Introducción a la Lógica y la Computación

Mariana Badano Héctor Gramaglia Pedro Sánchez Terraf
M. Clara Gorín Matías Steinberg

FaMAF, 28 de octubre de 2020

Contenidos estimados para hoy

1. Conexiones entre lógica y álgebras de Boole
   - Relación de deducción entre proposiciones
   - Cocientes
   - Orden en $\overline{PROP}$
   - Ínfimos y supremos en $\overline{PROP}$
   - Estructura del álgebra de Boole $\overline{PROP}$

¿Qué tienen que ver. . . ?

Tratemos de encontrar conexión entre esta parte y la anterior

¿Qué tienen que ver. . . ?

Tratemos de encontrar conexión entre esta parte y la anterior. . . Si no, ¿por qué usaríamos los mismos símbolos para ínfimo que conjunción, etcétera?

¿Qué tienen que ver. . . ?

Tratemos de encontrar conexión entre esta parte y la anterior. . . Si no, ¿por qué usaríamos los mismos símbolos para ínfimo que conjunción, etcétera?

Definamos una relación en $PROP$: $\varphi \preccurlyeq \psi \ :\Longleftrightarrow \ \{\varphi\} \vdash \psi$.

¿Qué tienen que ver. . . ?

Tratemos de encontrar conexión entre esta parte y la anterior. . . Si no, ¿por qué usaríamos los mismos símbolos para ínfimo que conjunción, etcétera?
Definamos una relación en $PROP$: $\varphi \preccurlyeq \psi \ :\Longleftrightarrow \ \{\varphi\} \vdash \psi$.

Propiedades de $\preccurlyeq$

1. $\{\varphi\} \vdash \varphi$.

¿Qué tienen que ver. . . ?

Tratemos de encontrar conexión entre esta parte y la anterior. . . Si no, ¿por qué usaríamos los mismos símbolos para ínfimo que conjunción, etcétera?
Definamos una relación en $PROP$: $\varphi \preccurlyeq \psi \; :\Longleftrightarrow \; \{\varphi\} \vdash \psi$.

Propiedades de $\preccurlyeq$

1. $\{\varphi\} \vdash \varphi$.
2. Si $\{\varphi\} \vdash \psi$ y $\{\psi\} \vdash \chi$ entonces $\{\varphi\} \vdash \chi$.

¿Qué tienen que ver…?

Tratemos de encontrar conexión entre esta parte y la anterior… Si no, ¿por qué usaríamos los mismos símbolos para ínfimo que conjunción, etcétera? Definamos una relación en $PROP$: $\varphi \preccurlyeq \psi \;:\Longleftrightarrow\; \{\varphi\} \vdash \psi$.

Propiedades de $\preccurlyeq$

1. $\{\varphi\} \vdash \varphi$.
2. Si $\{\varphi\} \vdash \psi$ y $\{\psi\} \vdash \chi$ entonces $\{\varphi\} \vdash \chi$.
3. Si $\{\varphi\} \vdash \psi$ y $\{\psi\} \vdash \varphi$ entonces $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$.

¿Qué tienen que ver. . . ?

Tratemos de encontrar conexión entre esta parte y la anterior. . . Si no, ¿por qué usaríamos los mismos símbolos para ínfimo que conjunción, etcétera?
Definamos una relación en $PROP$: $\varphi \preccurlyeq \psi \ :\Longleftrightarrow\ \{\varphi\} \vdash \psi$.

Propiedades de $\preccurlyeq$

1. $\varphi \preccurlyeq \varphi$.
2. Si $\{\varphi\} \vdash \psi$ y $\{\psi\} \vdash \chi$ entonces $\{\varphi\} \vdash \chi$.
3. Si $\{\varphi\} \vdash \psi$ y $\{\psi\} \vdash \varphi$ entonces $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$.

¿Qué tienen que ver…?

Tratemos de encontrar conexión entre esta parte y la anterior… Si no, ¿por qué usaríamos los mismos símbolos para ínfimo que conjunción, etcétera?
Definamos una relación en $PROP$: $\varphi \preccurlyeq \psi \;:\Longleftrightarrow\; \{\varphi\} \vdash \psi$.

Propiedades de $\preccurlyeq$

1. $\varphi \preccurlyeq \varphi$.
2. Si $\varphi \preccurlyeq \psi$ y $\psi \preccurlyeq \chi$ entonces $\varphi \preccurlyeq \chi$.
3. Si $\{\varphi\} \vdash \psi$ y $\{\psi\} \vdash \varphi$ entonces $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$.

¿Qué tienen que ver…?

Tratemos de encontrar conexión entre esta parte y la anterior… Si no, ¿por qué usaríamos los mismos símbolos para ínfimo que conjunción, etcétera?
Definamos una relación en $PROP$: $\varphi \preccurlyeq \psi \;:\Longleftrightarrow\; \{\varphi\} \vdash \psi$.

Propiedades de $\preccurlyeq$

1. $\varphi \preccurlyeq \varphi$.
2. Si $\varphi \preccurlyeq \psi$ y $\psi \preccurlyeq \chi$ entonces $\varphi \preccurlyeq \chi$.
3. Si $\varphi \preccurlyeq \psi$ y $\psi \preccurlyeq \varphi$ entonces $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$.

¿Qué tienen que ver. . . ?

Tratemos de encontrar conexión entre esta parte y la anterior. . . Si no, ¿por qué usaríamos los mismos símbolos para ínfimo que conjunción, etcétera?
Definamos una relación en $PROP$: $\varphi \preccurlyeq \psi \;:\Longleftrightarrow\; \{\varphi\} \vdash \psi$.

Propiedades de $\preccurlyeq$

1. $\varphi \preccurlyeq \varphi$.
2. Si $\varphi \preccurlyeq \psi$ y $\psi \preccurlyeq \chi$ entonces $\varphi \preccurlyeq \chi$.
3. Si $\varphi \preccurlyeq \psi$ y $\psi \preccurlyeq \varphi$ entonces $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$.

Encuesta!!!

¿Es $\preccurlyeq$ una relación de orden?

¿Qué tienen que ver. . . ?

Tratemos de encontrar conexión entre esta parte y la anterior. . . Si no, ¿por qué usaríamos los mismos símbolos para ínfimo que conjunción, etcétera?

Definamos una relación en $PROP$: $\varphi \preccurlyeq \psi \;:\Longleftrightarrow\; \{\varphi\} \vdash \psi$.

Propiedades de $\preccurlyeq$

1. $\varphi \preccurlyeq \varphi$.
2. Si $\varphi \preccurlyeq \psi$ y $\psi \preccurlyeq \chi$ entonces $\varphi \preccurlyeq \chi$.
3. Si $\varphi \preccurlyeq \psi$ y $\psi \preccurlyeq \varphi$ entonces $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$.

Encuesta!!!

¿Es $\preccurlyeq$ una relación de orden? $\longrightarrow$ Actividad en Aula virtual!

No

No. Es un **preorden**.

¿Qué tienen que ver...?

Tratemos de encontrar conexión entre esta parte y la anterior... Si no, ¿por qué usaríamos los mismos símbolos para ínfimo que conjunción, etcétera?
Definamos una relación en $PROP$: $\varphi \preccurlyeq \psi \;:\Longleftrightarrow\; \{\varphi\} \vdash \psi$.

Propiedades de $\preccurlyeq$

1. $\varphi \preccurlyeq \varphi$.
2. Si $\varphi \preccurlyeq \psi$ y $\psi \preccurlyeq \chi$ entonces $\varphi \preccurlyeq \chi$.
3. Si $\varphi \preccurlyeq \psi$ y $\psi \preccurlyeq \varphi$ entonces $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$.

Encuesta!!!

¿Es $\preccurlyeq$ una relación de orden? $\longrightarrow$ Actividad en Aula virtual!

¿Qué tienen que ver…?

Tratemos de encontrar conexión entre esta parte y la anterior… Si no, ¿por qué usaríamos los mismos símbolos para ínfimo que conjunción, etcétera?
Definamos una relación en $PROP$: $\varphi \preccurlyeq \psi \;:\Longleftrightarrow\; \{\varphi\} \vdash \psi$.

Propiedades de $\preccurlyeq$

1. $\varphi \preccurlyeq \varphi$.
2. Si $\varphi \preccurlyeq \psi$ y $\psi \preccurlyeq \chi$ entonces $\varphi \preccurlyeq \chi$.
3. Si $\varphi \preccurlyeq \psi$ y $\psi \preccurlyeq \varphi$ entonces $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$, pero puede ser $\varphi \neq \psi$.

Encuesta!!!

¿Es $\preccurlyeq$ una relación de orden? $\longrightarrow$ Actividad en Aula virtual!

Cocientes

- $\varphi \preccurlyeq \psi \iff \{\varphi\} \vdash \psi$.
- $\varphi \preccurlyeq \psi \;\&\; \psi \preccurlyeq \varphi \implies \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$

Cocientes

- $\varphi \preccurlyeq \psi \iff \{\varphi\} \vdash \psi$.
- $\varphi \preccurlyeq \psi \ \& \ \psi \preccurlyeq \varphi \implies \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$

Es relación de equivalencia.

Cocientes

- $\varphi \preccurlyeq \psi \iff \{\varphi\} \vdash \psi$.
- $\varphi \preccurlyeq \psi \ \& \ \psi \preccurlyeq \varphi \implies \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$

Es relación de equivalencia.

Solución: considerar las cosas equivalentes como iguales.

Cocientes

- $\varphi \preccurlyeq \psi \iff \{\varphi\} \vdash \psi$.
- $\varphi \preccurlyeq \psi \;\&\; \psi \preccurlyeq \varphi \implies \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$

Es relación de equivalencia.

Solución: considerar las cosas equivalentes como iguales.

Definición

- $\overline{\varphi} :=$ clase de equivalencia de φ

Cocientes

- $\varphi \preccurlyeq \psi \iff \{\varphi\} \vdash \psi$.
- $\varphi \preccurlyeq \psi \ \& \ \psi \preccurlyeq \varphi \implies \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$

Es relación de equivalencia.

Solución: considerar las cosas equivalentes como iguales.

Definición

- $\overline{\varphi} :=$ clase de equivalencia de $\varphi = \{\psi \in PROP : \varphi \preccurlyeq \psi \ \& \ \psi \preccurlyeq \varphi\}$.

Cocientes

- $\varphi \preccurlyeq \psi \iff \{\varphi\} \vdash \psi$.
- $\varphi \preccurlyeq \psi \;\&\; \psi \preccurlyeq \varphi \implies \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$

Es relación de equivalencia.

Solución: considerar las cosas equivalentes como iguales.

Definición

- $\overline{\varphi} :=$ clase de equivalencia de $\varphi = \{\psi \in PROP : \varphi \preccurlyeq \psi \;\&\; \psi \preccurlyeq \varphi\}$.
- $\overline{PROP} := \{\overline{\varphi} : \varphi \in PROP\}$.

Cocientes

- $\varphi \preccurlyeq \psi \iff \{\varphi\} \vdash \psi$.
- $\varphi \preccurlyeq \psi \ \& \ \psi \preccurlyeq \varphi \implies \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$

Es relación de equivalencia.

Solución: considerar las cosas equivalentes como iguales.

Definición

- $\overline{\varphi} :=$ clase de equivalencia de $\varphi = \{\psi \in PROP : \varphi \preccurlyeq \psi \ \& \ \psi \preccurlyeq \varphi\}$.
- $\overline{PROP} := \{\overline{\varphi} : \varphi \in PROP\}$.

Orden en $\overline{PROP}$

$\overline{\varphi} \leq \overline{\psi} \iff \varphi \preccurlyeq \psi$.

Orden en $\overline{PROP}$

- $\overline{\varphi} \leq \overline{\psi} \iff \varphi \preccurlyeq \psi \iff \{\varphi\} \vdash \psi$.

Orden en $\overline{PROP}$

- $\overline{\varphi} \leq \overline{\psi} \iff \varphi \preccurlyeq \psi \iff \{\varphi\} \vdash \psi$.

Proposición ($\leq$ no es total en $\overline{PROP}$)

$n \neq m \implies \overline{p_n} \nleq \overline{p_m}$ *para todos* $n, m \in \mathbb{N}_0$.

Orden en $\overline{PROP}$

- $\overline{\varphi} \leq \overline{\psi} \iff \varphi \preccurlyeq \psi \iff \{\varphi\} \vdash \psi$.

Proposición ($\leq$ no es total en $\overline{PROP}$)

$n \neq m \implies \overline{p_n} \not\leq \overline{p_m}$ *para todos* $n, m \in \mathbb{N}_0$.

Necesitamos una manera de justificar que $\{p_n\} \nvdash p_m$.

Orden en $\overline{PROP}$

- $\overline{\varphi} \leq \overline{\psi} \iff \varphi \preccurlyeq \psi \iff \{\varphi\} \vdash \psi$.

Proposición ($\leq$ no es total en $\overline{PROP}$)

$n \neq m \implies \overline{p_n} \nleq \overline{p_m}$ *para todos* $n, m \in \mathbb{N}_0$.

Necesitamos una manera de justificar que $\{p_n\} \nvdash p_m$.

No derivación

Para ver que $\Gamma \nvdash \varphi$, basta encontrar v tal que $[\![\Gamma]\!]_v = 1$ y $[\![\varphi]\!]_v = 0$.

Orden en $\overline{PROP}$

- $\overline{\varphi} \leq \overline{\psi} \iff \varphi \preccurlyeq \psi \iff \{\varphi\} \vdash \psi$.

Proposición ($\leq$ no es total en $\overline{PROP}$)

$n \neq m \implies \overline{p_n} \nleq \overline{p_m}$ *para todos* $n, m \in \mathbb{N}_0$.

Necesitamos una manera de justificar que $\{p_n\} \nvdash p_m$.

No derivación

Para ver que $\Gamma \nvdash \varphi$, basta encontrar v tal que $[\![\Gamma]\!]_v = 1$ y $[\![\varphi]\!]_v = 0$.

(El Teorema de Corrección dice que si $[\![\Gamma]\!]_v = 1$ y $\Gamma \vdash \varphi$, entonces $[\![\varphi]\!]_v = 1$)

Orden en $\overline{PROP}$

- $\overline{\varphi} \leq \overline{\psi} \iff \varphi \preccurlyeq \psi \iff \{\varphi\} \vdash \psi$.

Proposición ($\leq$ no es total en $\overline{PROP}$)

$n \neq m \implies \overline{p_n} \nleq \overline{p_m}$ *para todos* $n, m \in \mathbb{N}_0$.

Necesitamos una manera de justificar que $\{p_n\} \nvdash p_m$.

No derivación

Para ver que $\Gamma \nvdash \varphi$, basta encontrar v tal que $[\![\Gamma]\!]_v = 1$ y $[\![\varphi]\!]_v = 0$.

(El Teorema de Corrección dice que si $[\![\Gamma]\!]_v = 1$ y $\Gamma \vdash \varphi$, entonces $[\![\varphi]\!]_v = 1$)

Prueba de la Proposición

Basta tomar $v : \mathcal{V} \to \{0, 1\}$ tal que $v(p_j) := 1 \iff j = n$.

Ínfimos y supremos en $\overline{PROP}$

- $\overline{\varphi} \leq \overline{\psi} \iff \varphi \preccurlyeq \psi \iff \{\varphi\} \vdash \psi$.

Ínfimos y supremos en $\overline{PROP}$

- $\overline{\varphi} \leq \overline{\psi} \iff \varphi \preccurlyeq \psi \iff \{\varphi\} \vdash \psi$.

Ejercicios

1. $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi$.
2. $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \psi$.
3. Si $\{\chi\} \vdash \varphi$ y $\{\chi\} \vdash \psi$ entonces $\{\chi\} \vdash \varphi \wedge \psi$.

Ínfimos y supremos en $\overline{PROP}$

- $\overline{\varphi} \leq \overline{\psi} \iff \varphi \preccurlyeq \psi \iff \{\varphi\} \vdash \psi$.

Ejercicios

1. $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi$. $\overline{\varphi \wedge \psi} \leq \overline{\varphi}$.
2. $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \psi$.
3. Si $\{\chi\} \vdash \varphi$ y $\{\chi\} \vdash \psi$ entonces $\{\chi\} \vdash \varphi \wedge \psi$.

.

Ínfimos y supremos en $\overline{PROP}$

- $\overline{\varphi} \leq \overline{\psi} \iff \varphi \preccurlyeq \psi \iff \{\varphi\} \vdash \psi$.

Ejercicios

1. $\{\varphi \land \psi\} \vdash \varphi$. $\quad \overline{\varphi \land \psi} \leq \overline{\varphi}$.
2. $\{\varphi \land \psi\} \vdash \psi$. $\quad \overline{\varphi \land \psi} \leq \overline{\psi}$.
3. Si $\{\chi\} \vdash \varphi$ y $\{\chi\} \vdash \psi$ entonces $\{\chi\} \vdash \varphi \land \psi$.

.

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Ínfimos y supremos en $\overline{PROP}$

- $\overline{\varphi} \leq \overline{\psi} \iff \varphi \preccurlyeq \psi \iff \{\varphi\} \vdash \psi$.

Ejercicios

1. $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi$. $\quad \overline{\varphi \wedge \psi} \leq \overline{\varphi}$.
2. $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \psi$. $\quad \overline{\varphi \wedge \psi} \leq \overline{\psi}$.
3. Si $\{\chi\} \vdash \varphi$ y $\{\chi\} \vdash \psi$ entonces $\{\chi\} \vdash \varphi \wedge \psi$.
   Si $\overline{\chi} \leq \overline{\varphi}$ y $\overline{\chi} \leq \overline{\psi}$ entonces $\overline{\chi} \leq \overline{\varphi \wedge \psi}$.

Ínfimos y supremos en $\overline{PROP}$

- $\overline{\varphi} \leq \overline{\psi} \iff \varphi \preccurlyeq \psi \iff \{\varphi\} \vdash \psi$.

Ejercicios

1. $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi$. $\quad \overline{\varphi \wedge \psi} \leq \overline{\varphi}$.
2. $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \psi$. $\quad \overline{\varphi \wedge \psi} \leq \overline{\psi}$.
3. Si $\{\chi\} \vdash \varphi$ y $\{\chi\} \vdash \psi$ entonces $\{\chi\} \vdash \varphi \wedge \psi$.
   Si $\overline{\chi} \leq \overline{\varphi}$ y $\overline{\chi} \leq \overline{\psi}$ entonces $\overline{\chi} \leq \overline{\varphi \wedge \psi}$.

Hay ínfimo

$\overline{\varphi} \sqcap \overline{\psi} := \overline{\varphi \wedge \psi}$ es el ínfimo de $\{\overline{\varphi}, \overline{\psi}\}$ en $(\overline{PROP}, \leq)$.

$\overline{PROP}$ es un reticulado distributivo

De igual modo,

$$\overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi} := \overline{\varphi \vee \psi} = \sup\{\overline{\varphi}, \overline{\psi}\}.$$

$\overline{PROP}$ es un reticulado distributivo

De igual modo,

$$\overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi} := \overline{\varphi \vee \psi} = \sup\{\overline{\varphi}, \overline{\psi}\}.$$

$\overline{\bot}$ es el primer elemento y $\overline{\top} = \overline{\neg\bot}$ el último:

$$\{\bot\} \vdash \varphi \qquad \{\varphi\} \vdash \top.$$

Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

$\overline{PROP}$ es un reticulado distributivo

De igual modo,

$$\overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi} := \overline{\varphi \vee \psi} = \sup\{\overline{\varphi}, \overline{\psi}\}.$$

$\overline{\bot}$ es el primer elemento y $\overline{\top} = \overline{\neg\bot}$ el último:

$$\{\bot\} \vdash \varphi \qquad \{\varphi\} \vdash \top.$$

Además, $\sim \overline{\varphi} := \overline{\neg\varphi}$ resulta ser un complemento de $\overline{\varphi}$.

$\overline{PROP}$ es un reticulado distributivo

De igual modo,

$$\overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi} := \overline{\varphi \vee \psi} = \sup\{\overline{\varphi}, \overline{\psi}\}.$$

$\overline{\bot}$ es el primer elemento y $\overline{\top} = \overline{\neg\bot}$ el último:

$$\{\bot\} \vdash \varphi \qquad \{\varphi\} \vdash \top.$$

Además, $\sim \overline{\varphi} := \overline{\neg\varphi}$ resulta ser un complemento de $\overline{\varphi}$.

Ejercicio

$\{(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta)\} \vdash \varphi \vee (\psi \wedge \theta)$.

$\overline{PROP}$ es un reticulado distributivo

De igual modo,

$$\overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi} := \overline{\varphi \vee \psi} = \sup\{\overline{\varphi}, \overline{\psi}\}.$$

$\overline{\bot}$ es el primer elemento y $\overline{\top} = \overline{\neg\bot}$ el último:

$$\{\bot\} \vdash \varphi \qquad \{\varphi\} \vdash \top.$$

Además, $\sim \overline{\varphi} := \overline{\neg\varphi}$ resulta ser un complemento de $\overline{\varphi}$.

Ejercicio

$\{(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta)\} \vdash \varphi \vee (\psi \wedge \theta)$. $\quad (\overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi}) \sqcap (\overline{\varphi} \sqcup \overline{\theta}) \leq \overline{\varphi} \sqcup (\overline{\psi} \sqcap \overline{\theta})$

$\overline{PROP}$ es un reticulado distributivo

De igual modo,

$$\overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi} := \overline{\varphi \vee \psi} = \sup\{\overline{\varphi}, \overline{\psi}\}.$$

$\overline{\bot}$ es el primer elemento y $\overline{\top} = \overline{\neg\bot}$ el último:

$$\{\bot\} \vdash \varphi \qquad \{\varphi\} \vdash \top.$$

Además, $\sim \overline{\varphi} := \overline{\neg\varphi}$ resulta ser un complemento de $\overline{\varphi}$.

Ejercicio

$\{(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta)\} \vdash \varphi \vee (\psi \wedge \theta)$. $\quad (\overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi}) \sqcap (\overline{\varphi} \sqcup \overline{\theta}) \leq \overline{\varphi} \sqcup (\overline{\psi} \sqcap \overline{\theta})$

Luego $(\overline{PROP}, \leq)$ es un reticulado distributivo.

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

$\overline{PROP}$ es un reticulado distributivo

De igual modo,

$$\overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi} := \overline{\varphi \vee \psi} = \sup\{\overline{\varphi}, \overline{\psi}\}.$$

$\overline{\bot}$ es el primer elemento y $\overline{\top} = \overline{\neg\bot}$ el último:

$$\{\bot\} \vdash \varphi \qquad \{\varphi\} \vdash \top.$$

Además, $\sim \overline{\varphi} := \overline{\neg\varphi}$ resulta ser un complemento de $\overline{\varphi}$.

Ejercicio

$\{(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta)\} \vdash \varphi \vee (\psi \wedge \theta)$. $\quad (\overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi}) \sqcap (\overline{\varphi} \sqcup \overline{\theta}) \leq \overline{\varphi} \sqcup (\overline{\psi} \sqcap \overline{\theta})$

Luego $(\overline{PROP}, \leq)$ es un reticulado distributivo.
...wait a minute.

De igual modo,

$$\overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi} := \overline{\varphi \vee \psi} = \sup\{\overline{\varphi}, \overline{\psi}\}.$$

$\overline{\bot}$ es el primer elemento y $\overline{\top} = \overline{\neg\bot}$ el último:

$$\{\bot\} \vdash \varphi \qquad \{\varphi\} \vdash \top.$$

Además, $\sim \overline{\varphi} := \overline{\neg\varphi}$ resulta ser un complemento de $\overline{\varphi}$.

Ejercicio

$\{(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta)\} \vdash \varphi \vee (\psi \wedge \theta)$. $\quad (\overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi}) \sqcap (\overline{\varphi} \sqcup \overline{\theta}) \leq \overline{\varphi} \sqcup (\overline{\psi} \sqcap \overline{\theta})$

Luego $(\overline{PROP}, \leq)$ es un reticulado distributivo.

…wait a minute.

¿Distributivo?

$\overline{PROP}$ es un reticulado distributivo. . . ¿¡Por qué!?

$\sqcap$ es el ínfimo

1. $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi$.
2. $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \psi$.
3. Si $\{\chi\} \vdash \varphi$ y $\{\chi\} \vdash \psi$ entonces $\{\chi\} \vdash \varphi \wedge \psi$.

$\overline{PROP}$ es un reticulado distributivo… ¿¡Por qué!?

$\sqcap$ es el ínfimo

1. $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi$. $\qquad \overline{\varphi} \sqcap \overline{\psi} \leq \overline{\varphi}$.
2. $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \psi$. $\qquad \overline{\varphi} \sqcap \overline{\psi} \leq \overline{\psi}$.
3. Si $\{\chi\} \vdash \varphi$ y $\{\chi\} \vdash \psi$ entonces $\{\chi\} \vdash \varphi \wedge \psi$.
   Si $\overline{\chi} \leq \overline{\varphi}$ y $\overline{\chi} \leq \overline{\psi}$ entonces $\overline{\chi} \leq \overline{\varphi} \sqcap \overline{\psi}$.

$\overline{PROP}$ es un reticulado distributivo... ¿¡Por qué!?

$\sqcap$ es el ínfimo

1. $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi$. $(\wedge E)$ $\overline{\varphi} \sqcap \overline{\psi} \leq \overline{\varphi}$.
2. $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \psi$. $\overline{\varphi} \sqcap \overline{\psi} \leq \overline{\psi}$.
3. Si $\{\chi\} \vdash \varphi$ y $\{\chi\} \vdash \psi$ entonces $\{\chi\} \vdash \varphi \wedge \psi$.
   Si $\overline{\chi} \leq \overline{\varphi}$ y $\overline{\chi} \leq \overline{\psi}$ entonces $\overline{\chi} \leq \overline{\varphi} \sqcap \overline{\psi}$.

$\overline{PROP}$ es un reticulado distributivo... ¿¡Por qué!?

$\sqcap$ es el ínfimo

1. $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi$. $(\wedge E)$ $\overline{\varphi} \sqcap \overline{\psi} \leq \overline{\varphi}$.
2. $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \psi$. $(\wedge E)$ $\overline{\varphi} \sqcap \overline{\psi} \leq \overline{\psi}$.
3. Si $\{\chi\} \vdash \varphi$ y $\{\chi\} \vdash \psi$ entonces $\{\chi\} \vdash \varphi \wedge \psi$.
   Si $\overline{\chi} \leq \overline{\varphi}$ y $\overline{\chi} \leq \overline{\psi}$ entonces $\overline{\chi} \leq \overline{\varphi} \sqcap \overline{\psi}$.

$\overline{PROP}$ es un reticulado distributivo. . . ¿¡Por qué!?

$\sqcap$ es el ínfimo

1. $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi$. $(\wedge E)$ $\overline{\varphi} \sqcap \overline{\psi} \leq \overline{\varphi}$.
2. $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \psi$. $(\wedge E)$ $\overline{\varphi} \sqcap \overline{\psi} \leq \overline{\psi}$.
3. Si $\{\chi\} \vdash \varphi$ y $\{\chi\} \vdash \psi$ entonces $\{\chi\} \vdash \varphi \wedge \psi$. $(\wedge I)$
   Si $\overline{\chi} \leq \overline{\varphi}$ y $\overline{\chi} \leq \overline{\psi}$ entonces $\overline{\chi} \leq \overline{\varphi} \sqcap \overline{\psi}$.

$\overline{PROP}$ es un reticulado distributivo... ¿¡Por qué!?

$\sqcap$ es el ínfimo

1. $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi$. $(\wedge E)$ $\overline{\varphi} \sqcap \overline{\psi} \leq \overline{\varphi}$.
2. $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \psi$. $(\wedge E)$ $\overline{\varphi} \sqcap \overline{\psi} \leq \overline{\psi}$.
3. Si $\{\chi\} \vdash \varphi$ y $\{\chi\} \vdash \psi$ entonces $\{\chi\} \vdash \varphi \wedge \psi$. $(\wedge I)$
   Si $\overline{\chi} \leq \overline{\varphi}$ y $\overline{\chi} \leq \overline{\psi}$ entonces $\overline{\chi} \leq \overline{\varphi} \sqcap \overline{\psi}$.

Sólo estamos describiendo las reglas de $\wedge$.

$\overline{PROP}$ es un reticulado distributivo... ¿¡Por qué!?

$\sqcup$ es el supremo

1. $\{\varphi\} \vdash \varphi \vee \psi$. $\quad \overline{\varphi} \leq \overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi}$.
2. $\{\psi\} \vdash \varphi \vee \psi$. $\quad \overline{\psi} \leq \overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi}$.
3. Si $\{\varphi\} \vdash \chi$ y $\{\psi\} \vdash \chi$ entonces $\{\varphi \vee \psi\} \vdash \chi$.
   Si $\overline{\varphi} \leq \overline{\chi}$ y $\overline{\psi} \leq \overline{\chi}$ entonces $\overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi} \leq \overline{\chi}$.

Sólo estamos describiendo las reglas de $\wedge$.

$\overline{PROP}$ es un reticulado distributivo. . . ¿¡Por qué!?

$\sqcup$ es el supremo

1. $\{\varphi\} \vdash \varphi \vee \psi$. $\quad (\vee I) \quad \overline{\varphi} \leq \overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi}$.
2. $\{\psi\} \vdash \varphi \vee \psi$. $\quad (\vee I) \quad \overline{\psi} \leq \overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi}$.
3. Si $\{\varphi\} \vdash \chi$ y $\{\psi\} \vdash \chi$ entonces $\{\varphi \vee \psi\} \vdash \chi$. $\quad (\vee E)$
   Si $\overline{\varphi} \leq \overline{\chi}$ y $\overline{\psi} \leq \overline{\chi}$ entonces $\overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi} \leq \overline{\chi}$.

Sólo estamos describiendo las reglas de $\wedge$. Lo mismo con $\vee$.

$\overline{PROP}$ es un reticulado distributivo. . . ¿¡Por qué!?

$\sqcup$ es el supremo

1. $\{\varphi\} \vdash \varphi \vee \psi$. $\quad (\vee I) \quad \overline{\varphi} \leq \overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi}$.
2. $\{\psi\} \vdash \varphi \vee \psi$. $\quad (\vee I) \quad \overline{\psi} \leq \overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi}$.
3. Si $\{\varphi\} \vdash \chi$ y $\{\psi\} \vdash \chi$ entonces $\{\varphi \vee \psi\} \vdash \chi$. $\quad (\vee E)$
   Si $\overline{\varphi} \leq \overline{\chi}$ y $\overline{\psi} \leq \overline{\chi}$ entonces $\overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi} \leq \overline{\chi}$.

Sólo estamos describiendo las reglas de $\wedge$. Lo mismo con $\vee$.
Entonces, ¿de dónde sale la distributividad?

Prueba de distributividad

$$\dfrac{\dfrac{(\varphi\vee\psi)\wedge(\varphi\vee\theta)}{\varphi\vee\psi}\wedge E \qquad \dfrac{[\varphi]_1}{\varphi\vee(\psi\wedge\theta)}\vee I \qquad \dfrac{\dfrac{(\varphi\vee\psi)\wedge(\varphi\vee\theta)}{\varphi\vee\theta}\wedge E \quad \dfrac{[\varphi]_2}{\varphi\vee(\psi\wedge\theta)}\vee I \quad \dfrac{\dfrac{[\psi]_1\,[\theta]_2}{\psi\wedge\theta}\wedge I}{\varphi\vee(\psi\wedge\theta)}\vee I}{\varphi\vee(\psi\wedge\theta)}\vee E_2}{\varphi\vee(\psi\wedge\theta)}\vee E_1$$

Prueba de distributividad

$$\dfrac{\dfrac{(\varphi\vee\psi)\wedge(\varphi\vee\theta)}{\varphi\vee\psi}\wedge E \qquad \dfrac{[\varphi]_1}{\varphi\vee(\psi\wedge\theta)}\vee I \qquad \dfrac{\dfrac{(\varphi\vee\psi)\wedge(\varphi\vee\theta)}{\varphi\vee\theta}\wedge E \quad \dfrac{[\varphi]_2}{\varphi\vee(\psi\wedge\theta)}\vee I \quad \dfrac{\dfrac{[\psi]_1\,[\theta]_2}{\psi\wedge\theta}\wedge I}{\varphi\vee(\psi\wedge\theta)}\vee I}{\varphi\vee(\psi\wedge\theta)}\vee E_2}{\varphi\vee(\psi\wedge\theta)}\vee E_1$$

Misterio a resolver por Ustedes!

La estructura de $\overline{PROP}$

$(\overline{PROP}, \sqcup, \sqcap, \overline{\bot}, \overline{\top}, \sim)$ es un álgebra de Boole.

$(\overline{PROP}, \sqcup, \sqcap, \overline{\bot}, \overline{\top}, \sim)$ es un álgebra de Boole.

Lema

$(\overline{PROP}, \sqcup, \sqcap, \overline{\bot}, \overline{\top}, \sim)$ *no tiene átomos.*

La estructura de $\overline{PROP}$

$(\overline{PROP}, \sqcup, \sqcap, \overline{\bot}, \overline{\top}, \sim)$ es un álgebra de Boole.

Lema

$(\overline{PROP}, \sqcup, \sqcap, \overline{\bot}, \overline{\top}, \sim)$ *no tiene átomos.*

Demostración.

Sea $\varphi \in PROP$ tal que $\overline{\bot} < \overline{\varphi}$.

La estructura de $\overline{PROP}$

$(\overline{PROP}, \sqcup, \sqcap, \overline{\bot}, \overline{\top}, \sim)$ es un álgebra de Boole.

Lema

$(\overline{PROP}, \sqcup, \sqcap, \overline{\bot}, \overline{\top}, \sim)$ *no tiene átomos.*

Demostración.

Sea $\varphi \in PROP$ tal que $\overline{\bot} < \overline{\varphi}$. Tomemos $p_n \in \mathcal{V}$ que no ocurra en φ.

La estructura de $\overline{PROP}$

$(\overline{PROP}, \sqcup, \sqcap, \overline{\bot}, \overline{\top}, \sim)$ es un álgebra de Boole.

Lema

$(\overline{PROP}, \sqcup, \sqcap, \overline{\bot}, \overline{\top}, \sim)$ *no tiene átomos.*

Demostración.

Sea $\varphi \in PROP$ tal que $\overline{\bot} < \overline{\varphi}$. Tomemos $p_n \in \mathcal{V}$ que no ocurra en φ. Entonces $\overline{\bot} < \overline{(\varphi \wedge p_n)} < \overline{\varphi}$ gracias al Lema de Coincidencia.

La estructura de $\overline{PROP}$

$(\overline{PROP}, \sqcup, \sqcap, \overline{\bot}, \overline{\top}, \sim)$ es un álgebra de Boole.

Lema

$(\overline{PROP}, \sqcup, \sqcap, \overline{\bot}, \overline{\top}, \sim)$ *no tiene átomos.*

Demostración.

Sea $\varphi \in PROP$ tal que $\overline{\bot} < \overline{\varphi}$. Tomemos $p_n \in \mathcal{V}$ que no ocurra en φ. Entonces $\overline{\bot} < \overline{(\varphi \wedge p_n)} < \overline{\varphi}$ gracias al Lema de Coincidencia.

Corolario (No representación)

$\overline{PROP}$ *no es isomorfo a* $\mathscr{P}(X)$ *para ningún* X.

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Fin de la Segunda Parte