La prueba es análoga al Teorema de Representación de álgebras de Boole, pero usando $\vee$-irreducibles en lugar de átomos.

Representación de reticulados distributivos finitos

Teorema (Birkhoff)

Sea L un reticulado distributivo finito. Entonces la función

$$\begin{aligned} F : L &\to \mathscr{D}(Irr(L)) \\ x &\mapsto \{a \in Irr(L) : a \leq x\} \end{aligned}$$

es un isomorfismo entre $(L, \leq)$ y $\big(\mathscr{D}(Irr(L)), \subseteq\big)$ con inversa $\sup$.

La prueba es análoga al Teorema de Representación de álgebras de Boole, pero usando $\vee$-irreducibles en lugar de átomos.
La distributividad se usa sólamente para ver que F es sobreyectiva, o equivalentemente: $F(\sup D) = D$ para todo $D \in \mathscr{D}(Irr(L))$.

Representación de reticulados distributivos finitos

Teorema (Birkhoff)

Sea L un reticulado distributivo finito. Entonces la función

$$\begin{aligned} F : L &\to \mathscr{D}(Irr(L)) \\ x &\mapsto \{a \in Irr(L) : a \leq x\} \end{aligned}$$

es un isomorfismo entre $(L, \leq)$ y $\big(\mathscr{D}(Irr(L)), \subseteq\big)$ con inversa $\sup$.

La prueba es análoga al Teorema de Representación de álgebras de Boole, pero usando $\vee$-irreducibles en lugar de átomos.
La distributividad se usa sólamente para ver que F es sobreyectiva, o equivalentemente: $F(\sup D) = D$ para todo $D \in \mathscr{D}(Irr(L))$. Con esto conseguiremos un nuevo criterio de distributividad.

Prueba del Teorema de Birkhoff

Lema (Separación)

Sea L un reticulado (arbitrario) finito. Para todo $x, y \in L$ tales que $x \nleq y$ existe $a \in Irr(L)$ tal que $a \leq x$ y $a \nleq y$.

Prueba del Teorema de Birkhoff

Lema (Separación)

Sea L un reticulado (arbitrario) finito. Para todo $x, y \in L$ tales que $x \nleq y$ existe $a \in Irr(L)$ tal que $a \leq x$ y $a \nleq y$.

$F(x) \subseteq F(y)$ implica $x \leq y$.

Prueba del Teorema de Birkhoff

Lema (Separación)

Sea L un reticulado (arbitrario) finito. Para todo $x, y \in L$ tales que $x \nleq y$ existe $a \in Irr(L)$ tal que $a \leq x$ y $a \nleq y$.

$F(x) \subseteq F(y)$ implica $x \leq y$.

Prueba del Teorema de Representación.

Prueba del Teorema de Birkhoff

Lema (Separación)

Sea L un reticulado (arbitrario) finito. Para todo $x, y \in L$ tales que $x \not\leq y$ existe $a \in Irr(L)$ tal que $a \leq x$ y $a \not\leq y$.

$F(x) \subseteq F(y)$ implica $x \leq y$.

Prueba del Teorema de Representación.

- $F(x) := \{y \in Irr(L) : a \leq x\}$ pertenece a $\mathscr{D}(Irr(L))$.

Prueba del Teorema de Birkhoff

Lema (Separación)

Sea L un reticulado (arbitrario) finito. Para todo $x, y \in L$ tales que $x \nleq y$ existe $a \in Irr(L)$ tal que $a \leq x$ y $a \nleq y$.

$F(x) \subseteq F(y)$ implica $x \leq y$.

Prueba del Teorema de Representación.

- $F(x) := \{y \in Irr(L) : a \leq x\}$ pertenece a $\mathscr{D}(Irr(L))$.

Fácil

Prueba del Teorema de Birkhoff

Lema (Separación)

Sea L un reticulado (arbitrario) finito. Para todo $x, y \in L$ tales que $x \not\leq y$ existe $a \in Irr(L)$ tal que $a \leq x$ y $a \not\leq y$. *$F(x) \subseteq F(y)$ implica $x \leq y$.*

Prueba del Teorema de Representación.

- $F(x) := \{y \in Irr(L) : a \leq x\}$ pertenece a $\mathcal{D}(Irr(L))$. Fácil
- F y $\sup$ preservan el orden.
- $x = \sup F(x) = \sup\{a \in Irr(L) : a \leq x\}$ para todo $x \in L$.

Prueba del Teorema de Birkhoff

Lema (Separación)

Sea L un reticulado (arbitrario) finito. Para todo $x, y \in L$ tales que $x \nleq y$ existe $a \in Irr(L)$ tal que $a \leq x$ y $a \nleq y$. *$F(x) \subseteq F(y)$ implica $x \leq y$.*

Prueba del Teorema de Representación.

- $F(x) := \{y \in Irr(L) : a \leq x\}$ pertenece a $\mathcal{D}(Irr(L))$. Fácil
- F y $\sup$ preservan el orden.
- $x = \sup F(x) = \sup\{a \in Irr(L) : a \leq x\}$ para todo $x \in L$.

Igual que para álgebras de Boole

Prueba del Teorema de Birkhoff

Lema (Separación)

Sea L un reticulado (arbitrario) finito. Para todo $x, y \in L$ tales que $x \nleq y$ existe $a \in Irr(L)$ tal que $a \leq x$ y $a \nleq y$. $F(x) \subseteq F(y)$ *implica* $x \leq y$.

Prueba del Teorema de Representación.

- $F(x) := \{y \in Irr(L) : a \leq x\}$ pertenece a $\mathcal{D}(Irr(L))$. Fácil
- F y $\sup$ preservan el orden.
- $x = \sup F(x) = \sup\{a \in Irr(L) : a \leq x\}$ para todo $x \in L$.
  Igual que para álgebras de Boole
- $D = F(\sup D) = \{a \in Irr(B) : a \leq \sup D\}$ para todo $D \in \mathcal{D}(Irr(B))$.

Prueba del Teorema de Birkhoff

Lema (Separación)

Sea L un reticulado (arbitrario) finito. Para todo $x, y \in L$ tales que $x \nleq y$ existe $a \in Irr(L)$ tal que $a \leq x$ y $a \nleq y$. $F(x) \subseteq F(y)$ *implica* $x \leq y$.

Prueba del Teorema de Representación.

- $F(x) := \{y \in Irr(L) : a \leq x\}$ pertenece a $\mathcal{D}(Irr(L))$. Fácil
- F y $\sup$ preservan el orden.
- $x = \sup F(x) = \sup\{a \in Irr(L) : a \leq x\}$ para todo $x \in L$.
  Igual que para álgebras de Boole
- $D = F(\sup D) = \{a \in Irr(B) : a \leq \sup D\}$ para todo $D \in \mathcal{D}(Irr(B))$.
  Vemos las dos inclusiones como antes

Caracterizaciones de distributividad

Teorema

Sea L un reticulado. Son equivalentes:

- L *es distributivo;*

Caracterizaciones de distributividad

Teorema

Sea L un reticulado. Son equivalentes:

- *L es distributivo;*
- *para todos $a, b, c \in L$,*

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c);$$

Caracterizaciones de distributividad

Teorema

Sea L un reticulado. Son equivalentes:

- *L es distributivo;*
- *para todos $a, b, c \in L$,*

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c);$$

- *para todos $a, b, c \in L$,*

$$\left.\begin{array}{l} a \vee b = a \vee c \\ a \wedge b = a \wedge c \end{array}\right\} \implies b = c; \text{ y}$$

Caracterizaciones de distributividad

Teorema

Sea L un reticulado. Son equivalentes:

- *L es distributivo;*
- *para todos $a, b, c \in L$,*

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c);$$

- *para todos $a, b, c \in L$,*

$$\left.\begin{array}{l} a \vee b = a \vee c \\ a \wedge b = a \wedge c \end{array}\right\} \implies b = c; \text{ y}$$

- *ni M_3 ni N_5 se incrustan en L.*

Caracterizaciones de distributividad

Teorema

Sea L un reticulado. Son equivalentes:

- *L es distributivo;*
- *para todos $a, b, c \in L$,*

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c);$$

- *para todos $a, b, c \in L$,*

$$\left.\begin{array}{l} a \vee b = a \vee c \\ a \wedge b = a \wedge c \end{array}\right\} \implies b = c; \text{ y}$$

- *ni M_3 ni N_5 se incrustan en L.*
- $|L| = |\mathcal{D}(Irr(L))|$ *(ambos conjuntos tienen el mismo tamaño).*