Introducción a la Lógica y la Computación

Mariana Badano Héctor Gramaglia Pedro Sánchez Terraf
M. Clara Gorín Matías Steinberg

FaMAF, 18 de septiembre de 2020

UNC Universidad Nacional de Córdoba
1613 - 2013 400 AÑOS

Contenidos estimados para hoy

1. Teorema de representación de reticulados distributivos finitos
   - Decrecientes e Irreducibles
   - Teorema de Birkhoff
   - Caracterizaciones de distributividad
2. Construcciones con Estructuras
   - Productos directos de posets
   - Productos directos de retículos
   - Suma directa de posets
3. Aplicaciones extra
   - Caracterización de D_n
   - Teoría ecuacional de $(\mathscr{P}(A), \cup, \cap)$

Conjuntos decrecientes de un poset

Sea $(P, \leq)$ un poset.

Definición

Un subconjunto $D \subseteq P$ es **decreciente** si para todo $x, z \in P$ se tiene que:

$$x \in D \ \ \& \ \ z \leq x \implies z \in D.$$

Denotaremos mediante $\mathscr{D}(P)$ a la familia de todos los subconjuntos decrecientes de P.

Conjuntos decrecientes de un poset

Sea $(P, \leq)$ un poset.

Definición

Un subconjunto $D \subseteq P$ es **decreciente** si para todo $x, z \in P$ se tiene que:

$$x \in D \;\;\&\;\; z \leq x \implies z \in D.$$

Denotaremos mediante $\mathscr{D}(P)$ a la familia de todos los subconjuntos decrecientes de P.

Lema

$(\mathscr{D}(P), \subseteq)$ es un subreticulado (distributivo) de $(\mathscr{P}(P), \subseteq)$.

Elementos $\vee$-irreducibles

Definición

Un elemento x de un reticulado L es $\vee$**-irreducible** si

1. x no es el primer elemento, y
2. Para todos $y, z \in L$, si $x = y \vee z$, entonces $y = x$ ó $z = x$.

Denotaremos mediante $Irr(L)$ al conjunto de los elementos irreducibles de L.

Elementos $\vee$-irreducibles

Definición

Un elemento x de un reticulado L es $\vee$**-irreducible** si

1. x no es el primer elemento, y
2. Para todos $y, z \in L$, si $x = y \vee z$, entonces $y = x$ ó $z = x$.

Denotaremos mediante $Irr(L)$ al conjunto de los elementos irreducibles de L.

Lema (Separación)

Sea L un reticulado (arbitrario) finito. Para todo $x, y \in L$ tales que $x \nleq y$ existe $a \in Irr(L)$ tal que $a \leq x$ y $a \nleq y$.

Elementos $\vee$-irreducibles

Definición

Un elemento x de un reticulado L es $\vee$**-irreducible** si

1. x no es el primer elemento, y
2. Para todos $y, z \in L$, si $x = y \vee z$, entonces $y = x$ ó $z = x$.

Denotaremos mediante $Irr(L)$ al conjunto de los elementos irreducibles de L.

Lema (Separación)

Sea L un reticulado (arbitrario) finito. Para todo $x, y \in L$ tales que $x \not\leq y$ existe $a \in Irr(L)$ tal que $a \leq x$ y $a \not\leq y$.

$Irr(L)$ como subposet

$Irr(L)$ hereda el orden de L, y luego podemos definir $\mathcal{D}(Irr(L))$.

Representación de reticulados distributivos finitos

Teorema (Birkhoff)

Sea L *un reticulado distributivo finito. Entonces la función*

$$\begin{aligned} F : L &\to \mathscr{D}(Irr(L)) \\ x &\mapsto \{a \in Irr(L) : a \leq x\} \end{aligned}$$

es un isomorfismo entre $(L, \leq)$ *y* $\left(\mathscr{D}(Irr(L)), \subseteq\right)$ *con inversa* $\sup$.

Teorema (Birkhoff)

Sea L un reticulado distributivo finito. Entonces la función

$$\begin{aligned} F : L &\to \mathscr{D}(Irr(L)) \\ x &\mapsto \{a \in Irr(L) : a \leq x\} \end{aligned}$$

es un isomorfismo entre $(L, \leq)$ y $\big(\mathscr{D}(Irr(L)), \subseteq\big)$ con inversa $\sup$.

La distributividad se usa sólamente para ver que F es sobreyectiva, o equivalentemente: $F(\sup D) = D$ para todo $D \in \mathscr{D}(Irr(L))$.

Prueba del Teorema de Birkhoff

Si L un reticulado distributivo finito, $F(x) := \{a \in Irr(L) : a \leq x\}$ es un isomorfismo entre $(L, \leq)$ y $\big(\mathscr{D}(Irr(L)), \subseteq\big)$ y su inversa es
$\sup : \mathscr{D}(Irr(L)) \to L$

Prueba del Teorema de Representación.

Prueba del Teorema de Birkhoff

Si L un reticulado distributivo finito, $F(x) := \{a \in Irr(L) : a \leq x\}$ es un isomorfismo entre $(L, \leq)$ y $\left(\mathscr{D}(Irr(L)), \subseteq\right)$ y su inversa es $\sup : \mathscr{D}(Irr(L)) \to L$

Prueba del Teorema de Representación.

- $F(x) := \{y \in Irr(L) : a \leq x\}$ pertenece a $\mathscr{D}(Irr(L))$.

Prueba del Teorema de Birkhoff

Si L un reticulado distributivo finito, $F(x) := \{a \in Irr(L) : a \leq x\}$ es un isomorfismo entre $(L, \leq)$ y $\left(\mathscr{D}(Irr(L)), \subseteq\right)$ y su inversa es $\sup : \mathscr{D}(Irr(L)) \to L$

Prueba del Teorema de Representación.

- $F(x) := \{y \in Irr(L) : a \leq x\}$ pertenece a $\mathscr{D}(Irr(L))$. Fácil

Prueba del Teorema de Birkhoff

Si L un reticulado distributivo finito, $F(x) := \{a \in Irr(L) : a \leq x\}$ es un isomorfismo entre $(L, \leq)$ y $\big(\mathscr{D}(Irr(L)), \subseteq\big)$ y su inversa es $\sup : \mathscr{D}(Irr(L)) \to L$

Prueba del Teorema de Representación.

- $F(x) := \{y \in Irr(L) : a \leq x\}$ pertenece a $\mathscr{D}(Irr(L))$. Fácil
- F y $\sup$ preservan el orden.
- $x = \sup F(x) = \sup\{a \in Irr(L) : a \leq x\}$ para todo $x \in L$.

Prueba del Teorema de Birkhoff

Si L un reticulado distributivo finito, $F(x) := \{a \in Irr(L) : a \leq x\}$ es un isomorfismo entre $(L, \leq)$ y $\left(\mathscr{D}(Irr(L)), \subseteq\right)$ y su inversa es $\sup : \mathscr{D}(Irr(L)) \to L$

Prueba del Teorema de Representación.

- $F(x) := \{y \in Irr(L) : a \leq x\}$ pertenece a $\mathscr{D}(Irr(L))$. Fácil
- F y $\sup$ preservan el orden.
- $x = \sup F(x) = \sup\{a \in Irr(L) : a \leq x\}$ para todo $x \in L$.

Igual que para álgebras de Boole

Prueba del Teorema de Birkhoff

Si L un reticulado distributivo finito, $F(x) := \{a \in Irr(L) : a \leq x\}$ es un isomorfismo entre $(L, \leq)$ y $\big(\mathscr{D}(Irr(L)), \subseteq\big)$ y su inversa es $\sup : \mathscr{D}(Irr(L)) \to L$

Prueba del Teorema de Representación.

- $F(x) := \{y \in Irr(L) : a \leq x\}$ pertenece a $\mathscr{D}(Irr(L))$. Fácil
- F y $\sup$ preservan el orden.
- $x = \sup F(x) = \sup\{a \in Irr(L) : a \leq x\}$ para todo $x \in L$.
  Igual que para álgebras de Boole
- $D = F(\sup D) = \{a \in Irr(B) : a \leq \sup D\}$ para todo $D \in \mathscr{D}(Irr(B))$.

Prueba del Teorema de Birkhoff

Si L un reticulado distributivo finito, $F(x) := \{a \in Irr(L) : a \leq x\}$ es un isomorfismo entre $(L, \leq)$ y $\left(\mathscr{D}(Irr(L)), \subseteq\right)$ y su inversa es $\sup : \mathscr{D}(Irr(L)) \to L$

Prueba del Teorema de Representación.

- $F(x) := \{y \in Irr(L) : a \leq x\}$ pertenece a $\mathscr{D}(Irr(L))$. Fácil
- F y $\sup$ preservan el orden.
- $x = \sup F(x) = \sup\{a \in Irr(L) : a \leq x\}$ para todo $x \in L$.

  Igual que para álgebras de Boole
- $D = F(\sup D) = \{a \in Irr(B) : a \leq \sup D\}$ para todo $D \in \mathscr{D}(Irr(B))$.

  Vemos las dos inclusiones como antes

Caracterizaciones de distributividad

Teorema

Sea L un reticulado finito. Son equivalentes:

- *L es distributivo;*

Teorema

Sea L un reticulado finito. Son equivalentes:

- *L es distributivo;*
- *(Lema 5.1 Apunte) para todos $a, b, c \in L$,*

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c);$$

Caracterizaciones de distributividad

Teorema

Sea L un reticulado finito. Son equivalentes:

- *L es distributivo;*
- *(Lema 5.1 Apunte) para todos $a, b, c \in L$,*

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c);$$

- *(P5E9) para todos $a, b, c \in L$,*

$$\left.\begin{array}{r} a \vee b = a \vee c \\ a \wedge b = a \wedge c \end{array}\right\} \implies b = c; \text{ y}$$

Caracterizaciones de distributividad

Teorema

Sea L un reticulado finito. Son equivalentes:

- *L es distributivo;*
- *(Lema 5.1 Apunte) para todos $a, b, c \in L$,*

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c);$$

- *(P5E9) para todos $a, b, c \in L$,*

$$\left.\begin{array}{r} a \vee b = a \vee c \\ a \wedge b = a \wedge c \end{array}\right\} \implies b = c; \text{ y}$$

- *ni M_3 ni N_5 se incrustan en L.*

Caracterizaciones de distributividad

Teorema

Sea L un reticulado finito. Son equivalentes:

- *L es distributivo;*
- *(Lema 5.1 Apunte) para todos $a, b, c \in L$,*

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c);$$

- *(P5E9) para todos $a, b, c \in L$,*

$$\left.\begin{array}{c} a \vee b = a \vee c \\ a \wedge b = a \wedge c \end{array}\right\} \implies b = c; \text{ y}$$

- *ni M_3 ni N_5 se incrustan en L.*
- $|L| = |\mathscr{D}(Irr(L))|$ *(ambos conjuntos tienen el mismo tamaño).*

Productos directos de posets

Definición

El **producto directo** $(L, \leq_L) \times (M, \leq_M)$ de $(L, \leq_L)$ y $(M, \leq_M)$ tiene como universo a $L \times M$ y como orden parcial a la relación

$$(x_1, y_1) \leq_{L\times M} (x_2, y_2) \iff x_1 \leq_L x_2 \ \& \ y_1 \leq_M y_2.$$

Definimos además $L^1 := L$ y $L^{n+1} := L \times L^n$ para todo poset L.

Productos directos de posets

Definición

El **producto directo** $(L, \leq_L) \times (M, \leq_M)$ de $(L, \leq_L)$ y $(M, \leq_M)$ tiene como universo a $L \times M$ y como orden parcial a la relación

$$(x_1, y_1) \leq_{L\times M} (x_2, y_2) \iff x_1 \leq_L x_2 \ \& \ y_1 \leq_M y_2.$$

Definimos además $L^1 := L$ y $L^{n+1} := L \times L^n$ para todo poset L.   ¿L^0?

Productos directos de posets

Definición

El **producto directo** $(L, \leq_L) \times (M, \leq_M)$ de $(L, \leq_L)$ y $(M, \leq_M)$ tiene como universo a $L \times M$ y como orden parcial a la relación

$$(x_1, y_1) \leq_{L\times M} (x_2, y_2) \iff x_1 \leq_L x_2 \ \& \ y_1 \leq_M y_2.$$

Definimos además $L^1 := L$ y $L^{n+1} := L \times L^n$ para todo poset L. ¿L^0?

Diferencias y similitudes con la multiplicación

$$L \times M \neq M \times L \qquad L \times (M \times N) \neq (L \times M) \times N$$

Productos directos de posets

Definición

El **producto directo** $(L, \leq_L) \times (M, \leq_M)$ de $(L, \leq_L)$ y $(M, \leq_M)$ tiene como universo a $L \times M$ y como orden parcial a la relación

$$(x_1, y_1) \leq_{L \times M} (x_2, y_2) \iff x_1 \leq_L x_2 \;\&\; y_1 \leq_M y_2.$$

Definimos además $L^1 := L$ y $L^{n+1} := L \times L^n$ para todo poset L. ¿L^0?

Diferencias y similitudes con la multiplicación

	$L \times M \neq M \times L$	$L \times (M \times N) \neq (L \times M) \times N$	
pero sí	$L \times M \cong M \times L$	$L \times (M \times N) \cong (L \times M) \times N$	(iso).

Productos directos de posets

Definición

El **producto directo** $(L, \leq_L) \times (M, \leq_M)$ de $(L, \leq_L)$ y $(M, \leq_M)$ tiene como universo a $L \times M$ y como orden parcial a la relación

$$(x_1, y_1) \leq_{L\times M} (x_2, y_2) \iff x_1 \leq_L x_2 \;\&\; y_1 \leq_M y_2.$$

Definimos además $L^1 := L$ y $L^{n+1} := L \times L^n$ para todo poset L. ¿L^0?

Diferencias y similitudes con la multiplicación

	$L \times M \neq M \times L$	$L \times (M \times N) \neq (L \times M) \times N$
pero sí	$L \times M \cong M \times L$	$L \times (M \times N) \cong (L \times M) \times N$ (iso).

Ejemplo

A las cadenas de $2, 3, 4, \ldots$ elementos las denotaremos $\mathbf{2}$, $\mathbf{3}$, $\mathbf{4}$, etc.

Productos directos de posets

Definición

El **producto directo** $(L, \leq_L) \times (M, \leq_M)$ de $(L, \leq_L)$ y $(M, \leq_M)$ tiene como universo a $L \times M$ y como orden parcial a la relación

$$(x_1, y_1) \leq_{L\times M} (x_2, y_2) \iff x_1 \leq_L x_2 \ \& \ y_1 \leq_M y_2.$$

Definimos además $L^1 := L$ y $L^{n+1} := L \times L^n$ para todo poset L. ¿L^0?

Diferencias y similitudes con la multiplicación

	$L \times M \neq M \times L$	$L \times (M \times N) \neq (L \times M) \times N$
pero sí	$L \times M \cong M \times L$	$L \times (M \times N) \cong (L \times M) \times N$ (iso).

Ejemplo

A las cadenas de $2, 3, 4, \ldots$ elementos las denotaremos $\mathbf{2}$, $\mathbf{3}$, $\mathbf{4}$, etc.
$\mathbf{2} \times \mathbf{2}$,

Productos directos de posets

Definición

El **producto directo** $(L, \leq_L) \times (M, \leq_M)$ de $(L, \leq_L)$ y $(M, \leq_M)$ tiene como universo a $L \times M$ y como orden parcial a la relación

$$(x_1, y_1) \leq_{L\times M} (x_2, y_2) \iff x_1 \leq_L x_2 \;\&\; y_1 \leq_M y_2.$$

Definimos además $L^1 := L$ y $L^{n+1} := L \times L^n$ para todo poset L. ¿L^0?

Diferencias y similitudes con la multiplicación

	$L \times M \neq M \times L$	$L \times (M \times N) \neq (L \times M) \times N$
pero sí	$L \times M \cong M \times L$	$L \times (M \times N) \cong (L \times M) \times N$ (iso).

Ejemplo

A las cadenas de $2, 3, 4, \ldots$ elementos las denotaremos $\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}$, etc.
$\mathbf{2} \times \mathbf{2}, \quad \mathbf{2} \times \mathbf{3},$

Productos directos de posets

Definición

El **producto directo** $(L, \leq_L) \times (M, \leq_M)$ de $(L, \leq_L)$ y $(M, \leq_M)$ tiene como universo a $L \times M$ y como orden parcial a la relación

$$(x_1, y_1) \leq_{L\times M} (x_2, y_2) \iff x_1 \leq_L x_2 \;\&\; y_1 \leq_M y_2.$$

Definimos además $L^1 := L$ y $L^{n+1} := L \times L^n$ para todo poset L. ¿L^0?

Diferencias y similitudes con la multiplicación

	$L \times M \neq M \times L$	$L \times (M \times N) \neq (L \times M) \times N$	
pero sí	$L \times M \cong M \times L$	$L \times (M \times N) \cong (L \times M) \times N$	(iso).

Ejemplo

A las cadenas de $2, 3, 4, \ldots$ elementos las denotaremos $\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}$, etc.

$\mathbf{2} \times \mathbf{2}, \quad \mathbf{2} \times \mathbf{3}, \quad \mathbf{2}^n$

Productos directos de posets

Definición

El **producto directo** $(L, \leq_L) \times (M, \leq_M)$ de $(L, \leq_L)$ y $(M, \leq_M)$ tiene como universo a $L \times M$ y como orden parcial a la relación

$$(x_1, y_1) \leq_{L \times M} (x_2, y_2) \iff x_1 \leq_L x_2 \ \& \ y_1 \leq_M y_2.$$

Definimos además $L^1 := L$ y $L^{n+1} := L \times L^n$ para todo poset L. ¿L^0?

Diferencias y similitudes con la multiplicación

	$L \times M \neq M \times L$	$L \times (M \times N) \neq (L \times M) \times N$	
pero sí	$L \times M \cong M \times L$	$L \times (M \times N) \cong (L \times M) \times N$	(iso).

Ejemplo

A las cadenas de $2, 3, 4, \ldots$ elementos las denotaremos $\mathbf{2}$, $\mathbf{3}$, $\mathbf{4}$, etc.
$\mathbf{2} \times \mathbf{2}$, $\mathbf{2} \times \mathbf{3}$, $\mathbf{2}^n \cong \mathscr{P}(\{1, \ldots, n\})$ (P7E13a).

Productos directos de retículos

También se pueden hacer productos de estructuras algebraicas.

Productos directos de retículos

También se pueden hacer productos de estructuras algebraicas.

Definición

El **producto directo** $(L, \vee_L, \wedge_L) \times (M, \vee_M, \wedge_M)$ de dos retículos tiene como universo a $L \times M$ y operaciones definidas **coordenada a coordenada**:

$$(x_1, y_1) \vee_{L\times M} (x_2, y_2) := (x_1 \vee_L x_2, y_1 \vee_M y_2)$$
$$(x_1, y_1) \wedge_{L\times M} (x_2, y_2) := (x_1 \wedge_L x_2, y_1 \wedge_M y_2)$$

Productos directos de retículos

También se pueden hacer productos de estructuras algebraicas.

Definición

El **producto directo** $(L, \vee_L, \wedge_L) \times (M, \vee_M, \wedge_M)$ de dos retículos tiene como universo a $L \times M$ y operaciones definidas **coordenada a coordenada**:

$$(x_1, y_1) \vee_{L\times M} (x_2, y_2) := (x_1 \vee_L x_2, y_1 \vee_M y_2)$$
$$(x_1, y_1) \wedge_{L\times M} (x_2, y_2) := (x_1 \wedge_L x_2, y_1 \wedge_M y_2)$$

Ejercicio

1. (P7E8b) Comprobar que esta definición es coherente con la del producto como posets.

También se pueden hacer productos de estructuras algebraicas.

Definición

El **producto directo** $(L, \vee_L, \wedge_L) \times (M, \vee_M, \wedge_M)$ de dos retículos tiene como universo a $L \times M$ y operaciones definidas **coordenada a coordenada**:

$$(x_1, y_1) \vee_{L \times M} (x_2, y_2) := (x_1 \vee_L x_2, y_1 \vee_M y_2)$$
$$(x_1, y_1) \wedge_{L \times M} (x_2, y_2) := (x_1 \wedge_L x_2, y_1 \wedge_M y_2)$$

Ejercicio

1. (P7E8b) Comprobar que esta definición es coherente con la del producto como posets.
2. **(*)** Definir producto infinito o potencia infinita de estructuras.

Suma de posets

Si tenemos productos. . . ¿cómo no vamos a tener sumas?

Suma de posets

Si tenemos productos... ¿cómo no vamos a tener sumas?

Definición

La **suma directa** $(L, \leq_L) \oplus (M, \leq_M)$ de $(L, \leq_L)$ y $(M, \leq_M)$ disjuntos tiene como universo a $L \cup M$ y al orden parcial definido por casos:

$$x \leq_{L \oplus M} y \iff (x, y \in L \ \& \ x \leq_L y) \text{ ó } (x, y \in M \ \& \ x \leq_M y)$$

Suma de posets

Si tenemos productos. . . ¿cómo no vamos a tener sumas?

Definición

La **suma directa** $(L, \leq_L) \oplus (M, \leq_M)$ de $(L, \leq_L)$ y $(M, \leq_M)$ disjuntos tiene como universo a $L \cup M$ y al orden parcial definido por casos:

$$x \leq_{L \oplus M} y \iff (x, y \in L \;\&\; x \leq_L y) \text{ ó } (x, y \in M \;\&\; x \leq_M y)$$

(Para estructuras algebraicas es más difícil definir la suma directa).

Suma de posets

Si tenemos productos. . . ¿cómo no vamos a tener sumas?

Definición

La **suma directa** $(L, \leq_L) \oplus (M, \leq_M)$ de $(L, \leq_L)$ y $(M, \leq_M)$ disjuntos tiene como universo a $L \cup M$ y al orden parcial definido por casos:

$$x \leq_{L \oplus M} y \iff (x, y \in L \;\&\; x \leq_L y) \text{ ó } (x, y \in M \;\&\; x \leq_M y)$$

(Para estructuras algebraicas es más difícil definir la suma directa).
La suma directa de posets corresponde a poner “uno al lado del otro”, sin relación entre ellos —de hecho, $(\leq_{L \oplus M}) = (\leq_L) \cup (\leq_M)$.

Caracterización de D_n

Ejercicios

- Si $D \subseteq L \cup M$ es decreciente en $L \oplus M$, entonces $D \cap L$ es decreciente en L y $D \cap M$ lo es en M.
- Si $D \subseteq L$ es decreciente en L, entonces lo es en $L \oplus M$ (ídem $D \subseteq M$).

Caracterización de D_n

Ejercicios

- Si $D \subseteq L \cup M$ es decreciente en $L \oplus M$, entonces $D \cap L$ es decreciente en L y $D \cap M$ lo es en M.
- Si $D \subseteq L$ es decreciente en L, entonces lo es en $L \oplus M$ (ídem $D \subseteq M$).

Teorema

Para todo par de posets L y M, $\mathscr{D}(L \oplus M) \cong \mathscr{D}(L) \times \mathscr{D}(M)$.

Caracterización de D_n

Ejercicios

- Si $D \subseteq L \cup M$ es decreciente en $L \oplus M$, entonces $D \cap L$ es decreciente en L y $D \cap M$ lo es en M.
- Si $D \subseteq L$ es decreciente en L, entonces lo es en $L \oplus M$ (ídem $D \subseteq M$).

Teorema

Para todo par de posets L y M, $\mathscr{D}(L \oplus M) \cong \mathscr{D}(L) \times \mathscr{D}(M)$.

Corolario (Caracterización de D_n)

Todo poset de divisores es un producto de cadenas (usa P7E4b).

Teoría ecuacional de $(\mathscr{P}(A), \cup, \cap)$, A finito

Lema (Finitud local)

Sea L distributivo y $F \subseteq L$ finito. Entonces hay un subreticulado finito L_0 que incluye a F: $F \subseteq L_0 \subseteq L$.

Teoría ecuacional de $(\mathscr{P}(A), \cup, \cap)$, A finito

Lema (Finitud local)

Sea L distributivo y $F \subseteq L$ finito. Entonces hay un subreticulado finito L_0 que incluye a F: $F \subseteq L_0 \subseteq L$.

Ecuaciones válidas en $(\mathscr{P}(A), \cup, \cap)$

Una ecuación vale en las álgebras de conjuntos finitas $\iff$ es consecuencia de los axiomas de retículos distributivos.

Teoría ecuacional de $(\mathscr{P}(A), \cup, \cap)$, A finito

1. Idempotencia: $x \cup x = x \cap x = x$.
2. Conmutatividad: $x \cup y = y \cup x \qquad x \cap y = y \cap x$.
3. Absorción: $x \cup (x \cap y) = x \qquad x \cap (x \cup y) = x$.
4. Asociatividad: $(x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z) \qquad (x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z)$.
5. Distributividad: $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$.

Teoría ecuacional de $(\mathscr{P}(A), \cup, \cap)$, A finito

Lema (Finitud local)

Sea L distributivo y $F \subseteq L$ finito. Entonces hay un subreticulado finito L_0 que incluye a F: $F \subseteq L_0 \subseteq L$.

Ecuaciones válidas en $(\mathscr{P}(A), \cup, \cap)$

Una ecuación vale en las álgebras de conjuntos finitas $\iff$ es consecuencia de los axiomas de retículos distributivos.

Teoría ecuacional de $(\mathscr{P}(A), \cup, \cap)$, A finito

Lema (Finitud local)

Sea L distributivo y $F \subseteq L$ finito. Entonces hay un subreticulado finito L_0 que incluye a F: $F \subseteq L_0 \subseteq L$.

Ecuaciones válidas en $(\mathscr{P}(A), \cup, \cap)$

Una ecuación vale en las álgebras de conjuntos finitas $\iff$ es consecuencia de los axiomas de retículos distributivos.

Demostración.

Supongamos por el absurdo que hay ecuación ε válida en todos los $(\mathscr{P}(A), \cup, \cap)$ finitos, pero falla en algún retículo distributivo L.

Teoría ecuacional de $(\mathscr{P}(A), \cup, \cap)$, A finito

Lema (Finitud local)

Sea L distributivo y $F \subseteq L$ finito. Entonces hay un subreticulado finito L_0 que incluye a F: $F \subseteq L_0 \subseteq L$.

Ecuaciones válidas en $(\mathscr{P}(A), \cup, \cap)$

Una ecuación vale en las álgebras de conjuntos finitas $\iff$ es consecuencia de los axiomas de retículos distributivos.

Demostración.

Supongamos por el absurdo que hay ecuación ε válida en todos los $(\mathscr{P}(A), \cup, \cap)$ finitos, pero falla en algún retículo distributivo L. Por finitud local, falla en algún subretículo finito L_0

Teoría ecuacional de $(\mathscr{P}(A), \cup, \cap)$, A finito

Lema (Finitud local)

Sea L distributivo y $F \subseteq L$ finito. Entonces hay un subreticulado finito L_0 que incluye a F: $F \subseteq L_0 \subseteq L$.

Ecuaciones válidas en $(\mathscr{P}(A), \cup, \cap)$

Una ecuación vale en las álgebras de conjuntos finitas $\iff$ es consecuencia de los axiomas de retículos distributivos.

Demostración.

Supongamos por el absurdo que hay ecuación ε válida en todos los $(\mathscr{P}(A), \cup, \cap)$ finitos, pero falla en algún retículo distributivo L. Por finitud local, falla en algún subretículo finito L_0

Pero L_0 se incrusta en $(\mathscr{P}(Irr(L_0)), \cup, \cap)$, y como éste satisface ε, L_0 debe satisfacerla. Absurdo.

Fin de la Primera Parte