Introducción a la Lógica y la Computación

Mariana Badano Héctor Gramaglia
Pedro Sánchez Terraf Mauricio Tellechea
G. Ivetta S. Arranz Olmos

FaMAF, segundo cuatrimestre 2021

Universidad Nacional de Córdoba

Información Básica

Aula virtual

Aquí pondremos toda la información actualizada:

https://famaf.aulavirtual.unc.edu.ar/course/view.php?id=809

Información Básica

Aula virtual

Aquí pondremos toda la información actualizada:

https://famaf.aulavirtual.unc.edu.ar/course/view.php?id=809

Ediciones anteriores de la materia

En la Wiki de Ciencias de la Computación y en mi web de la materia 2020.

Información Básica

Regularidad

Deberán aprobar **dos de tres parciales**, con fechas tentativas 22 de septiembre, 27 de octubre y 26 de noviembre.

Información Básica

Regularidad

Deberán aprobar **dos de tres parciales**, con fechas tentativas 22 de septiembre, 27 de octubre y 26 de noviembre.

Finales

Los exámenes tendrán un ejercicio extra muy fácil pero obligatorio para las personas en situación de libres.

Dinámica de trabajo

Clases virtuales

- Santiago Arranz y Guido Ivetta serán moderadores del chat.

Dinámica de trabajo

Clases virtuales

- Santiago Arranz y Guido Ivetta serán moderadores del chat.
- Hagan consultas ahí, y en caso de ser necesario, me la comunicarán a mí.

Dinámica de trabajo

Clases virtuales

- Santiago Arranz y Guido Ivetta serán moderadores del chat.
- Hagan consultas ahí, y en caso de ser necesario, me la comunicarán a mí.
- **Prácticos**: 3 comisiones a cargo de Mariana, Héctor y Mauricio, respectivamente.

Dinámica de trabajo

Clases virtuales

- Santiago Arranz y Guido Ivetta serán moderadores del chat.
- Hagan consultas ahí, y en caso de ser necesario, me la comunicarán a mí.
- **Prácticos**: 3 comisiones a cargo de Mariana, Héctor y Mauricio, respectivamente.

¿Sólo ver el teórico?

Dinámica de trabajo

Clases virtuales

- Santiago Arranz y Guido Ivetta serán moderadores del chat.
- Hagan consultas ahí, y en caso de ser necesario, me la comunicarán a mí.
- **Prácticos**: 3 comisiones a cargo de Mariana, Héctor y Mauricio, respectivamente.

¿Sólo ver el teórico?

Al $85\,\%$ (*) del alumnado no le sirve eso.

Dinámica de trabajo

Clases virtuales

- Santiago Arranz y Guido Ivetta serán moderadores del chat.
- Hagan consultas ahí, y en caso de ser necesario, me la comunicarán a mí.
- **Prácticos**: 3 comisiones a cargo de Mariana, Héctor y Mauricio, respectivamente.

¿Sólo ver el teórico?

Al $85\,\%$ (*) del alumnado no le sirve eso.

- Cada clase (aproximadamente) tendrá indicada una lectura previa.

Dinámica de trabajo

Clases virtuales

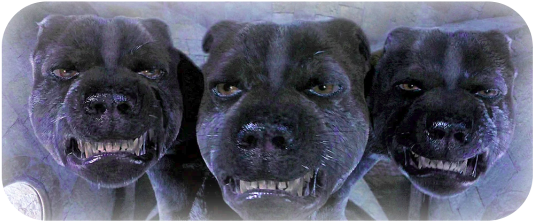
- Santiago Arranz y Guido Ivetta serán moderadores del chat.
- Hagan consultas ahí, y en caso de ser necesario, me la comunicarán a mí.
- **Prácticos**: 3 comisiones a cargo de Mariana, Héctor y Mauricio, respectivamente.

¿Sólo ver el teórico?

Al $85\,\%$ (*) del alumnado no le sirve eso.

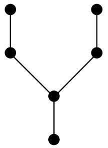
- Cada clase (aproximadamente) tendrá indicada una lectura previa.
- De esta manera podrán sacarse más dudas en vivo.

Una materia con tres partes



Ejes de Contenidos

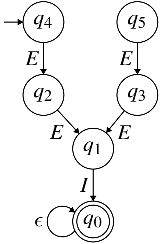
1. Estructuras Ordenadas



2. Lógica Proposicional

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi \wedge \psi]_1}{\psi}\wedge E \qquad \dfrac{[\varphi \wedge \psi]_1}{\varphi}\wedge E}{\psi \wedge \varphi}\wedge I}{\varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi}\to I_1$$

3. Lenguajes y Autómatas



Parte 1: Estructuras Ordenadas

Bibliografía

- A. Tiraboschi y H. Gramaglia, *Apunte sobre estructuras ordenadas* (en la web de la materia).
- B.A. Davey y H.A. Priestley *Introduction to lattices and order*. Cambridge University Press.

Contenidos estimados para hoy

1. Relaciones
   - Propiedades de relaciones sobre un único conjunto
   - Relaciones de equivalencia
   - Particiones de un conjunto

2. Conjuntos parcialmente ordenados
   - Diagramas de Hasse y Ejemplos

Definición de relación

Definición intuitiva

Una *relación* viene dada por una propiedad que pueden tener (o no) dos objetos.

Definición de relación

Definición intuitiva

Una *relación* viene dada por una propiedad que pueden tener (o no) dos objetos.

Nos van a interesar relaciones entre objetos formales (matemáticos), y es más fácil entender en términos de ejemplos.

Definición de relación

Definición intuitiva

Una *relación* viene dada por una propiedad que pueden tener (o no) dos objetos.

Nos van a interesar relaciones entre objetos formales (matemáticos), y es más fácil entender en términos de ejemplos.

Ejemplo

Las siguientes son relaciones:

- "es múltiplo de".

Definición de relación

Definición intuitiva

Una *relación* viene dada por una propiedad que pueden tener (o no) dos objetos.

Nos van a interesar relaciones entre objetos formales (matemáticos), y es más fácil entender en términos de ejemplos.

Ejemplo

Las siguientes son relaciones:

- "es múltiplo de".
- "divide a".

Definición de relación

Definición intuitiva

Una *relación* viene dada por una propiedad que pueden tener (o no) dos objetos.

Nos van a interesar relaciones entre objetos formales (matemáticos), y es más fácil entender en términos de ejemplos.

Ejemplo

Las siguientes son relaciones:

- "es múltiplo de".
- "divide a".
- "es menor que".

Definición de relación

Definición intuitiva

Una *relación* viene dada por una propiedad que pueden tener (o no) dos objetos.

Nos van a interesar relaciones entre objetos formales (matemáticos), y es más fácil entender en términos de ejemplos.

Ejemplo

Las siguientes son relaciones:

- "es múltiplo de".
- "divide a".
- "es menor que".
- "es la longitud de".

Definición de relación

Definición intuitiva

Una *relación* viene dada por una propiedad que pueden tener (o no) dos objetos.

Nos van a interesar relaciones entre objetos formales (matemáticos), y es más fácil entender en términos de ejemplos.

Ejemplo

Las siguientes son relaciones:

- "es múltiplo de".
- "divide a".
- "es menor que".
- "es la longitud de".
- "es igual a".

Definición de relación

Definición intuitiva

Una *relación* viene dada por una propiedad que pueden tener (o no) dos objetos.

Nos van a interesar relaciones entre objetos formales (matemáticos), y es más fácil entender en términos de ejemplos.

Ejemplo

Las siguientes son relaciones:

- "es múltiplo de".
- "divide a".
- "es menor que".
- "es la longitud de".
- "es igual a".
- "es elemento de".

Definición de relación

Definición intuitiva

Una *relación* viene dada por una propiedad que pueden tener (o no) dos objetos.

Nos van a interesar relaciones entre objetos formales (matemáticos), y es más fácil entender en términos de ejemplos.

Ejemplo

Las siguientes son relaciones:

- "es múltiplo de".
- "divide a".
- "es menor que".
- "es la longitud de".
- "es igual a".
- "es elemento de".
- "es segmento inicial de".

Definición de relación

Definición intuitiva

Una *relación* viene dada por una propiedad que pueden tener (o no) dos objetos.

Nos van a interesar relaciones entre objetos formales (matemáticos), y es más fácil entender en términos de ejemplos.

Ejemplo

Las siguientes son relaciones:

- "es múltiplo de".
- "divide a".
- "es menor que".
- "es la longitud de".
- "es igual a".
- "es elemento de".
- "es segmento inicial de".
- "esta incluido en".

Definición de relación

Formalizamos este concepto intuitivo: esencialmente, *especificamos* lo que que queremos decir.

Definición de relación

Formalizamos este concepto intuitivo: esencialmente, *especificamos* lo que que queremos decir.

Definición

- Dados dos conjuntos A y B, una **relación** (binaria) entre A y B es un subconjunto de $A \times B$.

Definición de relación

Formalizamos este concepto intuitivo: esencialmente, *especificamos* lo que que queremos decir.

Definición

- Dados dos conjuntos A y B, una **relación** (binaria) entre A y B es un subconjunto de $A \times B$.
- Sea $R \subseteq A \times B$ una relación y sean $a \in A$ y $b \in B$. Escribiremos $a \; R \; b$ para denotar $(a, b) \in R$ y $a \; \not R \; b$ en lugar de $(a, b) \notin R$.

Definición de relación

Formalizamos este concepto intuitivo: esencialmente, *especificamos* lo que que queremos decir.

Definición

- Dados dos conjuntos A y B, una **relación** (binaria) entre A y B es un subconjunto de $A \times B$.
- Sea $R \subseteq A \times B$ una relación y sean $a \in A$ y $b \in B$. Escribiremos $a \; R \; b$ para denotar $(a, b) \in R$ y $a \; \not{R} \; b$ en lugar de $(a, b) \notin R$.

Ejemplo

Si $A := \{2, 4, 8, 10\}$ y $B := \{1, 3, 9\}$, entonces la relación "*es menor que*" (restringida a $A \times B$) corresponde al conjunto de pares

$$R = \{(2, 3), (2, 9), (4, 9), (8, 9)\}$$

Definición de relación

Formalizamos este concepto intuitivo: esencialmente, *especificamos* lo que que queremos decir.

Definición

- Dados dos conjuntos A y B, una **relación** (binaria) entre A y B es un subconjunto de $A \times B$.
- Sea $R \subseteq A \times B$ una relación y sean $a \in A$ y $b \in B$. Escribiremos $a \; R \; b$ para denotar $(a, b) \in R$ y $a \not R \; b$ en lugar de $(a, b) \notin R$.

Ejemplo

Si $A := \{2, 4, 8, 10\}$ y $B := \{1, 3, 9\}$, entonces la relación "*es menor que*" (restringida a $A \times B$) corresponde al conjunto de pares

$$R = \{(2, 3), (2, 9), (4, 9), (8, 9)\}$$

Luego, tenemos que $2 \; R \; 9$ y $8 \not R \; 3$.

Definición de relación

Formalizamos este concepto intuitivo: esencialmente, *especificamos* lo que que queremos decir.

Definición

- Dados dos conjuntos A y B, una **relación** (binaria) entre A y B es un subconjunto de $A \times B$.
- Sea $R \subseteq A \times B$ una relación y sean $a \in A$ y $b \in B$. Escribiremos $a \; R \; b$ para denotar $(a, b) \in R$ y $a \; \not{R} \; b$ en lugar de $(a, b) \notin R$.

Ejemplo

Si $A := \{2, 4, 8, 10\}$ y $B := \{1, 3, 9\}$, entonces la relación "*es menor que*" (restringida a $A \times B$) corresponde al conjunto de pares

$$R = \{(2, 3), (2, 9), (4, 9), (8, 9)\}$$

Luego, tenemos que $2 \; R \; 9$ y $8 \; \not{R} \; 3$. ¿ $9 \; R \; 10$?

Dos tipos de relaciones

- “es múltiplo de”.
- “divide a”.
- “es menor que”.
- “es la longitud de”.
- “es igual a”.
- “es elemento de”.
- “es segmento inicial de”.
- “esta incluido en”.

Dos tipos de relaciones

- "es múltiplo de".
- "divide a".
- "es menor que".
- "es la longitud de".
- "es igual a".
- "es elemento de".
- "es segmento inicial de".
- "esta incluido en".

Estas relaciones se dan entre conjuntos A y B distintos.

Dos tipos de relaciones

- “es múltiplo de”.
- “divide a”.
- “es menor que”.
- “es la longitud de”.
- “es igual a”.
- “es elemento de”.
- “es segmento inicial de”.
- “esta incluido en”.

Estas relaciones se dan entre conjuntos A y B distintos.

Nuestro interés estará en las relaciones R entre un conjunto A y él mismo, relaciones **sobre** A (es decir, tales que $R \subseteq A \times A$).

Propiedades de una relación

Sea R una relación sobre un conjunto A. Decimos que R es:

- **reflexiva** si y sólo si

  para todo $a \in A$, $a \, R \, a$

Propiedades de una relación

Sea R una relación sobre un conjunto A. Decimos que R es:

- **reflexiva** si y sólo si

  para todo $a \in A,\ \ a\,R\,a$

- **simétrica** si y sólo si

  para todos $a, b \in A,\ \ a\,R\,b \implies b\,R\,a$

Propiedades de una relación

Sea R una relación sobre un conjunto A. Decimos que R es:

- **reflexiva** si y sólo si

  para todo $a \in A, \;\; a \, R \, a$
- **simétrica** si y sólo si

  para todos $a, b \in A, \;\; a \, R \, b \implies b \, R \, a$
- **antisimétrica** si y sólo si

  para todos $a, b \in A, \;\; a \, R \, b \;\; \& \;\; b \, R \, a \implies a = b$

Propiedades de una relación

Sea R una relación sobre un conjunto A. Decimos que R es:

- **reflexiva** si y sólo si

  para todo $a \in A, \;\; a \, R \, a$

- **simétrica** si y sólo si

  para todos $a, b \in A, \;\; a \, R \, b \implies b \, R \, a$

- **antisimétrica** si y sólo si

  para todos $a, b \in A, \;\; a \, R \, b \;\;\&\;\; b \, R \, a \implies a = b$

- **transitiva** si y sólo si

  para todos $a, b, c \in A, a \, R \, b \;\;\&\;\; b \, R \, c \implies a \, R \, c$

Propiedades de una relación

- **reflexiva**: $\forall a \in A, \quad a\,R\,a$.
- **simétrica**: $\forall a, b \in A, \quad a\,R\,b \implies b\,R\,a$.
- **antisimétrica**: $\forall a, b \in A, \quad a\,R\,b \;\&\; b\,R\,a \implies a = b$.
- **transitiva**: $\forall a, b, c \in A, \quad a\,R\,b \;\&\; b\,R\,c \implies a\,R\,c$.

Propiedades de una relación

- **reflexiva**: $\forall a \in A, \quad a \, R \, a$.
- **simétrica**: $\forall a, b \in A, \quad a \, R \, b \implies b \, R \, a$.
- **antisimétrica**: $\forall a, b \in A, \quad a \, R \, b \;\&\; b \, R \, a \implies a = b$.
- **transitiva**: $\forall a, b, c \in A, \quad a \, R \, b \;\&\; b \, R \, c \implies a \, R \, c$.

“es menor que” $\subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Es la relación “$<$” definida entre números enteros:
$-10 < -1, \; 2020 < 2021$, etcétera.

Propiedades de una relación

- **reflexiva**: $\forall a \in A, \quad a\, R\, a$.
- **simétrica**: $\forall a, b \in A, \quad a\, R\, b \implies b\, R\, a$.
- **antisimétrica**: $\forall a, b \in A, \quad a\, R\, b \;\&\; b\, R\, a \implies a = b$.
- **transitiva**: $\forall a, b, c \in A, \quad a\, R\, b \;\&\; b\, R\, c \implies a\, R\, c$.

"es menor que" $\subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Es la relación "$<$" definida entre números enteros:
$-10 < -1,\ 2020 < 2021$, etcétera.

$$a < b \iff \text{existe } q \in \mathbb{N} \text{ tal que } a + q = b.$$

Propiedades de una relación

- **reflexiva**: $\forall a \in A, \quad a\,R\,a$.
- **simétrica**: $\forall a, b \in A, \quad a\,R\,b \implies b\,R\,a$.
- **antisimétrica**: $\forall a, b \in A, \quad a\,R\,b \;\&\; b\,R\,a \implies a = b$.
- **transitiva**: $\forall a, b, c \in A, \quad a\,R\,b \;\&\; b\,R\,c \implies a\,R\,c$.

“es menor que” $\subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Es la relación “$<$” definida entre números enteros:
$-10 < -1,\ 2020 < 2021$, etcétera.

$$a < b \iff \text{existe } q \in \mathbb{N} \text{ tal que } a + q = b.$$

¿Qué propiedades cumple?

Propiedades de una relación

- **reflexiva**: $\forall a \in A, \quad a\, R\, a$.
- **simétrica**: $\forall a, b \in A, \quad a\, R\, b \implies b\, R\, a$.
- **antisimétrica**: $\forall a, b \in A, \quad a\, R\, b \;\&\; b\, R\, a \implies a = b$.
- **transitiva**: $\forall a, b, c \in A, \quad a\, R\, b \;\&\; b\, R\, c \implies a\, R\, c$.

“es menor que” $\subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Es la relación “$<$” definida entre números enteros:
$-10 < -1, \; 2020 < 2021$, etcétera.

$$a < b \iff \text{existe } q \in \mathbb{N} \text{ tal que } a + q = b.$$

¿Qué propiedades cumple? $\longrightarrow$ Actividad en Aula virtual!

Propiedades de una relación

- **reflexiva**: $\forall a \in A, \quad a\ R\ a$.
- **simétrica**: $\forall a, b \in A, \quad a\ R\ b \implies b\ R\ a$.
- **antisimétrica**: $\forall a, b \in A, \quad a\ R\ b\ \&\ b\ R\ a \implies a = b$.
- **transitiva**: $\forall a, b, c \in A, \quad a\ R\ b\ \&\ b\ R\ c \implies a\ R\ c$.

"divide a" $\subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$a \mid b$ si existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $a \cdot q = b$.

¿Qué propiedades cumple?

Propiedades de una relación

- **reflexiva**: $\forall a \in A, \quad a\ R\ a$.
- **simétrica**: $\forall a, b \in A, \quad a\ R\ b \implies b\ R\ a$.
- **antisimétrica**: $\forall a, b \in A, \quad a\ R\ b\ \&\ b\ R\ a \implies a = b$.
- **transitiva**: $\forall a, b, c \in A, \quad a\ R\ b\ \&\ b\ R\ c \implies a\ R\ c$.

“divide a” $\subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$a \mid b$ si existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $a \cdot q = b$.

¿Qué propiedades cumple? ¿Y si estuviera definida sobre $\mathbb{Z}$?

Propiedades de una relación

- **reflexiva**: $\forall a \in A, \quad a\ R\ a$.
- **simétrica**: $\forall a, b \in A, \quad a\ R\ b \implies b\ R\ a$.
- **antisimétrica**: $\forall a, b \in A, \quad a\ R\ b\ \&\ b\ R\ a \implies a = b$.
- **transitiva**: $\forall a, b, c \in A, \quad a\ R\ b\ \&\ b\ R\ c \implies a\ R\ c$.

“es congruente módulo k a” $\subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ($k \neq 0$, fijo)

$a \equiv_k b$ si y sólo si k es divide a $b - a$

¿Qué propiedades cumple?

Relaciones de equivalencia

Definición

Una relación es de **equivalencia** si satisface las propiedades de reflexividad, simetría y transitividad.

Relaciones de equivalencia

Definición

Una relación es de **equivalencia** si satisface las propiedades de reflexividad, simetría y transitividad.

Por ejemplo, la relación "congruente módulo k" es una relación de equivalencia para todo $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Clases de equivalencia

Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre un conjunto A y sea x un elemento de A.
La **clase de equivalencia de** x es el conjunto

$$[x] = \{y \in A : x \sim y\}$$

Clases de equivalencia

Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre un conjunto A y sea x un elemento de A.

La **clase de equivalencia de** x es el conjunto

$$[x] = \{y \in A : x \sim y\}$$

Por ejemplo, la relación “congruente módulo 3” tiene sólo tres clases de equivalencia

Clases de equivalencia

Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre un conjunto A y sea x un elemento de A.
La **clase de equivalencia de** x es el conjunto

$$[x] = \{y \in A : x \sim y\}$$

Por ejemplo, la relación "congruente módulo 3" tiene sólo tres clases de equivalencia

$$[0] = \{0, 3, -3, 6, -6, 9, -9, \dots\}$$
$$[1] = \{1, 4, -2, 7, -5, 10, -8, \dots\}$$
$$[2] = \{2, 5, -1, 8, -4, 11, -7, \dots\}$$

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Clases de equivalencia

Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre un conjunto A y sea x un elemento de A.
La **clase de equivalencia de** x es el conjunto

$$[x] = \{y \in A : x \sim y\}$$

Por ejemplo, la relación "congruente módulo 3" tiene sólo tres clases de equivalencia

$$\begin{aligned}
[0] &= \{0, 3, -3, 6, -6, 9, -9, \dots\} \\
[1] &= \{1, 4, -2, 7, -5, 10, -8, \dots\} \\
[2] &= \{2, 5, -1, 8, -4, 11, -7, \dots\}
\end{aligned}$$

Se dan las siguientes igualdades:

$$[3] = [0], \quad [4] = [1], \quad [5] = [2], \dots$$

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Particiones de un conjunto

Definición

Una **partición** de un conjunto A es una familia de subconjuntos no vacíos de A, que son disjuntos entre sí, y cuya unión es todo A.

Particiones de un conjunto

Definición

Una **partición** de un conjunto A es una familia de subconjuntos no vacíos de A, que son disjuntos entre sí, y cuya unión es todo A.

Ejemplo

Las siguientes son particiones de $A = \{a,\ b,\ c\}$:

1. $P_1 := \{\{a\}, \{b, c\}\}$;

Particiones de un conjunto

Definición

Una **partición** de un conjunto A es una familia de subconjuntos no vacíos de A, que son disjuntos entre sí, y cuya unión es todo A.

Ejemplo

Las siguientes son particiones de $A = \{a,\ b,\ c\}$:

1. $P_1 := \{\{a\}, \{b, c\}\}$;
   Los *elementos* de la partición $A_1 := \{a\}$ y $A_2 := \{b, c\}$ son *subconjuntos* de A.

Particiones de un conjunto

Definición

Una **partición** de un conjunto A es una familia de subconjuntos no vacíos de A, que son disjuntos entre sí, y cuya unión es todo A.

Ejemplo

Las siguientes son particiones de $A = \{a,\ b,\ c\}$:

1. $P_1 := \{\{a\}, \{b, c\}\}$;
   Los *elementos* de la partición $A_1 := \{a\}$ y $A_2 := \{b, c\}$ son *subconjuntos* de A.
2. $P_2 := \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$;

Particiones de un conjunto

Definición

Una **partición** de un conjunto A es una familia de subconjuntos no vacíos de A, que son disjuntos entre sí, y cuya unión es todo A.

Ejemplo

Las siguientes son particiones de $A = \{a,\ b,\ c\}$:

1. $P_1 := \{\{a\}, \{b, c\}\}$;
   Los *elementos* de la partición $A_1 := \{a\}$ y $A_2 := \{b, c\}$ son *subconjuntos* de A.
2. $P_2 := \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$;
3. $P_3 := \{\{a,\ b,\ c\}\}$.

Las equivalencias dan particiones

Lema

Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre A y sean $x, y \in A$. Entonces

1. $[x] = [y]$ *si y sólo si* $x \sim y$.
2. *si* $x \not\sim y$, *entonces* $[x]$ *e* $[y]$ *son disjuntas.*

Las equivalencias dan particiones

Lema

Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre A y sean $x, y \in A$. Entonces

1. $[x] = [y]$ *si y sólo si* $x \sim y$.
2. *si* $x \not\sim y$, *entonces* $[x]$ *e* $[y]$ *son disjuntas.*

Corolario

El conjunto $A/{\sim} := \{[x] : x \in A\}$ *de las clases de equivalencia de* $\sim$ *es una partición de* A.

Una equivalencia (valga la redundancia)

Lema

Sea $P = \{A_j : j \in J\}$ *una partición de* A*. Definamos, para* $a, b \in A$*,*

$$a \sim_P b \iff a \text{ y } b \text{ están en la misma parte de la partición.}$$

Entonces $\sim_P$ *es una relación de equivalencia.*

Una equivalencia (valga la redundancia)

Lema

Sea $P = \{A_j : j \in J\}$ *una partición de* A*. Definamos, para* $a, b \in A$*,*

$$\begin{aligned} a \sim_P b &\iff a \text{ y } b \text{ están en la misma parte de la partición.} \\ &\iff \text{existe } j \in J.\ a, b \in A_j \end{aligned}$$

Entonces $\sim_P$ *es una relación de equivalencia.*

Una equivalencia (valga la redundancia)

Lema

Sea $P = \{A_j : j \in J\}$ *una partición de* A*. Definamos, para* $a, b \in A$*,*

$$\begin{aligned} a \sim_P b &\iff a \text{ y } b \text{ están en la misma parte de la partición.} \\ &\iff \text{existe } j \in J.\ a, b \in A_j \end{aligned}$$

Entonces $\sim_P$ *es una relación de equivalencia.*

En consecuencia, es exactamente lo mismo tener una partición que una relación de equivalencia.

Definición

Una **relación de orden parcial** R sobre un conjunto A es una relación que satisface las propiedades de reflexividad, antisimetría y transitividad.

Definición

Una **relación de orden parcial** R sobre un conjunto A es una relación que satisface las propiedades de reflexividad, antisimetría y transitividad.

Ejemplo

1. La relación de **orden usual** $\leqslant$ sobre $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$.

Definición

Una **relación de orden parcial** R sobre un conjunto A es una relación que satisface las propiedades de reflexividad, antisimetría y transitividad.

Ejemplo

1. La relación de **orden usual** $\leqslant$ sobre $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$.
2. La relación "divide" sobre $\mathbb{N}$.

Definición

Una **relación de orden parcial** R sobre un conjunto A es una relación que satisface las propiedades de reflexividad, antisimetría y transitividad.

Ejemplo

1. La relación de **orden usual** $\leqslant$ sobre $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$.
2. La relación “divide” sobre $\mathbb{N}$.
3. La relación de **inclusión** $\subseteq$ sobre las partes $\mathscr{P}(A)$ de un conjunto A.

Relaciones de orden y posets

Definición

Una **relación de orden parcial** R sobre un conjunto A es una relación que satisface las propiedades de reflexividad, antisimetría y transitividad.

Ejemplo

1. La relación de **orden usual** $\leqslant$ sobre $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$.
2. La relación "divide" sobre $\mathbb{N}$.
3. La relación de **inclusión** $\subseteq$ sobre las partes $\mathscr{P}(A)$ de un conjunto A.

Definición

Un **conjunto parcialmente ordenado** (**cpo** ó **poset**) es un par (A, R) donde A es un conjunto y R es un orden parcial sobre A.

Relaciones de orden y posets

Definición

Una **relación de orden parcial** R sobre un conjunto A es una relación que satisface las propiedades de reflexividad, antisimetría y transitividad.

Ejemplo

1. La relación de **orden usual** $\leqslant$ sobre $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$.
2. La relación "divide" sobre $\mathbb{N}$.
3. La relación de **inclusión** $\subseteq$ sobre las partes $\mathscr{P}(A)$ de un conjunto A.

Definición

Un **conjunto parcialmente ordenado** (**cpo** ó **poset**) es un par (A, R) donde A es un conjunto y R es un orden parcial sobre A.

Luego $(\mathbb{R}, \leqslant)$, $(\mathbb{N}, |)$ y $(\mathscr{P}(A), \subseteq)$ son posets.

Diagramas de Hasse

Definición

Sea $\leq$ un orden parcial sobre un conjunto A, y $a, b \in A$ distintos.
Decimos que b **cubre** a a si

Diagramas de Hasse

Definición

Sea $\leq$ un orden parcial sobre un conjunto A, y $a, b \in A$ distintos.
Decimos que b **cubre** a a si

- $a \leq b$ y
- no existe $c \neq a, b$ tal que $a \leq c$ y $c \leq b$.

Diagramas de Hasse

Definición

Sea $\leq$ un orden parcial sobre un conjunto A, y $a, b \in A$ distintos.
Decimos que b **cubre** a a si

- $a \leq b$ y
- no existe $c \neq a, b$ tal que $a \leq c$ y $c \leq b$.

Diagramas de Hasse

Nos sirven para representar a los órdenes parciales sobre conjuntos finitos.

Diagramas de Hasse

Definición

Sea $\leq$ un orden parcial sobre un conjunto A, y $a, b \in A$ distintos.
Decimos que b **cubre** a a si

- $a \leq b$ y
- no existe $c \neq a, b$ tal que $a \leq c$ y $c \leq b$.

Diagramas de Hasse

Nos sirven para representar a los órdenes parciales sobre conjuntos finitos. Ponemos un punto por cada elemento de A y unimos mediante segmentos rectos los puntos que se cubren.

Diagramas de Hasse

Definición

Sea $\leq$ un orden parcial sobre un conjunto A, y $a, b \in A$ distintos.
Decimos que b **cubre** a a si

- $a \leq b$ y
- no existe $c \neq a, b$ tal que $a \leq c$ y $c \leq b$.

Diagramas de Hasse

Nos sirven para representar a los órdenes parciales sobre conjuntos finitos.
Ponemos un punto por cada elemento de A y unimos mediante segmentos rectos los puntos que se cubren.
Si b cubre a a, entonces b debe ser dibujado más arriba que a.