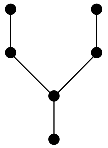
Introducción a la Lógica y la Computación

Mariana Badano   Héctor Gramaglia
Pedro Sánchez Terraf   Mauricio Tellechea
Guido Ivetta

FaMAF, 10 de septiembre de 2021

Ejes de Contenidos

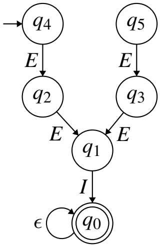
1. Estructuras Ordenadas



2. Lógica Proposicional

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi \wedge \psi]_1}{\psi}\wedge E \quad \dfrac{[\varphi \wedge \psi]_1}{\varphi}\wedge E}{\psi \wedge \varphi}\wedge I}{\varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi} \to I_1$$

3. Lenguajes y Autómatas



Parte 2: Lógica Proposicional

Bibliografía

- Dirk van Dalen, *Logic and Structure*, 3ra edición (Springer).
- PST, *Apunte de Lógica Proposicional*.

Contenidos estimados para hoy

1. Componentes de la lógica proposicional

2. Sintaxis
   - El lenguaje de la lógica
   - Inducción y recursión
   - Recursión en $PROP$

Proposicional en “Introducción a los Algoritmos”

En primer año de la carrera se hacía algo como esto:

Proposicional en “Introducción a los Algoritmos”

En primer año de la carrera se hacía algo como esto:

$$\underline{p \Rightarrow q \vee p}$$

$\equiv$ { Definición de $\Rightarrow$ }

$$\underline{\cancel{p}} \vee q \vee \underline{p} \equiv \underline{\cancel{q} \vee q} \vee p$$

$\equiv$ { Conmutativa $\vee$, Idempotencia $\vee$ }

$$\underline{p \vee q \equiv q \vee p}$$

$\equiv$ { Conmutativa $\vee$ }

$$True$$

Proposicional en "Introducción a los Algoritmos"

En primer año de la carrera se hacía algo como esto:

$$\begin{array}{ll}
 & \underline{p \Rightarrow q \vee p} \\
\equiv \{ & \text{Definición de} \Rightarrow \ \} \\
 & \underline{p} \vee q \vee \underline{p} \equiv \underline{q \vee q} \vee p \\
\equiv \{ & \text{Conmutativa} \vee\text{, Idempotencia} \vee \} \\
 & \underline{p \vee q \equiv q \vee p} \\
\equiv \{ & \text{Conmutativa} \vee \ \} \\
 & \mathit{True}
\end{array}$$

Preguntas. . .

1. ¿Qué *demuestra* esto?

Proposicional en "Introducción a los Algoritmos"

En primer año de la carrera se hacía algo como esto:

$$\underline{p \Rightarrow q \vee p}$$
$\equiv$ { Definición de $\Rightarrow$ }
$$\underline{p} \vee q \vee \underline{p} \equiv \underline{q \vee q} \vee p$$
$\equiv$ { Conmutativa $\vee$, Idempotencia $\vee$ }
$$\underline{p \vee q \equiv q \vee p}$$
$\equiv$ { Conmutativa $\vee$ }
$$True$$

Preguntas...

1. ¿Qué *demuestra* esto? ¿Qué es demostrar?

Proposicional en “Introducción a los Algoritmos”

En primer año de la carrera se hacía algo como esto:

$$
\begin{array}{ll}
 & \underline{p \Rightarrow q \vee p} \\
\equiv & \{ \text{ Definición de } \Rightarrow \ \} \\
 & \underline{p} \vee q \vee \underline{p} \equiv \underline{q \vee q} \vee p \\
\equiv & \{ \text{ Conmutativa } \vee, \text{ Idempotencia } \vee \ \} \\
 & \underline{p \vee q \equiv q \vee p} \\
\equiv & \{ \text{ Conmutativa } \vee \ \} \\
 & \mathit{True}
\end{array}
$$

Preguntas. . .

1. ¿Qué *demuestra* esto? ¿Qué es demostrar?
2. ¿Qué es True?

Proposicional en "Introducción a los Algoritmos"

En primer año de la carrera se hacía algo como esto:

$$
\begin{array}{ll}
& \underline{p \Rightarrow q \vee p} \\
\equiv & \{ \text{ Definición de } \Rightarrow \ \} \\
& \underline{p} \vee q \vee \underline{p} \equiv \underline{q \vee q} \vee p \\
\equiv & \{ \text{ Conmutativa } \vee, \text{ Idempotencia } \vee \ \} \\
& \underline{p \vee q \equiv q \vee p} \\
\equiv & \{ \text{ Conmutativa } \vee \ \} \\
& \mathit{True}
\end{array}
$$

Preguntas...

1. ¿Qué *demuestra* esto? ¿Qué es demostrar?
2. ¿Qué es True?
3. ¿Qué son p y q?

Tres componentes de la lógica

Tres componentes de la lógica

Sintaxis

Qué objetos usamos: **proposiciones**, cómo se escriben.

Tres componentes de la lógica

Sintaxis

Qué objetos usamos: **proposiciones**, cómo se escriben.

Semántica

Cómo asignamos *significado* a las proposiciones: **valor de verdad**.

Tres componentes de la lógica

Sintaxis

Qué objetos usamos: **proposiciones**, cómo se escriben.

Semántica

Cómo asignamos *significado* a las proposiciones: **valor de verdad**.

Cálculo

Cómo se **deducen** proposiciones a partir de otras y se obtienen **teoremas**

Tres componentes de la lógica

Sintaxis

Qué objetos usamos: **proposiciones**, cómo se escriben.

Semántica

Cómo asignamos *significado* a las proposiciones: **valor de verdad**.

Cálculo

Cómo se **deducen** proposiciones a partir de otras y se obtienen **teoremas**

Estudiaremos especialmente la interrelación entre los dos últimos conceptos.

Sintaxis: El lenguaje

Proposiciones

$(p_1 \wedge p_2)$,

Sintaxis: El lenguaje

Proposiciones

$(p_1 \wedge p_2)$, $(p_2 \vee p_1)$,

Sintaxis: El lenguaje

Proposiciones

$(p_1 \wedge p_2)$, $(p_2 \vee p_1)$, $(p_0 \rightarrow (p_5 \vee p_0))$,

Sintaxis: El lenguaje

Proposiciones

$(p_1 \wedge p_2), (p_2 \vee p_1), (p_0 \to (p_5 \vee p_0)), \ldots$

Sintaxis: El lenguaje

Proposiciones

$(p_1 \wedge p_2), (p_2 \vee p_1), (p_0 \to (p_5 \vee p_0)), \ldots$

Tomémoslas por lo que son: cadenas de símbolos

Sintaxis: El lenguaje

Proposiciones

$(p_1 \wedge p_2), (p_2 \vee p_1), (p_0 \to (p_5 \vee p_0)), \ldots$

Tomémoslas por lo que son: cadenas de símbolos `String`

Sintaxis: El lenguaje

Proposiciones

$(p_1 \wedge p_2), (p_2 \vee p_1), (p_0 \to (p_5 \vee p_0)), \ldots$

Tomémoslas por lo que son: cadenas de símbolos String

Los símbolos que usaremos:

$\Sigma := \{ \,), (, \wedge, \vee, \to, \perp, p_0, p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots \}.$

Bottom

Proposiciones

$(p_1 \wedge p_2), (p_2 \vee p_1), (p_0 \to (p_5 \vee p_0)), \ldots$

Tomémoslas por lo que son: cadenas de símbolos

Los símbolos que usaremos:

$\Sigma := \{\,), (, \wedge, \vee, \to, \bot, p_0, p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots \}$.

`String`

$\updownarrow$

Σ^*

Sintaxis: El lenguaje

Proposiciones

$(p_1 \wedge p_2), (p_2 \vee p_1), (p_0 \rightarrow (p_5 \vee p_0)), \ldots$

Tomémoslas por lo que son: cadenas de símbolos

`String` $\updownarrow$ Σ^*

Los símbolos que usaremos:

$\Sigma := \{\,), (, \wedge, \vee, \rightarrow, \bot, p_0, p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots \}$.

Llamaremos **átomos** al subconjunto $\{\bot, \underbrace{p_0, p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots}\}$ de Σ.

variables } proposicionales
símbolos

Proposiciones

$(p_1 \wedge p_2)$, $(p_2 \vee p_1)$, $(p_0 \to (p_5 \vee p_0))$, ...

Tomémoslas por lo que son: cadenas de símbolos

String $\updownarrow$ Σ^*

Los símbolos que usaremos:

$\Sigma := \{\,),(,\wedge,\vee,\to,\bot,p_0,p_1,\ldots,p_n,p_{n+1},\ldots\}$.

Llamaremos **átomos** al subconjunto $\{\bot,p_0,p_1,\ldots,p_n,p_{n+1},\ldots\}$ de Σ.

Ejemplo

$(p_1 \wedge p_2)$ = $\boxed{(}\,\boxed{p_1}\,\boxed{\wedge}\,\boxed{p_2}\,\boxed{)}$.

$) \wedge p_0 \longrightarrow (\in \Sigma^* \setminus PROP$

Sintaxis: El lenguaje

Proposiciones

$(p_1 \wedge p_2)$, $(p_2 \vee p_1)$, $(p_0 \rightarrow (p_5 \vee p_0))$, ...

Tomémoslas por lo que son: cadenas de símbolos — `String` $\updownarrow$ Σ^*

Los símbolos que usaremos:

$\Sigma := \{\,),(,\wedge,\vee,\rightarrow,\perp,p_0,p_1,\ldots,p_n,p_{n+1},\ldots\}$.

Llamaremos **átomos** al subconjunto $\{\perp,p_0,p_1,\ldots,p_n,p_{n+1},\ldots\}$ de Σ.

Ejemplo

$(p_1 \wedge p_2) = \boxed{(}\,\boxed{p_1}\,\boxed{\wedge}\,\boxed{p_2}\,\boxed{)}$.

Definición

$PROP$ es el menor subconjunto de Σ^* que cumple con:

Proposiciones

$(p_1 \wedge p_2)$, $(p_2 \vee p_1)$, $(p_0 \to (p_5 \vee p_0))$, ...

Tomémoslas por lo que son: cadenas de símbolos   String

Los símbolos que usaremos: $\updownarrow$

$\Sigma := \{\,),(,\wedge,\vee,\to,\bot,p_0,p_1,\dots,p_n,p_{n+1},\dots\}$. Σ^*

Llamaremos **átomos** al subconjunto $\{\bot,p_0,p_1,\dots,p_n,p_{n+1},\dots\}$ de Σ.

Ejemplo

$(p_1 \wedge p_2) = \boxed{(}\,\boxed{p_1}\,\boxed{\wedge}\,\boxed{p_2}\,\boxed{)}$.

Definición

$PROP$ es el menor subconjunto de Σ^* que cumple con:

$\boxed{\varphi \in At}$ Para todo $\varphi \in At$, $\varphi \in PROP$.

Sintaxis: El lenguaje

Proposiciones

$(p_1 \wedge p_2)$, $(p_2 \vee p_1)$, $(p_0 \to (p_5 \vee p_0))$, ...

Tomémoslas por lo que son: cadenas de símbolos

String

$\updownarrow$

Σ^*

Los símbolos que usaremos:

$\Sigma := \{\ ),\ (,\ \wedge,\ \vee,\ \to,\ \bot,\ p_0, p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots\}$.

Llamaremos **átomos** al subconjunto $\{\bot, p_0, p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots\}$ de Σ.

base $[]$

induc. $x \triangleright xs$

Ejemplo

$(p_1 \wedge p_2) = \boxed{(}\,\boxed{p_1}\,\boxed{\wedge}\,\boxed{p_2}\,\boxed{)}$.

Definición

PROP es el menor subconjunto de Σ^* que cumple con:

$\boxed{\varphi \in At}$ Para todo $\varphi \in At$, $\varphi \in PROP$.

$\boxed{(\varphi \to \psi)}$ Para todas φ, ψ en $PROP$, $(\varphi \to \psi)$ está en $PROP$.

fi psi

Sintaxis: El lenguaje

Proposiciones

$(p_1 \wedge p_2), (p_2 \vee p_1), (p_0 \to (p_5 \vee p_0)), \ldots$

Tomémoslas por lo que son: cadenas de símbolos String
Los símbolos que usaremos: $\updownarrow$
$\Sigma := \{\,), (, \wedge, \vee, \to, \bot, p_0, p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots\}$. Σ^*
Llamaremos **átomos** al subconjunto $\{\bot, p_0, p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots\}$ de Σ.

Ejemplo

$(p_1 \wedge p_2) = \boxed{(}\,\boxed{p_1}\,\boxed{\wedge}\,\boxed{p_2}\,\boxed{)}$.

Definición

$PROP$ es el menor subconjunto de Σ^* que cumple con:

$\boxed{\varphi \in At}$ Para todo $\varphi \in At$, $\varphi \in PROP$.

$\boxed{(\varphi \vee \psi)}$ Para todas φ, ψ en $PROP$, $(\varphi \vee \psi)$ está en $PROP$.

Sintaxis: El lenguaje

Proposiciones

$(p_1 \wedge p_2)$, $(p_2 \vee p_1)$, $(p_0 \to (p_5 \vee p_0))$, $\ldots$

Tomémoslas por lo que son: cadenas de símbolos $\qquad$ `String`

Los símbolos que usaremos: $\qquad \updownarrow$

$\Sigma := \{\ ),\ (,\ \wedge,\ \vee,\ \to,\ \perp,\ p_0, p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots\}$. $\qquad \Sigma^*$

Llamaremos **átomos** al subconjunto $\{\perp, p_0, p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots\}$ de Σ.

Ejemplo

$(p_1 \wedge p_2)$ = $\boxed{(}\ \boxed{p_1}\ \boxed{\wedge}\ \boxed{p_2}\ \boxed{)}$.

Definición

$PROP$ es el menor subconjunto de Σ^* que cumple con:

$\boxed{\varphi \in At}$ Para todo $\varphi \in At$, $\varphi \in PROP$.

$\boxed{(\varphi \wedge \psi)}$ Para todas φ, ψ en $PROP$, $(\varphi \wedge \psi)$ está en $PROP$.

Sintaxis: El lenguaje

Proposiciones

$(p_1 \wedge p_2)$, $(p_2 \vee p_1)$, $(p_0 \to (p_5 \vee p_0))$, $\ldots$

Tomémoslas por lo que son: cadenas de símbolos

Los símbolos que usaremos:

$\Sigma := \{\,),(,\wedge,\vee,\to,\bot,p_0,p_1,\ldots,p_n,p_{n+1},\ldots\}$.

Llamaremos **átomos** al subconjunto $\{\bot,p_0,p_1,\ldots,p_n,p_{n+1},\ldots\}$ de Σ.

String
$\updownarrow$
Σ^*

Ejemplo

$(p_1 \wedge p_2)$ = $\boxed{(}\ \boxed{p_1}\ \boxed{\wedge}\ \boxed{p_2}\ \boxed{)}$.

Definición

$PROP$ es el menor subconjunto de Σ^* que cumple con:

$\boxed{\varphi \in At}$ Para todo $\varphi \in At$, $\varphi \in PROP$.

$\boxed{(\varphi \odot \psi)}$ todas φ, ψ en $PROP$, $(\varphi \odot \psi)$ está en $PROP$.

$\wedge$ $\vee$

Inducción en $PROP$

"Proposiciones"
"fórmulas proposicionales"
"fórmulas"

$PROP$ es el menor subconjunto de Σ^* que cumple con:

$\boxed{\varphi \in At}$ Para todo $\varphi \in At$, $\varphi \in PROP$.

$\boxed{(\varphi \odot \psi)}$ Para todas φ, ψ en $PROP$, $(\varphi \odot \psi)$ está en $PROP$.

Inducción en $PROP$

$PROP$ es el menor subconjunto de Σ^* que cumple con:

$\boxed{\varphi \in At}$ Para todo $\varphi \in At$, $\varphi \in PROP$.

$\boxed{(\varphi \odot \psi)}$ Para todas φ, ψ en $PROP$, $(\varphi \odot \psi)$ está en $PROP$.

Teorema (inducción en subfórmulas)

Sea A un predicado sobre $PROP$. Luego $A(\varphi)$ es verdadero para toda $\varphi \in PROP$ si y sólo si:

Inducción en $PROP$

Átomos
fórmulas atómicas
proposiciones atómicas.

$PROP$ es el menor subconjunto de Σ^* que cumple con:

$\boxed{\varphi \in At}$ Para todo $\varphi \in At$, $\varphi \in PROP$.

$\boxed{(\varphi \odot \psi)}$ Para todas φ, ψ en $PROP$, $(\varphi \odot \psi)$ está en $PROP$.

Teorema (inducción en subfórmulas)

Sea A un predicado sobre $PROP$. Luego $A(\varphi)$ es verdadero para toda $\varphi \in PROP$ si y sólo si:

$A : PROP \longrightarrow Bool.$

$\boxed{\varphi \in At}$ *Si φ es atómica, $A(\varphi)$ vale.*

$\boxed{(\varphi \odot \psi)}$ *Si $A(\varphi)$ y $A(\psi)$ entonces $A((\varphi \odot \psi))$.*

Inducción en $PROP$

$PROP$ es el menor subconjunto de Σ^* que cumple con:

$\boxed{\varphi \in At}$ Para todo $\varphi \in At$, $\varphi \in PROP$.

$\boxed{(\varphi \odot \psi)}$ Para todas φ, ψ en $PROP$, $(\varphi \odot \psi)$ está en $PROP$.

Teorema (inducción en subfórmulas)

Sea A un predicado sobre $PROP$. Luego $A(\varphi)$ es verdadero para toda $\varphi \in PROP$ si y sólo si:

$\boxed{\varphi \in At}$ *Si φ es atómica, $A(\varphi)$ vale.*

$\boxed{(\varphi \odot \psi)}$ *Si $A(\varphi)$ y $A(\psi)$ entonces $A((\varphi \odot \psi))$.*

Demostración.

Sea $X = \{\varphi \in PROP : A(\varphi)\}$.

Inducción en $PROP$

$PROP$ es el menor subconjunto de Σ^* que cumple con:

$\boxed{\varphi \in At}$ Para todo $\varphi \in At$, $\varphi \in PROP$.

$\boxed{(\varphi \odot \psi)}$ Para todas φ, ψ en $PROP$, $(\varphi \odot \psi)$ está en $PROP$.

Teorema (inducción en subfórmulas)

Sea A un predicado sobre $PROP$. Luego $A(\varphi)$ es verdadero para toda $\varphi \in PROP$ si y sólo si:

$\boxed{\varphi \in At}$ *Si φ es atómica, $A(\varphi)$ vale.*

$\boxed{(\varphi \odot \psi)}$ *Si $A(\varphi)$ y $A(\psi)$ entonces $A((\varphi \odot \psi))$.*

Demostración.

$X \subseteq \Sigma^*$

Sea $X = \{\varphi \in PROP : A(\varphi)\}$. Luego $X \subseteq PROP \subseteq \Sigma^*$.

Inducción en $PROP$

según inclusión

$PROP$ es el menor subconjunto de Σ^* que cumple con:

$\boxed{\varphi \in At}$ Para todo $\varphi \in At$, $\varphi \in PROP$.

$\boxed{(\varphi \odot \psi)}$ Para todas φ, ψ en $PROP$, $(\varphi \odot \psi)$ está en $PROP$.

Teorema (inducción en subfórmulas)

Sea A un predicado sobre $PROP$. Luego $A(\varphi)$ es verdadero para toda $\varphi \in PROP$ si y sólo si:

$\boxed{\varphi \in At}$ *Si φ es atómica, $A(\varphi)$ vale.*

$\boxed{(\varphi \odot \psi)}$ *Si $A(\varphi)$ y $A(\psi)$ entonces $A((\varphi \odot \psi))$.*

Demostración.

Sea $X = \{\varphi \in PROP : A(\varphi)\}$. Luego $X \subseteq PROP \subseteq \Sigma^*$. $X \subseteq \Sigma^*$

Y además $PROP \subseteq X$ por minimalidad. $X = PROP$.

Definición

Una sucesión de proposiciones $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ es una **serie de formación** (sdf) de $\varphi \in PROP$ si $\varphi_n = \varphi$ y para todo $i \leq n$, φ_i es:

- atómica, o bien
- igual a $(\varphi_j \odot \varphi_k)$ con $j, k < i$.

$\varphi = ((p_1 \wedge p_2) \to p_1)$

$$\underbrace{p_2}_{\varphi_1},\ \underbrace{p_1}_{\varphi_2},\ \underbrace{\bot}_{\varphi_3},\ \underbrace{(p_1 \wedge p_2)}_{\varphi_4 \,=\, (\varphi_2 \wedge \varphi_1)},\ \underbrace{p_2}_{\varphi_5},\ \underbrace{((p_1 \wedge p_2) \to p_1)}_{\varphi_6 \,=\, (\varphi_4 \to \varphi_2)}$$

Inducción en $PROP$

Definición

Una sucesión de proposiciones $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ es una **serie de formación** (sdf) de $\varphi \in PROP$ si $\varphi_n = \varphi$ y para todo $i \leq n$, φ_i es:

infinito!

- atómica, o bien
- igual a $(\varphi_j \odot \varphi_k)$ con $j, k < i$.

$(p_0 \wedge (p_1 \wedge (p_2 \wedge (p_3 \wedge (\cdots))))$

¿es PROP? NO

Teorema

Toda $\varphi \in PROP$ tiene una serie de formación.

Inducción en $PROP$

Definición

Una sucesión de proposiciones $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ es una **serie de formación** (sdf) de $\varphi \in PROP$ si $\varphi_n = \varphi$ y para todo $i \leq n$, φ_i es:

- atómica, o bien
- igual a $(\varphi_j \odot \varphi_k)$ con $j, k < i$.

Teorema

Toda $\varphi \in PROP$ tiene una serie de formación.

Demostración.

$\boxed{\varphi \in At}$ "φ" es una sdf de φ (tenemos $n = 1$, $\varphi_1 := \varphi$).

Inducción en $PROP$

Definición

Una sucesión de proposiciones $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ es una **serie de formación** (sdf) de $\varphi \in PROP$ si $\varphi_n = \varphi$ y para todo $i \leq n$, φ_i es:

- atómica, o bien
- igual a $(\varphi_j \odot \varphi_k)$ con $j, k < i$.

$A(\varphi) :=$ "φ Tiene s.d.f."

Teorema

Toda $\varphi \in PROP$ tiene una serie de formación.

Demostración.

$\boxed{\varphi \in At}$ "φ" es una sdf de φ (tenemos $n = 1$, $\varphi_1 := \varphi$).

$\boxed{(\varphi \odot \psi)}$ Por HI, φ y ψ tienen sdf $\varphi_1, \ldots, \varphi_n (= \varphi)$ y $\psi_1, \ldots, \psi_m (= \psi)$.

Definición

Una sucesión de proposiciones $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ es una **serie de formación** (sdf) de $\varphi \in PROP$ si $\varphi_n = \varphi$ y para todo $i \leq n$, φ_i es:

- atómica, o bien
- igual a $(\varphi_j \odot \varphi_k)$ con $j, k < i$.

$\odot$ no está en Σ

$\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$ } están en Σ

Teorema

Toda $\varphi \in PROP$ tiene una serie de formación.

Demostración.

$\boxed{\varphi \in At}$ "φ" es una sdf de φ (tenemos $n = 1$, $\varphi_1 := \varphi$).

$\boxed{(\varphi \odot \psi)}$ Por HI, φ y ψ tienen sdf $\varphi_1, \ldots, \varphi_n (= \varphi)$ y $\psi_1, \ldots, \psi_m (= \psi)$.

Luego $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi_1, \ldots, \psi_m, (\varphi \odot \psi)$ es sdf de $(\varphi \odot \psi)$.

Recursión en $PROP$

$PROP$ es el menor subconjunto de Σ^* que cumple con:

$\boxed{\varphi \in At}$ Para todo $\varphi \in At$, $\varphi \in PROP$.

$\boxed{(\varphi \odot \psi)}$ Para todas φ, ψ en $PROP$, $(\varphi \odot \psi)$ está en $PROP$.

Recursión en $PROP$

$PROP$ es el menor subconjunto de Σ^* que cumple con:

$\boxed{\varphi \in At}$ Para todo $\varphi \in At$, $\varphi \in PROP$.

$\boxed{(\varphi \odot \psi)}$ Para todas φ, ψ en $PROP$, $(\varphi \odot \psi)$ está en $PROP$.

Teorema (definición por recursión en subfórmulas)

Sea A un conjunto y supongamos dadas funciones $H_{At} : At \to A$ y $H_\odot : A^2 \to A$ para cada $\odot$.
Entonces hay exactamente una función $F : PROP \to A$ tal que

$$\begin{cases} F(\varphi) & = & H_{At}(\varphi) \quad \text{para } \varphi \text{ en } At \\ F((\varphi \odot \psi)) & = & H_\odot(\underbrace{F(\varphi)}_{A}, \underbrace{F(\psi)}_{A}) \end{cases}$$

sum : [Int] $\longrightarrow$ Int

sum.[] := 0 $\qquad H_{[]}$: [Int] $\to$ Int

sum.(x ▷ xs) := x + sum.xs = $H_\triangleright$ (x , sum.xs)

$$H_{AT}(\varphi) = \begin{cases} -1 & \varphi = \bot \\ n & \varphi = p_n \end{cases}, \quad H_{\odot} = \max$$

$$\exists! \; F : \mathrm{Prop} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$F(\varphi) = \begin{cases} -1 & \varphi = \bot \\ n & \varphi = p_n \end{cases}$$

$$F((\varphi \odot \psi)) = \max\{F(\varphi), F(\psi)\}$$

Ejemmplo de definición por recursión:

Definición

El *grado* de una proposición, $gr(\cdot)$, es la función definida de la siguiente manera.

$\boxed{\varphi \in At}$ $gr(p_n) := n; gr(\perp) := -1.$

$\boxed{(\varphi \odot \psi)}$ $gr((\varphi \odot \psi)) := \text{máx}\{gr(\varphi), gr(\psi)\}.$

H_{AT} $H_{\odot}$?

$$H_{AT} : At \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$H_{AT}(\varphi) := \begin{cases} -1 & \varphi = \perp \\ n & \varphi = p_n \end{cases}$$

$$H_{\odot} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

Tres funciones !!

"(($H_{\odot}(m,n) := \text{máx}\{m, n\}$.))"

$H_{\wedge}(m,n) := \text{máx}\{m, n\}$

$H_{\vee}(m,n) := \text{máx}\{m, n\}$

$H_{\to}(m,n) := \text{máx}\{m, n\}$

Recursión en $PROP$

Ejemmplo de definición por recursión:

Definición

El *grado* de una proposición, $gr(\cdot)$, es la función definida de la siguiente manera.

$\boxed{\varphi \in At}$ $gr(p_n) := n; gr(\bot) := -1.$

$\boxed{(\varphi \odot \psi)}$ $gr((\varphi \odot \psi)) := \max\{gr(\varphi), gr(\psi)\}.$

$$gr\big(((p_0 \wedge p_3) \to p_2)\big) = \max\big\{gr\big((p_0 \wedge p_3)\big), gr(p_2)\big\}$$ caso "$\odot$"

Recursión en *PROP*

Ejemmplo de definición por recursión:

Definición

El *grado* de una proposición, $gr(\cdot)$, es la función definida de la siguiente manera.

$\boxed{\varphi \in At}$ $gr(p_n) := n;\ gr(\perp) := -1.$

$\boxed{(\varphi \odot \psi)}$ $gr((\varphi \odot \psi)) := \text{máx}\{gr(\varphi), gr(\psi)\}.$

$$\begin{aligned} gr\big(((p_0 \wedge p_3) \to p_2)\big) &= \text{máx}\big\{gr\big((p_0 \wedge p_3)\big), gr(p_2)\big\} && \text{caso “}\odot\text{”} \\ &= \text{máx}\big\{gr\big((p_0 \wedge p_3)\big), 2\big\} && \text{caso “}At\text{”} \end{aligned}$$

Recursión en $PROP$

Ejemmplo de definición por recursión:

Definición

El *grado* de una proposición, $gr(\cdot)$, es la función definida de la siguiente manera.

$\boxed{\varphi \in At}$ $gr(p_n) := n; gr(\bot) := -1.$

$\boxed{(\varphi \odot \psi)}$ $gr((\varphi \odot \psi)) := \max\{gr(\varphi), gr(\psi)\}.$

$$\begin{aligned} gr\big(((p_0 \wedge p_3) \to p_2)\big) &= \max\big\{gr\big((p_0 \wedge p_3)\big), gr(p_2)\big\} && \text{caso “}\odot\text{”} \\ &= \max\big\{\underline{gr\big((p_0 \wedge p_3)\big)}, 2\big\} && \text{caso “}At\text{”} \\ &= \max\big\{\max\big\{gr(p_0), gr(p_3)\big\}, 2\big\} && \text{caso “}\odot\text{”} \end{aligned}$$

Recursión en $PROP$

Ejemmplo de definición por recursión:

Definición

El *grado* de una proposición, $gr(\cdot)$, es la función definida de la siguiente manera.

$\boxed{\varphi \in At}$ $gr(p_n) := n; gr(\bot) := -1.$

$\boxed{(\varphi \odot \psi)}$ $gr((\varphi \odot \psi)) := \text{máx}\{gr(\varphi), gr(\psi)\}.$

$$\begin{aligned}
gr\big(((p_0 \wedge p_3) \to p_2)\big) &= \text{máx}\big\{gr\big((p_0 \wedge p_3)\big), gr(p_2)\big\} && \text{caso “}\odot\text{”} \\
&= \text{máx}\big\{gr\big((p_0 \wedge p_3)\big), 2\big\} && \text{caso “}At\text{”} \\
&= \text{máx}\big\{\text{máx}\big\{\underline{gr(p_0)}, \underline{gr(p_3)}\big\}, 2\big\} && \text{caso “}\odot\text{”} \\
&= \text{máx}\big\{\text{máx}\{0, 3\}, 2\big\} && \text{caso “}At\text{”}
\end{aligned}$$

Recursión en $PROP$

Ejemmplo de definición por recursión:

Definición

El *grado* de una proposición, $gr(\cdot)$, es la función definida de la siguiente manera.

$\boxed{\varphi \in At}$ $gr(p_n) := n;\ gr(\perp) := -1.$

$\boxed{(\varphi \odot \psi)}$ $gr((\varphi \odot \psi)) := \text{máx}\{gr(\varphi), gr(\psi)\}.$

$$
\begin{aligned}
gr\big(((p_0 \wedge p_3) \to p_2)\big) &= \text{máx}\big\{gr\big((p_0 \wedge p_3)\big), gr(p_2)\big\} && \text{caso "}\odot\text{"} \\
&= \text{máx}\big\{gr\big((p_0 \wedge p_3)\big), 2\big\} && \text{caso "}At\text{"} \\
&= \text{máx}\big\{\text{máx}\big\{gr(p_0), gr(p_3)\big\}, 2\big\} && \text{caso "}\odot\text{"} \\
&= \text{máx}\big\{\text{máx}\{0, 3\}, 2\big\} && \text{caso "}At\text{"} \\
&= \text{máx}\{3, 2\} && \text{def de máx}
\end{aligned}
$$

Recursión en $PROP$

Ejemmplo de definición por recursión:

Definición

El *grado* de una proposición, $gr(\cdot)$, es la función definida de la siguiente manera.

$\boxed{\varphi \in At}$ $gr(p_n) := n; gr(\bot) := -1.$

$\boxed{(\varphi \odot \psi)}$ $gr((\varphi \odot \psi)) := \text{máx}\{gr(\varphi), gr(\psi)\}.$

$$
\begin{aligned}
gr\big(((p_0 \wedge p_3) \to p_2)\big) &= \text{máx}\big\{gr\big((p_0 \wedge p_3)\big), gr(p_2)\big\} && \text{caso “}\odot\text{”} \\
&= \text{máx}\big\{gr\big((p_0 \wedge p_3)\big), 2\big\} && \text{caso “}At\text{”} \\
&= \text{máx}\big\{\text{máx}\big\{gr(p_0), gr(p_3)\big\}, 2\big\} && \text{caso “}\odot\text{”} \\
&= \text{máx}\big\{\text{máx}\{0, 3\}, 2\big\} && \text{caso “}At\text{”} \\
&= \text{máx}\{3, 2\} && \text{def de máx} \\
&= 3 && \text{def de máx}
\end{aligned}
$$

Prueba unicidad del Teorema de Recursión en PROP. : Sup. F_1 y F_2 cumple con su conclusión

Probamos por inducción en $\varphi \in PROP$,

$$\boxed{F_1(\varphi) = F_2(\varphi)}$$

$\boxed{\varphi \in AT}$ $F_1(\varphi) = H_{At}(\varphi) = F_2(\varphi)$ ✓

$\boxed{(\varphi \odot \psi)}$ $F_1((\varphi \odot \psi)) \underset{\substack{\uparrow \\ F_1 \text{ satisface}}}{=} H_{\odot}(F_1(\varphi), F_1(\psi))$

$\| \quad HI$

$H_{\odot}(F_2(\varphi), F_2(\psi))$

F_2 satisface el Teo Rec $\quad \|$

$F_2((\varphi \odot \psi))$.

∴ son iguales F_1, F_2