Introducción a la Lógica y la Computación

Mariana Badano Héctor Gramaglia
Pedro Sánchez Terraf Mauricio Tellechea
Guido Ivetta

FaMAF, 15 de octubre de 2021

Contenidos estimados para hoy

1. Repaso
   - Lenguajes
   - Autómatas finitos deterministas
   - Autómatas no deterministas
2. Determinización
3. Autómatas con movimientos silenciosos
4. Determinización de ϵ-NFA

Repaso: lenguajes y autómatas

Lenguajes

- **Alfabeto**: cualquier conjunto finito Σ.

Repaso: lenguajes y autómatas

Lenguajes

- **Alfabeto**: cualquier conjunto finito Σ.
- **Palabras/strings/cadenas** sobre Σ: conjunto Σ^* definido recursivamente.

Repaso: lenguajes y autómatas

Lenguajes

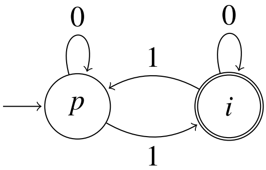
- **Alfabeto**: cualquier conjunto finito Σ.
- **Palabras/strings/cadenas** sobre Σ: conjunto Σ^* definido recursivamente.
- **Lenguaje**: cualquier subconjunto $L \subseteq \Sigma^*$.

Repaso: lenguajes y autómatas

Lenguajes

- **Alfabeto**: cualquier conjunto finito Σ.
- **Palabras/strings/cadenas** sobre Σ: conjunto Σ^* definido recursivamente.
- **Lenguaje**: cualquier subconjunto $L \subseteq \Sigma^*$.

Autómatas finitos



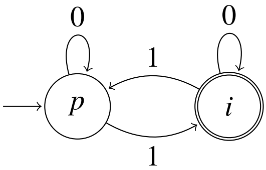
$$\mathbb{A} = (\{p, i\}, \{0, 1\}, \rightarrow, p, \{i\})$$

Repaso: lenguajes y autómatas

Lenguajes

- **Alfabeto**: cualquier conjunto finito Σ.
- **Palabras/strings/cadenas** sobre Σ: conjunto Σ^* definido recursivamente.
- **Lenguaje**: cualquier subconjunto $L \subseteq \Sigma^*$.

Autómatas finitos



$$\mathbb{A} = (\{p, i\}, \{0, 1\}, \rightarrow, p, \{i\})$$

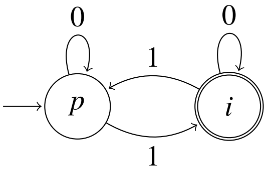
1 core (δ), finita memoria (en este caso, 1 bit, Q).

Repaso: lenguajes y autómatas

Lenguajes

- **Alfabeto**: cualquier conjunto finito Σ.
- **Palabras/strings/cadenas** sobre Σ: conjunto Σ^* definido recursivamente.
- **Lenguaje**: cualquier subconjunto $L \subseteq \Sigma^*$.

Autómatas finitos



$$\mathbb{A} = (\{p, i\}, \{0, 1\}, \rightarrow, p, \{i\})$$

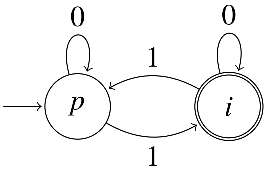
1 core (δ), finita memoria (en este caso, 1 bit, Q). Tienen un alfabeto asociado y **aceptan** un lenguaje $L(\mathbb{A})$.

Repaso: lenguajes y autómatas

Lenguajes

- **Alfabeto**: cualquier conjunto finito Σ.
- **Palabras/strings/cadenas** sobre Σ: conjunto Σ^* definido recursivamente.
- **Lenguaje**: cualquier subconjunto $L \subseteq \Sigma^*$.

Autómatas finitos



$$\mathbb{A} = (\{p, i\}, \{0, 1\}, \to, p, \{i\})$$
$$(\quad Q \quad, \quad \Sigma \quad, \delta, q_0, F)$$

$$\delta : Q \times \Sigma \to Q$$

1 core (δ), finita memoria (en este caso, 1 bit, Q). Tienen un alfabeto asociado y **aceptan** un lenguaje $L(\mathbb{A})$.

Repaso: autómatas finitos deterministas (DFA)

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- $\delta \colon Q \times \Sigma \to Q$

Repaso: autómatas finitos deterministas (DFA)

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- $\delta\colon Q \times \Sigma \to Q \quad \rightsquigarrow \quad \hat{\delta}\colon Q \times \Sigma^* \to Q$.

Repaso: autómatas finitos deterministas (DFA)

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- $\delta \colon Q \times \Sigma \to Q \quad \rightsquigarrow \quad \hat{\delta} \colon Q \times \Sigma^* \to Q$.

Definición

$$\hat{\delta}(q, \epsilon) := q$$

$$\hat{\delta}(q, \beta x) := \delta(\hat{\delta}(q, \beta), x)$$

Repaso: autómatas finitos deterministas (DFA)

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- $\delta\colon Q \times \Sigma \to Q \quad \rightsquigarrow \quad \hat{\delta}\colon Q \times \Sigma^* \to Q$.

Definición

$$\hat{\delta}(q, \epsilon) := q \qquad\qquad q \xRightarrow{\epsilon} q$$

$$\hat{\delta}(q, \beta x) := \delta(\hat{\delta}(q, \beta), x) \qquad q \xRightarrow{\beta x} q' \quad \text{si y sólo si} \quad \exists r : \; q \xRightarrow{\beta} r \xrightarrow{x} q'$$

Repaso: autómatas finitos deterministas (DFA)

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- $\delta\colon Q \times \Sigma \to Q \quad \rightsquigarrow \quad \hat{\delta}\colon Q \times \Sigma^* \to Q$.

Definición

$$\hat{\delta}(q, \epsilon) := q \qquad\qquad q \xRightarrow{\epsilon} q$$

$$\hat{\delta}(q, \beta x) := \delta(\hat{\delta}(q, \beta), x) \qquad q \xRightarrow{\beta x} q' \quad \text{si y sólo si} \quad \exists r : \; q \xRightarrow{\beta} r \xrightarrow{x} q'$$

$$L(\mathbb{A}) := \{\alpha \mid \exists q' : \; q_0 \xRightarrow{\alpha} q' \in F\}.$$

Repaso: autómatas finitos deterministas (DFA)

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- $\delta\colon Q \times \Sigma \to Q \quad \rightsquigarrow \quad \hat{\delta}\colon Q \times \Sigma^* \to Q$.

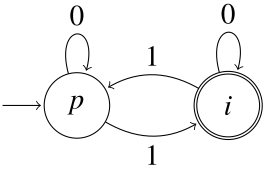
Definición

$$\hat{\delta}(q, \epsilon) := q \qquad\qquad q \xRightarrow{\epsilon} q$$

$$\hat{\delta}(q, \beta x) := \delta(\hat{\delta}(q, \beta), x) \qquad q \xRightarrow{\beta x} q' \quad \text{si y sólo si} \quad \exists r : \ q \xRightarrow{\beta} r \xrightarrow{x} q'$$

$$L(\mathbb{A}) := \{\alpha \mid \exists q' : \ q_0 \xRightarrow{\alpha} q' \in F\}.$$

En el ejemplo



$\hat{\delta}(p, 00101) = p$ porque

Repaso: autómatas finitos deterministas (DFA)

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q \quad \rightsquigarrow \quad \hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to Q$.

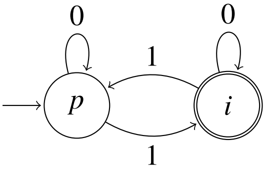
Definición

$$\hat{\delta}(q, \epsilon) := q \qquad\qquad q \xRightarrow{\epsilon} q$$

$$\hat{\delta}(q, \beta x) := \delta(\hat{\delta}(q, \beta), x) \qquad q \xRightarrow{\beta x} q' \quad \text{si y sólo si} \quad \exists r : \ q \xRightarrow{\beta} r \xrightarrow{x} q'$$

$$L(\mathbb{A}) := \{\alpha \mid \exists q' : \ q_0 \xRightarrow{\alpha} q' \in F\}.$$

En el ejemplo



$\hat{\delta}(p, 00101) = p$ porque

$$p \xrightarrow{0} p \xrightarrow{0} p \xrightarrow{1} i \xrightarrow{0} i \xrightarrow{1} p$$

$$p \xRightarrow{00101} p$$

Repaso: autómatas finitos **no** deterministas (NFA)

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- $\delta\colon Q \times \Sigma \to \mathscr{P}(Q)$

Repaso: autómatas finitos **no** deterministas (NFA)

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- $\delta\colon Q \times \Sigma \to \mathscr{P}(Q) \quad \rightsquigarrow \quad \hat{\delta}\colon Q \times \Sigma^* \to \mathscr{P}(Q)$.

Repaso: autómatas finitos **no** deterministas (NFA)

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- $\delta \colon Q \times \Sigma \to \mathscr{P}(Q) \quad \rightsquigarrow \quad \hat{\delta} \colon Q \times \Sigma^* \to \mathscr{P}(Q)$.

Definición

$$\hat{\delta}(q, \epsilon) := \{q\}$$

$$\hat{\delta}(q, \beta x) := \bigcup_{r \in \hat{\delta}(q,\beta)} \delta(r, x)$$

Repaso: autómatas finitos **no** deterministas (NFA)

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- $\delta \colon Q \times \Sigma \to \mathscr{P}(Q) \quad \rightsquigarrow \quad \hat{\delta} \colon Q \times \Sigma^* \to \mathscr{P}(Q)$.

Definición

$$\hat{\delta}(q, \epsilon) := \{q\} \qquad\qquad q \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q$$

$$\hat{\delta}(q, \beta x) := \bigcup_{r \in \hat{\delta}(q,\beta)} \delta(r, x) \qquad q \overset{\beta x}{\Longrightarrow} q' \quad \text{si y sólo si} \quad \exists r : \; q \overset{\beta}{\Longrightarrow} r \overset{x}{\longrightarrow} q'$$

Repaso: autómatas finitos **no** deterministas (NFA)

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- $\delta \colon Q \times \Sigma \to \mathscr{P}(Q) \quad \rightsquigarrow \quad \hat{\delta} \colon Q \times \Sigma^* \to \mathscr{P}(Q)$.

Definición

$$\hat{\delta}(q, \epsilon) := \{q\} \qquad\qquad q \xRightarrow{\epsilon} q$$

$$\hat{\delta}(q, \beta x) := \bigcup_{r \in \hat{\delta}(q,\beta)} \delta(r, x) \qquad q \xRightarrow{\beta x} q' \quad \text{si y sólo si} \quad \exists r : \; q \xRightarrow{\beta} r \xrightarrow{x} q'$$

$$L(\mathbb{A}) := \{\alpha \mid \exists q' : \; q_0 \xRightarrow{\alpha} q' \in F\}.$$

Repaso: autómatas finitos **no** deterministas (NFA)

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- $\delta \colon Q \times \Sigma \to \mathscr{P}(Q) \quad \rightsquigarrow \quad \hat{\delta} \colon Q \times \Sigma^* \to \mathscr{P}(Q)$.

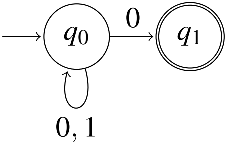
Definición

$$\hat{\delta}(q, \epsilon) := \{q\} \qquad\qquad q \xRightarrow{\epsilon} q$$

$$\hat{\delta}(q, \beta x) := \bigcup_{r \in \hat{\delta}(q,\beta)} \delta(r, x) \qquad q \xRightarrow{\beta x} q' \quad \text{si y sólo si} \quad \exists r : \; q \xRightarrow{\beta} r \xrightarrow{x} q'$$

$$L(\mathbb{A}) := \{\alpha \mid \exists q' : \; q_0 \xRightarrow{\alpha} q' \in F\}.$$

Ejemplo



Repaso: autómatas finitos **no** deterministas (NFA)

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- $\delta \colon Q \times \Sigma \to \mathscr{P}(Q) \quad \rightsquigarrow \quad \hat{\delta} \colon Q \times \Sigma^* \to \mathscr{P}(Q)$.

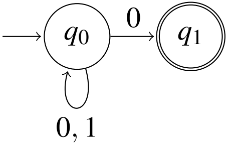
Definición

$$\hat{\delta}(q, \epsilon) := \{q\} \qquad\qquad q \xRightarrow{\epsilon} q$$

$$\hat{\delta}(q, \beta x) := \bigcup_{r \in \hat{\delta}(q,\beta)} \delta(r, x) \qquad q \xRightarrow{\beta x} q' \quad \text{si y sólo si} \quad \exists r : \ q \xRightarrow{\beta} r \xrightarrow{x} q'$$

$$L(\mathbb{A}) := \{\alpha \mid \exists q' : \ q_0 \xRightarrow{\alpha} q' \in F\}.$$

Ejemplo



$\hat{\delta}(q_0, 01) = \{q_0\}$ porque

$$\begin{tikzcd} q_0 \arrow[r, "0"] \arrow[dr, "0"'] & q_0 \arrow[r, "1"] & q_0 \\ & q_1 \not\longrightarrow & \end{tikzcd}$$

Determinización

Teorema

Para todo NFA $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ *existe un DFA* $\mathbb{A}'$ *tal que* $L(\mathbb{A}) = L(\mathbb{A}')$*.*

Determinización

Teorema

Para todo NFA $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ *existe un DFA* $\mathbb{A}'$ *tal que* $L(\mathbb{A}) = L(\mathbb{A}')$.

Por fuerza bruta

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}' &:= (\mathscr{P}(Q), \Sigma, \Delta, \{q_0\}, \mathscr{F}) \\
\mathscr{F} &:= \{X \subseteq Q \mid X \cap F \neq \emptyset\} \\
\Delta(X, a) &:= \bigcup_{q \in X} \delta(q, a) = \{q' \in Q \mid \exists q \in X : q \xrightarrow{a} q'\}.
\end{aligned}$$

- $\Delta(X,a) := \bigcup_{q\in X} \delta(q,a) = \{q' \in Q \mid \exists q \in X : q \xrightarrow{a} q'\}$.

Autómatas con movimientos ϵ (ϵ-NFA)

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

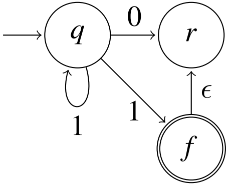
Autómatas con movimientos ϵ (ϵ-NFA)

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- $\delta\colon Q \times \Sigma \cup \{\epsilon\} \to \mathscr{P}(Q)$

Autómatas con movimientos ϵ (ϵ-NFA)

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- $\delta : Q \times \Sigma \cup \{\epsilon\} \rightarrow \mathscr{P}(Q)$

Ejemplo

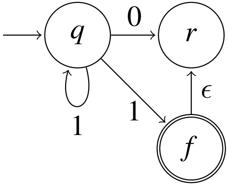


UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Autómatas con movimientos ϵ (ϵ-NFA)

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- $\delta\colon Q \times \Sigma \cup \{\epsilon\} \to \mathscr{P}(Q)$

Ejemplo



$$\delta(q,1) = \{q,f\} \qquad \delta(f,\epsilon) = \{r\}$$

Autómatas con movimientos ϵ (ϵ-NFA)

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- $\delta : Q \times \Sigma \cup \{\epsilon\} \to \mathscr{P}(Q)$

Ejemplo

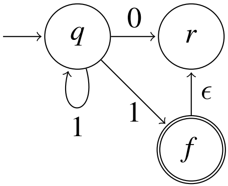
$$\begin{tikzcd} \arrow[r] & q \arrow[r, "0"] \arrow[loop below, "1"] \arrow[dr, "1"'] & r \\ & & f \arrow[u, "\epsilon"'] \end{tikzcd}$$

$\delta(q, 1) = \{q, f\}$ $\delta(f, \epsilon) = \{r\}$

$f \stackrel{\epsilon}{\Longrightarrow} f$ $f \stackrel{\epsilon}{\Longrightarrow} r$

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- $\delta : Q \times \Sigma \cup \{\epsilon\} \to \mathscr{P}(Q)$

Ejemplo



$$\delta(q, 1) = \{q, f\} \qquad \delta(f, \epsilon) = \{r\}$$

$$f \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} f \qquad f \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} r$$

Transiciones generalizadas en ϵ-NFA

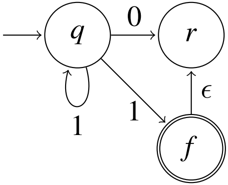
$$q \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q' \quad \text{si y sólo si} \quad q = q' \text{ ó } q \xrightarrow{\epsilon} \ldots \xrightarrow{\epsilon} q'$$

$$q \overset{\beta x}{\Longrightarrow} q' \quad \text{si y sólo si} \quad \exists r, r' : q \overset{\beta}{\Longrightarrow} r \xrightarrow{x} r' \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q'$$

Autómatas con movimientos ϵ (ϵ-NFA)

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- $\delta : Q \times \Sigma \cup \{\epsilon\} \to \mathscr{P}(Q)$

Ejemplo



$$\delta(q, 1) = \{q, f\} \qquad \delta(f, \epsilon) = \{r\}$$

$$f \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} f \qquad f \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} r$$

Transiciones generalizadas en ϵ-NFA

$$q \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q' \quad \text{si y sólo si} \quad q = q' \text{ ó } q \overset{\epsilon}{\longrightarrow} \dots \overset{\epsilon}{\longrightarrow} q'$$

$$q \overset{\beta x}{\Longrightarrow} q' \quad \text{si y sólo si} \quad \exists r, r' : q \overset{\beta}{\Longrightarrow} r \overset{x}{\longrightarrow} r' \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q'$$

Propiedad: $q \overset{\alpha\beta}{\Longrightarrow} q'$ si y sólo si $\exists r : q \overset{\alpha}{\Longrightarrow} r \overset{\beta}{\Longrightarrow} q'$.

Lenguaje aceptado por un ϵ-NFA

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- $q \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q'$ si y sólo si $q = q'$ ó $q \xrightarrow{\epsilon} \ldots \xrightarrow{\epsilon} q'$
- $q \overset{\beta x}{\Longrightarrow} q'$ si y sólo si $\exists r, r' :\ q \overset{\beta}{\Longrightarrow} r \xrightarrow{x} r' \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q'$

Lenguaje aceptado por un ϵ-NFA

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- $q \stackrel{\epsilon}{\Longrightarrow} q'$ si y sólo si $q = q'$ ó $q \xrightarrow{\epsilon} \ldots \xrightarrow{\epsilon} q'$
- $q \stackrel{\beta x}{\Longrightarrow} q'$ si y sólo si $\exists r, r' : q \stackrel{\beta}{\Longrightarrow} r \xrightarrow{x} r' \stackrel{\epsilon}{\Longrightarrow} q'$

Definición

$L(\mathbb{A}) := \{\alpha \mid \exists q' : q_0 \stackrel{\alpha}{\Longrightarrow} q' \in F\}$.

Lenguaje aceptado por un ϵ-NFA

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- $q \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q'$ si y sólo si $q = q'$ ó $q \xrightarrow{\epsilon} \ldots \xrightarrow{\epsilon} q'$
- $q \overset{\beta x}{\Longrightarrow} q'$ si y sólo si $\exists r, r' : q \overset{\beta}{\Longrightarrow} r \xrightarrow{x} r' \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q'$

Definición

$L(\mathbb{A}) := \{\alpha \mid \exists q' : q_0 \overset{\alpha}{\Longrightarrow} q' \in F\}$.

Misma definición que antes.

Lenguaje aceptado por un ϵ-NFA

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- $q \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q'$ si y sólo si $q = q'$ ó $q \xrightarrow{\epsilon} \ldots \xrightarrow{\epsilon} q'$
- $q \overset{\beta x}{\Longrightarrow} q'$ si y sólo si $\exists r, r' : q \overset{\beta}{\Longrightarrow} r \xrightarrow{x} r' \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q'$

Definición

$L(\mathbb{A}) := \{\alpha \mid \exists q' : q_0 \overset{\alpha}{\Longrightarrow} q' \in F\}$. Misma definición que antes.

Teorema (Determinización)

Para todo ϵ-NFA $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ existe un DFA $\mathbb{A}'$ tal que $L(\mathbb{A}) = L(\mathbb{A}')$.

Lenguaje aceptado por un ϵ-NFA

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- $q \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q'$ si y sólo si $q = q'$ ó $q \overset{\epsilon}{\longrightarrow} \dots \overset{\epsilon}{\longrightarrow} q'$
- $q \overset{\beta x}{\Longrightarrow} q'$ si y sólo si $\exists r, r' : q \overset{\beta}{\Longrightarrow} r \overset{x}{\longrightarrow} r' \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q'$

Definición

$L(\mathbb{A}) := \{\alpha \mid \exists q' : q_0 \overset{\alpha}{\Longrightarrow} q' \in F\}$. Misma definición que antes.

Teorema (Determinización)

Para todo ϵ-NFA $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ existe un DFA $\mathbb{A}'$ tal que $L(\mathbb{A}) = L(\mathbb{A}')$.

Vamos a $\mathscr{P}(Q)$, pero tenemos que eliminar los movimientos ϵ.

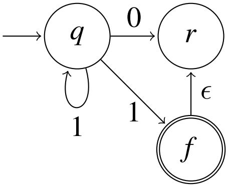
Eliminando movimientos silenciosos

- $q \stackrel{\epsilon}{\Longrightarrow} q'$ si y sólo si $q = q'$ ó $q \xrightarrow{\epsilon} \ldots \xrightarrow{\epsilon} q'$

Eliminando movimientos silenciosos

- $q \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q'$ si y sólo si $q = q'$ ó $q \xrightarrow{\epsilon} \ldots \xrightarrow{\epsilon} q'$

Definición



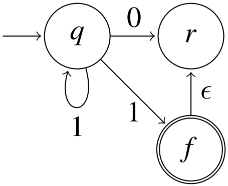
$$[q] := \{q' \mid q \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q'\}$$

$$[X] := \{q' \mid \exists q \in X : q \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q'\}$$

Eliminando movimientos silenciosos

- $q \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q'$ si y sólo si $q = q'$ ó $q \xrightarrow{\epsilon} \dots \xrightarrow{\epsilon} q'$

Definición



$$[q] := \{q' \mid q \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q'\}$$

$$[X] := \{q' \mid \exists q \in X : \; q \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q'\}$$

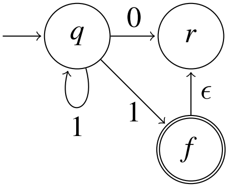
$$[f] = \{f, r\} \qquad [r] = \{r\}$$

$$[q,f] = \{q,f,r\}$$

Eliminando movimientos silenciosos

- $q \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q'$ si y sólo si $q = q'$ ó $q \xrightarrow{\epsilon} \ldots \xrightarrow{\epsilon} q'$

Definición



$$[q] := \{q' \mid q \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q'\}$$

$$[X] := \{q' \mid \exists q \in X : q \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q'\}$$

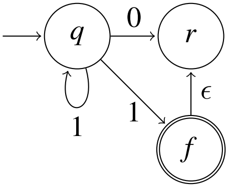
$[f] = \{f, r\}$ $\quad [r] = \{r\}$

$[q,f] = \{q, f, r\}$ $\quad [[X]] = [X]$

Eliminando movimientos silenciosos

- $q \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q'$ si y sólo si $q = q'$ ó $q \xrightarrow{\epsilon} \dots \xrightarrow{\epsilon} q'$

Definición



$$[q] := \{q' \mid q \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q'\}$$

$$[X] := \{q' \mid \exists q \in X : q \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q'\}$$

$$[f] = \{f, r\} \qquad [r] = \{r\}$$

$$[q,f] = \{q,f,r\} \qquad [[X]] = [X]$$

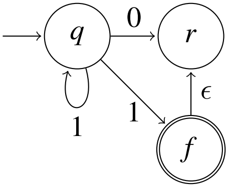
Estados de $\mathbb{A}'$

$$\mathfrak{Q} := \{[X] : X \subseteq Q\} \qquad Q_0 := [q_0] \qquad \mathscr{F} := \{D \in \mathfrak{Q} : D \cap F \neq \emptyset\}$$

Eliminando movimientos silenciosos

- $q \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q'$ si y sólo si $q = q'$ ó $q \xrightarrow{\epsilon} \dots \xrightarrow{\epsilon} q'$

Definición



$$[q] := \{q' \mid q \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q'\}$$

$$[X] := \{q' \mid \exists q \in X : q \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q'\}$$

$[f] = \{f, r\}$ $\quad [r] = \{r\}$

$[q,f] = \{q,f,r\}$ $\quad [[X]] = [X]$

Estados de $\mathbb{A}'$

$$\mathfrak{Q} := \{[X] : X \subseteq Q\} \qquad Q_0 := [q_0] \qquad \mathcal{F} := \{D \in \mathfrak{Q} : D \cap F \neq \emptyset\}$$

Luego, $D \in \mathfrak{Q} \iff D = [D]$.

Determinización de ϵ-NFA

- $q \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q'$ si y sólo si $q = q'$ ó $q \xrightarrow{\epsilon} \dots \xrightarrow{\epsilon} q'$
- $q \overset{\beta x}{\Longrightarrow} q'$ si y sólo si $\exists r, r' : q \overset{\beta}{\Longrightarrow} r \xrightarrow{x} r' \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q'$

Determinización de ϵ-NFA

- $q \stackrel{\epsilon}{\Longrightarrow} q'$ si y sólo si $q = q'$ ó $q \xrightarrow{\epsilon} \dots \xrightarrow{\epsilon} q'$
- $q \stackrel{\beta x}{\Longrightarrow} q'$ si y sólo si $\exists r, r' :\ q \stackrel{\beta}{\Longrightarrow} r \xrightarrow{x} r' \stackrel{\epsilon}{\Longrightarrow} q'$

$$\mathbb{A}' := (\mathscr{Q}, \Sigma, \Delta, Q_0, \mathscr{F})$$

$$\Delta(D, x) := \{q' \mid \exists q \in D : q \stackrel{x}{\Longrightarrow} q'\}$$

Determinización de ϵ-NFA

- $q \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q'$ si y sólo si $q = q'$ ó $q \xrightarrow{\epsilon} \dots \xrightarrow{\epsilon} q'$
- $q \overset{\beta x}{\Longrightarrow} q'$ si y sólo si $\exists r, r' : q \overset{\beta}{\Longrightarrow} r \xrightarrow{x} r' \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q'$

$$\mathbb{A}' := (\mathcal{Q}, \Sigma, \Delta, Q_0, \mathcal{F})$$

$$\Delta(D, x) := \{q' \mid \exists q \in D : q \overset{x}{\Longrightarrow} q'\}$$

$\boxed{D \xrightarrow{x} E}$ si y sólo si $\boxed{\forall q'.\ q' \in E \iff (\exists q \in D : q \overset{x}{\Longrightarrow} q')}$

Determinización de ϵ-NFA

- $\mathbb{A}' := (\mathscr{Q}, \Sigma, \Delta, Q_0, \mathscr{F})$.
- $\mathscr{Q} := \{[X] : X \subseteq Q\} \quad Q_0 := [q_0] \quad \mathscr{F} := \{D : D \cap F \neq \emptyset\}$.
- $D \xrightarrow{x} \{q' \mid \exists q \in D : q \xRightarrow{x} q'\}$.
- $\boxed{D \xrightarrow{x} E}$ si y sólo si $\boxed{\forall q'.\ q' \in E \iff (\exists q \in D : q \xRightarrow{x} q')}$

Determinización de ϵ-NFA

- $\mathbb{A}' := (\mathscr{Q}, \Sigma, \Delta, Q_0, \mathscr{F})$.
- $\mathscr{Q} := \{[X] : X \subseteq Q\} \quad Q_0 := [q_0] \quad \mathscr{F} := \{D : D \cap F \neq \emptyset\}$.
- $D \xrightarrow{x} \{q' \mid \exists q \in D : q \xRightarrow{x} q'\}$.
- $\boxed{D \xrightarrow{x} E}$ si y sólo si $\boxed{\forall q'.\ q' \in E \iff (\exists q \in D : q \xRightarrow{x} q')}$

Lema (Transiciones generalizadas del determinizado)

- $D \xRightarrow{\alpha} \{q' \mid \exists q \in D : q \xRightarrow{\alpha} q'\}$.
- $\boxed{D \xRightarrow{\alpha} E}$ *si y sólo si* $\boxed{q' \in E \iff (\exists q \in D : q \xRightarrow{\alpha} q')}$

Determinización de ϵ-NFA

- $\mathbb{A}' := (\mathscr{Q}, \Sigma, \Delta, Q_0, \mathscr{F})$.
- $\mathscr{Q} := \{[X] : X \subseteq Q\} \quad Q_0 := [q_0] \quad \mathscr{F} := \{D : D \cap F \neq \emptyset\}$.
- $D \xrightarrow{x} \{q' \mid \exists q \in D : q \overset{x}{\Longrightarrow} q'\}$.
- $\boxed{D \xrightarrow{x} E}$ si y sólo si $\boxed{\forall q'.\ q' \in E \iff (\exists q \in D : q \overset{x}{\Longrightarrow} q')}$

Lema (Transiciones generalizadas del determinizado)

- $D \overset{\alpha}{\Longrightarrow} \{q' \mid \exists q \in D : q \overset{\alpha}{\Longrightarrow} q'\}$.
- $\boxed{D \overset{\alpha}{\Longrightarrow} E}$ *si y sólo si* $\boxed{q' \in E \iff (\exists q \in D : q \overset{\alpha}{\Longrightarrow} q')}$

Teorema

$L(\mathbb{A}) = L(\mathbb{A}')$, *i.e.*

$\exists q' : q_0 \overset{\alpha}{\Longrightarrow} q' \in F$ *si y sólo si* $\exists E : [q_0] \overset{\alpha}{\Longrightarrow} E \in \mathscr{F}$

- $q \stackrel{\alpha\beta}{\Longrightarrow} q'$ si y sólo si $\exists r : q \stackrel{\alpha}{\Longrightarrow} r \stackrel{\beta}{\Longrightarrow} q'$.
- $D \stackrel{\beta x}{\Longrightarrow} E$ si y sólo si $\exists E' : D \stackrel{\beta}{\Longrightarrow} E' \stackrel{x}{\longrightarrow} E$
- $\boxed{D \stackrel{x}{\longrightarrow} E}$ si y sólo si $\boxed{\forall q'.\ q' \in E \iff (\exists q \in D : q \stackrel{x}{\Longrightarrow} q')}$

$$D \stackrel{\alpha}{\Longrightarrow} E \text{ si y sólo si } q' \in E \iff (\exists q \in D : q \stackrel{\alpha}{\Longrightarrow} q')$$

- $q \xRightarrow{\alpha\beta} q'$ si y sólo si $\exists r : q \xRightarrow{\alpha} r \xRightarrow{\beta} q'$.
- $D \xRightarrow{\beta x} E$ si y sólo si $\exists E' : D \xRightarrow{\beta} E' \xrightarrow{x} E$
- $\boxed{D \xrightarrow{x} E}$ si y sólo si $\boxed{\forall q'.\ q' \in E \iff (\exists q \in D : q \xRightarrow{x} q')}$

$$D \xRightarrow{\alpha} E \text{ si y sólo si } q' \in E \iff (\exists q \in D : q \xRightarrow{\alpha} q')$$

- $q \xRightarrow{\alpha\beta} q'$ si y sólo si $\exists r : q \xRightarrow{\alpha} r \xRightarrow{\beta} q'$.
- $\boxed{D \xRightarrow{\alpha} E}$ si y sólo si $\boxed{q' \in E \iff (\exists q \in D : q \xRightarrow{\alpha} q')}$

$\exists q' : q_0 \xRightarrow{\alpha} q' \in F$ si y sólo si $\exists E : [q_0] \xRightarrow{\alpha} E \in \mathscr{F}$

Ejemplo de determinización de ϵ-NFA