Introducción a la Lógica y la Computación

Mariana Badano Héctor Gramaglia
Pedro Sánchez Terraf Mauricio Tellechea
Guido Ivetta

FaMAF, 15 de octubre de 2021

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Contenidos estimados para hoy

1. Repaso
   - Lenguajes
   - Autómatas finitos deterministas
   - Autómatas no deterministas
2. Determinización
3. Autómatas con movimientos silenciosos
4. Determinización de ϵ-NFA

Repaso: lenguajes y autómatas

Lenguajes

- **Alfabeto**: cualquier conjunto finito Σ.

Repaso: lenguajes y autómatas

Lenguajes

- **Alfabeto**: cualquier conjunto finito Σ.
- **Palabras/strings/cadenas** sobre Σ: conjunto Σ^* definido recursivamente.

Repaso: lenguajes y autómatas

Lenguajes

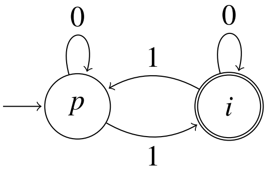
- **Alfabeto**: cualquier conjunto finito Σ.
- **Palabras/strings/cadenas** sobre Σ: conjunto Σ^* definido recursivamente.
- **Lenguaje**: cualquier subconjunto $L \subseteq \Sigma^*$.

Repaso: lenguajes y autómatas

Lenguajes

- **Alfabeto**: cualquier conjunto finito Σ.
- **Palabras/strings/cadenas** sobre Σ: conjunto Σ^* definido recursivamente.
- **Lenguaje**: cualquier subconjunto $L \subseteq \Sigma^*$.

Autómatas finitos



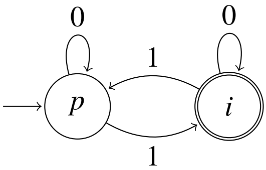
$$\mathbb{A} = (\{p, i\}, \{0, 1\}, \rightarrow, p, \{i\})$$

Repaso: lenguajes y autómatas

Lenguajes

- **Alfabeto**: cualquier conjunto finito Σ.
- **Palabras/strings/cadenas** sobre Σ: conjunto Σ^* definido recursivamente.
- **Lenguaje**: cualquier subconjunto $L \subseteq \Sigma^*$.

Autómatas finitos



$$\mathbb{A} = (\overset{Q}{\{p, i\}}, \{0, 1\}, \overset{\delta}{\to}, p, \{i\})$$

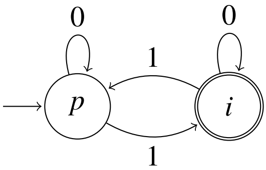
1 core (δ), finita memoria (en este caso, 1 bit, Q).

Repaso: lenguajes y autómatas

Lenguajes

- **Alfabeto**: cualquier conjunto finito Σ.
- **Palabras/strings/cadenas** sobre Σ: conjunto Σ^* definido recursivamente.
- **Lenguaje**: cualquier subconjunto $L \subseteq \Sigma^*$.

Autómatas finitos



$$\mathbb{A} = (\{p, i\}, \overset{\Sigma}{\{0, 1\}}, \to, p, \overset{F}{\{i\}})$$

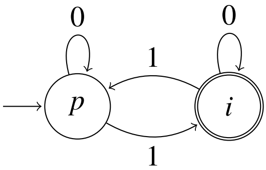
1 core (δ), finita memoria (en este caso, 1 bit, Q). Tienen un alfabeto asociado y **aceptan** un lenguaje $L(\mathbb{A})$.

Repaso: lenguajes y autómatas

Lenguajes

- **Alfabeto**: cualquier conjunto finito Σ.
- **Palabras/strings/cadenas** sobre Σ: conjunto Σ^* definido recursivamente.
- **Lenguaje**: cualquier subconjunto $L \subseteq \Sigma^*$.

Autómatas finitos



$$\mathbb{A} = (\{p, i\}, \{0, 1\}, \rightarrow, p, \{i\})$$
$$(\quad Q \quad , \quad \Sigma \quad , \delta, q_0, F\ )$$

$$\delta \colon Q \times \Sigma \rightarrow Q$$

1 core (δ), finita memoria (en este caso, 1 bit, Q). Tienen un alfabeto asociado y **aceptan** un lenguaje $L(\mathbb{A})$.

Repaso: autómatas finitos deterministas (DFA)

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$

$q \xrightarrow{x} q'$ sii $q' = \delta(q, x)$

$p \xrightarrow{x} p' \xrightarrow{y} p''$

$p \xRightarrow{xy} p''$ sii $p'' = \hat{\delta}(p, xy)$

Repaso: autómatas finitos deterministas (DFA)

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- $\delta\colon Q \times \Sigma \to Q \quad \rightsquigarrow \quad \hat{\delta}\colon Q \times \Sigma^* \to Q$.

Repaso: autómatas finitos deterministas (DFA)

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- $\delta \colon Q \times \Sigma \to Q \quad \rightsquigarrow \quad \hat{\delta} \colon Q \times \Sigma^* \to Q$.

Definición

$$\hat{\delta}(q, \epsilon) := q$$

$$\hat{\delta}(q, \beta x) := \delta(\hat{\delta}(q, \beta), x)$$

Repaso: autómatas finitos deterministas (DFA)

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- $\delta \colon Q \times \Sigma \to Q \quad \rightsquigarrow \quad \hat{\delta} \colon Q \times \Sigma^* \to Q$.

Definición

$$\hat{\delta}(q, \epsilon) := q \qquad\qquad q \xRightarrow{\epsilon} q$$

$$\hat{\delta}(q, \beta x) := \delta(\hat{\delta}(q, \beta), x) \qquad q \xRightarrow{\beta x} q' \quad \text{si y sólo si} \quad \exists r : \ q \xRightarrow{\beta} r \xrightarrow{x} q'$$

Repaso: autómatas finitos deterministas (DFA)

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- $\delta \colon Q \times \Sigma \to Q \quad \rightsquigarrow \quad \hat{\delta} \colon Q \times \Sigma^* \to Q$.

Definición

$$\hat{\delta}(q, \epsilon) := q \qquad\qquad q \xRightarrow{\epsilon} q$$

$$\hat{\delta}(q, \beta x) := \delta(\hat{\delta}(q, \beta), x) \qquad q \xRightarrow{\beta x} q' \quad \text{si y sólo si} \quad \exists r : \; q \xRightarrow{\beta} r \xrightarrow{x} q'$$

$$L(\mathbb{A}) := \{\alpha \mid \exists q' : \; q_0 \xRightarrow{\alpha} q' \in F\}.$$

$\exists p' \in F : \; p_0 \xRightarrow{\alpha} p'$

Repaso: autómatas finitos deterministas (DFA)

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- $\delta \colon Q \times \Sigma \to Q \quad \rightsquigarrow \quad \hat{\delta} \colon Q \times \Sigma^* \to Q$.

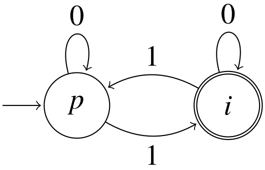
Definición

$$\hat{\delta}(q, \epsilon) := q \qquad\qquad q \xRightarrow{\epsilon} q$$

$$\hat{\delta}(q, \beta x) := \delta(\hat{\delta}(q, \beta), x) \qquad q \xRightarrow{\beta x} q' \quad \text{si y sólo si} \quad \exists r : \ q \xRightarrow{\beta} r \xrightarrow{x} q'$$

$$L(\mathbb{A}) := \{\alpha \mid \exists q' : \ q_0 \xRightarrow{\alpha} q' \in F\}.$$

En el ejemplo



$\hat{\delta}(p, 00101) = p$ porque

Repaso: autómatas finitos deterministas (DFA)

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q \quad \rightsquigarrow \quad \hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to Q$.

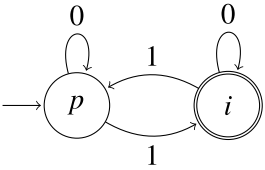
Definición

$$\hat{\delta}(q, \epsilon) := q \qquad\qquad q \xRightarrow{\epsilon} q$$

$$\hat{\delta}(q, \beta x) := \delta(\hat{\delta}(q, \beta), x) \qquad q \xRightarrow{\beta x} q' \quad \text{si y sólo si} \quad \exists r : \; q \xRightarrow{\beta} r \xrightarrow{x} q'$$

$$L(\mathbb{A}) := \{\alpha \mid \exists q' : \; q_0 \xRightarrow{\alpha} q' \in F\}.$$

En el ejemplo



$\hat{\delta}(p, 00101) = p$ porque

Traza o ejecución

$$p \xrightarrow{0} p \xrightarrow{0} p \xrightarrow{1} i \xrightarrow{0} i \xrightarrow{1} p$$

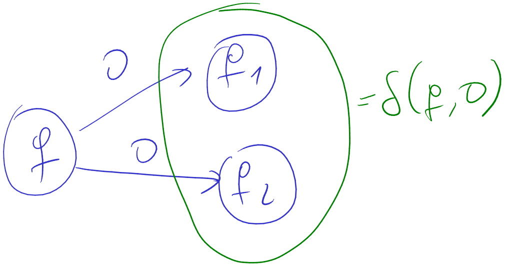
$$p \xRightarrow{00101} p$$

Repaso: autómatas finitos **no** deterministas (NFA)

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- $\delta\colon Q \times \Sigma \to \mathscr{P}(Q)$

Repaso: autómatas finitos **no** deterministas (NFA)

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- $\delta\colon Q \times \Sigma \to \mathscr{P}(Q) \rightsquigarrow \hat{\delta}\colon Q \times \Sigma^* \to \mathscr{P}(Q)$.



Repaso: autómatas finitos **no** deterministas (NFA)

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- $\delta \colon Q \times \Sigma \to \mathscr{P}(Q) \quad \rightsquigarrow \quad \hat{\delta} \colon Q \times \Sigma^* \to \mathscr{P}(Q)$.

Definición

$$\hat{\delta}(q, \epsilon) := \{q\}$$

$$\hat{\delta}(q, \beta x) := \bigcup_{r \in \hat{\delta}(q,\beta)} \delta(r, x)$$

Repaso: autómatas finitos **no** deterministas (NFA)

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- $\delta\colon Q \times \Sigma \to \mathscr{P}(Q) \rightsquigarrow \hat{\delta}\colon Q \times \Sigma^* \to \mathscr{P}(Q)$.

Definición

$$\hat{\delta}(q, \epsilon) := \{q\} \qquad\qquad q \xRightarrow{\epsilon} q$$

$$\hat{\delta}(q, \beta x) := \bigcup_{r \in \hat{\delta}(q,\beta)} \delta(r, x) \qquad q \xRightarrow{\beta x} q' \quad \text{si y sólo si} \quad \exists r : q \xRightarrow{\beta} r \xrightarrow{x} q'$$

$$q \xrightarrow{x} q' \quad \text{sii} \quad q' \in \delta(q, x)$$

$$q \xRightarrow{\epsilon x} q' \quad \text{sii} \quad \exists r \; q \xRightarrow{\epsilon} r \xrightarrow{x} q'$$

$$\text{sii} \quad q \xrightarrow{x} q'$$

Repaso: autómatas finitos **no** deterministas (NFA)

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- $\delta\colon Q \times \Sigma \to \mathscr{P}(Q) \quad \rightsquigarrow \quad \hat{\delta}\colon Q \times \Sigma^* \to \mathscr{P}(Q)$.

Definición

$$\hat{\delta}(q, \epsilon) := \{q\} \qquad\qquad q \xrightarrow{\epsilon} q$$

$$\hat{\delta}(q, \beta x) := \bigcup_{r \in \hat{\delta}(q,\beta)} \delta(r, x) \qquad q \xRightarrow{\beta x} q' \quad \text{si y sólo si} \quad \exists r : \ q \xRightarrow{\beta} r \xrightarrow{x} q'$$

$$L(\mathbb{A}) := \{\alpha \mid \exists q' : \ q_0 \xRightarrow{\alpha} q' \in F\}.$$

Repaso: autómatas finitos **no** deterministas (NFA)

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- $\delta : Q \times \Sigma \to \mathscr{P}(Q) \rightsquigarrow \hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to \mathscr{P}(Q)$.

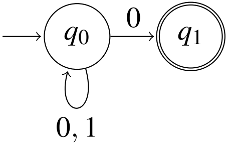
Definición

$$\hat{\delta}(q, \epsilon) := \{q\} \qquad\qquad q \xRightarrow{\epsilon} q$$

$$\hat{\delta}(q, \beta x) := \bigcup_{r \in \hat{\delta}(q,\beta)} \delta(r, x) \qquad q \xRightarrow{\beta x} q' \quad \text{si y sólo si} \quad \exists r : \ q \xRightarrow{\beta} r \xrightarrow{x} q'$$

$$L(\mathbb{A}) := \{\alpha \mid \exists q' : \ q_0 \xRightarrow{\alpha} q' \in F\}.$$

Ejemplo



Repaso: autómatas finitos **no** deterministas (NFA)

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- $\delta : Q \times \Sigma \to \mathscr{P}(Q) \quad \rightsquigarrow \quad \hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to \mathscr{P}(Q)$.

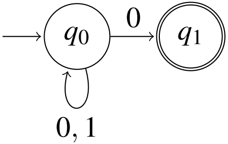
Definición

$$\hat{\delta}(q, \epsilon) := \{q\} \qquad\qquad q \xrightarrow{\epsilon}\!\!\!\!\!\Rightarrow q$$

$$\hat{\delta}(q, \beta x) := \bigcup_{r \in \hat{\delta}(q,\beta)} \delta(r, x) \qquad q \stackrel{\beta x}{\Longrightarrow} q' \quad \text{si y sólo si} \quad \exists r : \ q \stackrel{\beta}{\Longrightarrow} r \xrightarrow{x} q'$$

$$L(\mathbb{A}) := \{\alpha \mid \exists q' : \ q_0 \stackrel{\alpha}{\Longrightarrow} q' \in F\}.$$

Ejemplo



$\hat{\delta}(q_0, 01) = \{q_0\}$ porque

$$\begin{tikzcd} q_0 \arrow[r, "0"] \arrow[dr, "0"'] & q_0 \arrow[r, "1"] & q_0 \\ & q_1 \not\longrightarrow & \end{tikzcd}$$

Teorema

Para todo NFA $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ *existe un DFA* $\mathbb{A}'$ *tal que* $L(\mathbb{A}) = L(\mathbb{A}')$.

DFA $\rightsquigarrow$ NFA

δ

$\delta(q, x) = \{\delta(q, x)\}$.

Determinización

Teorema

Para todo NFA $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ *existe un DFA* $\mathbb{A}'$ *tal que* $L(\mathbb{A}) = L(\mathbb{A}')$.

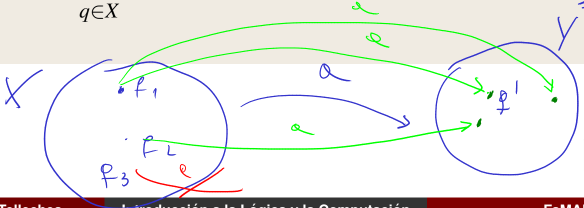
Por fuerza bruta

$$\mathbb{A}' := (\mathscr{P}(Q), \Sigma, \Delta, \{q_0\}, \mathscr{F})$$

$$\mathscr{F} := \{X \subseteq Q \mid X \cap F \neq \emptyset\}$$

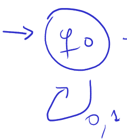
$$\Delta(X, a) := \bigcup_{q \in X} \delta(q, a) = \{q' \in Q \mid \exists q \in X : q \xrightarrow{a} q'\}. \quad \delta(X, a) = Y \subseteq Q$$

$X \subseteq Q$



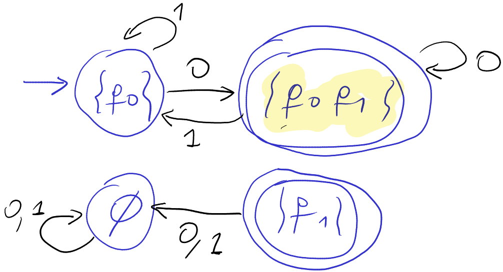
- $\Delta(X,a) := \bigcup_{q \in X} \delta(q,a) = \{q' \in Q \mid \exists q \in X : q \xrightarrow{a} q'\}$.

$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, p_0, \{p_1\})$, $F = \{p_1\}$



$\mathcal{A} = (\mathcal{P}(Q), \{0,1\}, \Delta, \{p_0\}, F^c)$

$\left\{ \{\emptyset\}, \{p_0\}, \{p_1\}, \{p_0\, p_1\} \right\} = \mathcal{P}(Q)$



Autómatas con movimientos ϵ (ϵ-NFA)

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

Autómatas con movimientos ϵ (ϵ-NFA)

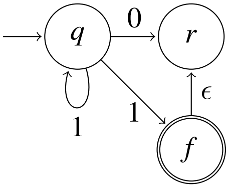
- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- $\delta : Q \times \Sigma \cup \{\epsilon\} \to \mathscr{P}(Q)$

η También se usa para las transiciones mudas.

Autómatas con movimientos ϵ (ϵ-NFA)

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- $\delta : Q \times \Sigma \cup \{\epsilon\} \to \mathscr{P}(Q)$

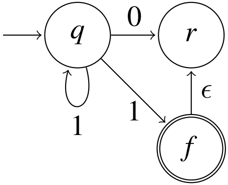
Ejemplo



Autómatas con movimientos ϵ (ϵ-NFA)

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- $\delta : Q \times \Sigma \cup \{\epsilon\} \to \mathscr{P}(Q)$

Ejemplo



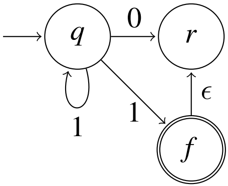
$$\delta(q, 1) = \{q, f\} \qquad \delta(f, \epsilon) = \{r\}$$

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- $\delta : Q \times \Sigma \cup \{\epsilon\} \to \mathscr{P}(Q)$

$(\ ) = \text{To String} : \Sigma \cup \{\epsilon\} \longrightarrow \Sigma^*$

$x \in \Sigma$, $(x) \in \Sigma^*$ $\quad (\epsilon) =$ cadena vacía (no símbolo)

Ejemplo



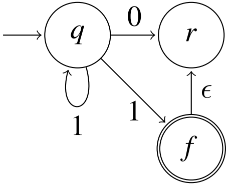
$$\delta(q, 1) = \{q, f\} \qquad \delta(f, \epsilon) = \{r\}$$

$$f \stackrel{(\epsilon)}{\Longrightarrow} f \qquad f \stackrel{(\epsilon)}{\Longrightarrow} r$$

Autómatas con movimientos ϵ (ϵ-NFA)

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- $\delta : Q \times \Sigma \cup \{\epsilon\} \to \mathscr{P}(Q)$

Ejemplo



$\delta(q, 1) = \{q, f\}$ $\qquad$ $\delta(f, \epsilon) = \{r\}$

$f \stackrel{\epsilon}{\Longrightarrow} f$ $\qquad$ $f \stackrel{\epsilon}{\Longrightarrow} r$

$q \xrightarrow{x} q'$ sii $q' \in \delta(q, x)$

Transiciones generalizadas en ϵ-NFA

$$q \stackrel{(\epsilon)}{\Longrightarrow} q' \quad \text{si y sólo si} \quad q = q' \text{ ó } q \xrightarrow{\epsilon} \ldots \xrightarrow{\epsilon} q'$$

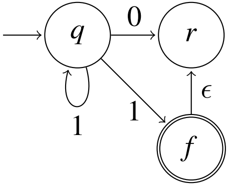
$$q \stackrel{\beta x}{\Longrightarrow} q' \quad \text{si y sólo si} \quad \exists r, r' : q \stackrel{\beta}{\Longrightarrow} r \xrightarrow{x} r' \stackrel{\epsilon}{\Longrightarrow} q'$$

$q \stackrel{(1)}{\Longrightarrow} r$ sii $q \stackrel{(\epsilon)}{\Longrightarrow} r' \xrightarrow{1} r$

Autómatas con movimientos ϵ (ϵ-NFA)

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- $\delta : Q \times \Sigma \cup \{\epsilon\} \to \mathscr{P}(Q)$

Ejemplo



string ε

$$\delta(q, 1) = \{q, f\} \qquad \delta(f, \epsilon) = \{r\}$$

$$f \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} f \qquad f \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} r$$

símbolo ε

Transiciones generalizadas en ϵ-NFA

$$q \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q' \quad \text{si y sólo si} \quad q = q' \text{ ó } q \overset{\epsilon}{\longrightarrow} \dots \overset{\epsilon}{\longrightarrow} q'$$

$$q \overset{\beta x}{\Longrightarrow} q' \quad \text{si y sólo si} \quad \exists r, r' : q \overset{\beta}{\Longrightarrow} r \overset{x}{\longrightarrow} r' \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q'$$

Propiedad: $q \overset{\alpha\beta}{\Longrightarrow} q'$ si y sólo si $\exists r : q \overset{\alpha}{\Longrightarrow} r \overset{\beta}{\Longrightarrow} q'$.

Lenguaje aceptado por un ϵ-NFA

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- $q \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q'$ si y sólo si $q = q'$ ó $q \xrightarrow{\epsilon} \ldots \xrightarrow{\epsilon} q'$
- $q \overset{\beta x}{\Longrightarrow} q'$ si y sólo si $\exists r, r' : q \overset{\beta}{\Longrightarrow} r \xrightarrow{x} r' \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q'$

Lenguaje aceptado por un ϵ-NFA

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- $q \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q'$ si y sólo si $q = q'$ ó $q \xrightarrow{\epsilon} \dots \xrightarrow{\epsilon} q'$
- $q \overset{\beta x}{\Longrightarrow} q'$ si y sólo si $\exists r, r' : q \overset{\beta}{\Longrightarrow} r \xrightarrow{x} r' \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q'$

Definición

$L(\mathbb{A}) := \{\alpha \mid \exists q' : q_0 \overset{\alpha}{\Longrightarrow} q' \in F\}$.

Lenguaje aceptado por un ϵ-NFA

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- $q \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q'$ si y sólo si $q = q'$ ó $q \xrightarrow{\epsilon} \dots \xrightarrow{\epsilon} q'$
- $q \overset{\beta x}{\Longrightarrow} q'$ si y sólo si $\exists r, r' :\; q \overset{\beta}{\Longrightarrow} r \xrightarrow{x} r' \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q'$

Definición

$L(\mathbb{A}) := \{\alpha \mid \exists q' :\; q_0 \overset{\alpha}{\Longrightarrow} q' \in F\}$. Misma definición que antes.

Lenguaje aceptado por un ϵ-NFA

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- $q \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q'$ si y sólo si $q = q'$ ó $q \xrightarrow{\epsilon} \dots \xrightarrow{\epsilon} q'$
- $q \overset{\beta x}{\Longrightarrow} q'$ si y sólo si $\exists r, r' : q \overset{\beta}{\Longrightarrow} r \xrightarrow{x} r' \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q'$

Definición

$L(\mathbb{A}) := \{\alpha \mid \exists q' : q_0 \overset{\alpha}{\Longrightarrow} q' \in F\}$. Misma definición que antes.

Teorema (Determinización)

Para todo ϵ-NFA $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ existe un DFA $\mathbb{A}'$ tal que $L(\mathbb{A}) = L(\mathbb{A}')$.

Lenguaje aceptado por un ϵ-NFA

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- $q \xRightarrow{\epsilon} q'$ si y sólo si $q = q'$ ó $q \xrightarrow{\epsilon} \ldots \xrightarrow{\epsilon} q'$
- $q \xRightarrow{\beta x} q'$ si y sólo si $\exists r, r' :\ q \xRightarrow{\beta} r \xrightarrow{x} r' \xRightarrow{\epsilon} q'$

Definición

$L(\mathbb{A}) := \{\alpha \mid \exists q' :\ q_0 \xRightarrow{\alpha} q' \in F\}$. Misma definición que antes.

Teorema (Determinización)

Para todo ϵ-NFA $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ existe un DFA $\mathbb{A}'$ tal que $L(\mathbb{A}) = L(\mathbb{A}')$.

Vamos a $\mathscr{P}(Q)$, pero tenemos que eliminar los movimientos ϵ.

Eliminando movimientos silenciosos

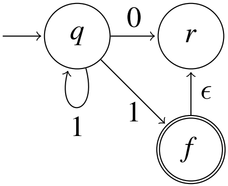
- $q \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q'$ si y sólo si $q = q'$ ó $q \xrightarrow{\epsilon} \dots \xrightarrow{\epsilon} q'$

Eliminando movimientos silenciosos

- $q \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q'$ si y sólo si $q = q'$ ó $q \xrightarrow{\epsilon} \ldots \xrightarrow{\epsilon} q'$

Definición

$[X] \supseteq X$

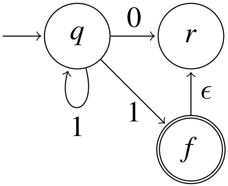


$$[q] := \{q' \mid q \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q'\}$$

$$[X] := \{q' \mid \exists q \in X : q \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q'\}$$

- $q \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q'$ si y sólo si $q = q'$ ó $q \xrightarrow{\epsilon} \dots \xrightarrow{\epsilon} q'$

Definición



$$[q] := \{q' \mid q \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q'\}$$

$$[X] := \{q' \mid \exists q \in X : \ q \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q'\}$$

$[f] = \{f, r\}$ $\quad$ $[r] = \{r\}$

omitimos.

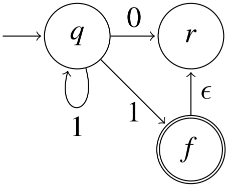
$[q,f] = \{q,f,r\}$ $\quad$ $\{q,f\} \subseteq [\{q,f\}]$

Eliminando movimientos silenciosos

- $q \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q'$ si y sólo si $q = q'$ ó $q \xrightarrow{\epsilon} \dots \xrightarrow{\epsilon} q'$

reflex y Trans!

Definición



$$[q] := \{q' \mid q \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q'\}$$

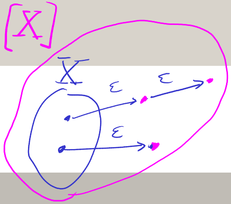
$\overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q''$

$$[X] := \{q' \mid \exists q \in X : \ q \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q'\}$$

$[f] = \{f, r\}$ $\qquad$ $[r] = \{r\}$

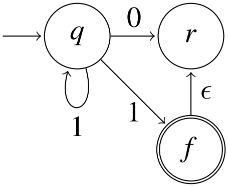
$[q, f] = \{q, f, r\}$ $\qquad$ $[[X]] = [X]$

Eliminando movimientos silenciosos



- $q \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q'$ si y sólo si $q = q'$ ó $q \xrightarrow{\epsilon} \ldots \xrightarrow{\epsilon} q'$

Definición



$$[q] := \{q' \mid q \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q'\}$$

$$[X] := \{q' \mid \exists q \in X : \; q \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q'\}$$

$$[f] = \{f, r\} \qquad [r] = \{r\}$$

$$[q,f] = \{q,f,r\} \qquad [[X]] = [X]$$

Estados de $\mathbb{A}'$

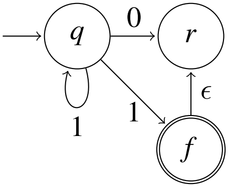
$$\mathfrak{Q} := \{[X] : X \subseteq Q\} \qquad Q_0 := [q_0] \qquad \mathfrak{F} := \{D \in \mathfrak{Q} : D \cap F \neq \emptyset\}$$

$\neq \mathcal{P}(Q)$

Eliminando movimientos silenciosos

- $q \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q'$ si y sólo si $q = q'$ ó $q \xrightarrow{\epsilon} \ldots \xrightarrow{\epsilon} q'$

Definición



$[q] := \{q' \mid q \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q'\}$

$[X] := \{q' \mid \exists q \in X : q \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q'\}$

$[f] = \{f, r\}$ $[r] = \{r\}$ $X \subseteq [X]$

$[q,f] = \{q,f,r\}$ $[[X]] = [X]$

Estados de $\mathbb{A}'$

$\mathfrak{Q} := \{[X] : X \subseteq Q\}$ $Q_0 := [q_0]$ $\mathfrak{F} := \{D \in \mathfrak{Q} : D \cap F \neq \emptyset\}$

Luego, $D \in \mathfrak{Q} \iff D = [D]$.

$(\Rightarrow)$ $D = [X]$, $[D] = [[X]] = [X]$

$(\Leftarrow)$ $D = [X]$ con $X = D$!!

Determinización de ϵ-NFA

string!

símbolo!

- $q \stackrel{\epsilon}{\Longrightarrow} q'$ si y sólo si $q = q'$ ó $q \xrightarrow{\epsilon} \dots \xrightarrow{\epsilon} q'$
- $q \stackrel{\beta x}{\Longrightarrow} q'$ si y sólo si $\exists r, r' : q \stackrel{\beta}{\Longrightarrow} r \xrightarrow{x} r' \stackrel{\epsilon}{\Longrightarrow} q'$

Determinización de ϵ-NFA

- $q \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q'$ si y sólo si $q = q'$ ó $q \xrightarrow{\epsilon} \ldots \xrightarrow{\epsilon} q'$
- $q \overset{\beta x}{\Longrightarrow} q'$ si y sólo si $\exists r, r' : q \overset{\beta}{\Longrightarrow} r \xrightarrow{x} r' \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q'$

DFA!

$$\mathbb{A}' := (\mathcal{Q}, \Sigma, \Delta, Q_0, \mathcal{F})$$

string

$$\Delta(D, x) := \{q' \mid \exists q \in D : q \overset{(x)}{\Longrightarrow} q'\}$$

Determinización de ϵ-NFA

$\times$

$D\ E, D_3 \subseteq Q$

$D \longrightarrow E$ y D_3 A'

- $q \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q'$ si y sólo si $q = q'$ ó $q \overset{\epsilon}{\longrightarrow} \ldots \overset{\epsilon}{\longrightarrow} q'$
- $q \overset{\beta x}{\Longrightarrow} q'$ si y sólo si $\exists r, r' :\ q \overset{\beta}{\Longrightarrow} r \overset{x}{\longrightarrow} r' \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q'$

$$\mathbb{A}' := (\mathcal{Q}, \Sigma, \Delta, Q_0, \mathcal{F})$$

$$\Delta(D, x) := \underbrace{\{q' \mid \exists q \in D : q \overset{(x)}{\Longrightarrow} q'\}} \longrightarrow E$$

$\boxed{D \overset{x}{\longrightarrow} E}$ si y sólo si $\boxed{\forall q'.\ q' \in E \iff (\exists q \in D : q \overset{x}{\Longrightarrow} q')}$

Determinización de ϵ-NFA

- $\mathbb{A}' := (\mathscr{Q}, \Sigma, \Delta, Q_0, \mathscr{F})$.
- $\mathscr{Q} := \{[X] : X \subseteq Q\} \quad Q_0 := [q_0] \quad \mathscr{F} := \{D : D \cap F \neq \emptyset\}$.
- $D \xrightarrow{x} \{q' \mid \exists q \in D : q \xRightarrow{x} q'\}$.
- $\boxed{D \xrightarrow{x} E}$ si y sólo si $\boxed{\forall q'.\ q' \in E \iff (\exists q \in D : q \xRightarrow{x} q')}$

Determinización de ϵ-NFA

- $\mathbb{A}' := (\mathscr{Q}, \Sigma, \Delta, Q_0, \mathscr{F})$.
- $\mathscr{Q} := \{[X] : X \subseteq Q\} \quad Q_0 := [q_0] \quad \mathscr{F} := \{D : D \cap F \neq \emptyset\}$.
- $D \xrightarrow{x} \{q' \mid \exists q \in D : q \overset{x}{\Longrightarrow} q'\}$.
- $\boxed{D \xrightarrow{x} E}$ si y sólo si $\boxed{\forall q'.\ q' \in E \iff (\exists q \in D : q \overset{x}{\Longrightarrow} q')}$

Lema (Transiciones generalizadas del determinizado)

- $D \overset{\alpha}{\Longrightarrow} \{q' \mid \exists q \in D : q \overset{\alpha}{\Longrightarrow} q'\}$.
- $\boxed{D \overset{\alpha}{\Longrightarrow} E}$ *si y sólo si* $\boxed{q' \in E \iff (\exists q \in D : q \overset{\alpha}{\Longrightarrow} q')}$

Determinización de ϵ-NFA

- $\mathbb{A}' := (\mathscr{Q}, \Sigma, \Delta, Q_0, \mathscr{F})$.
- $\mathscr{Q} := \{[X] : X \subseteq Q\} \quad Q_0 := [q_0] \quad \mathscr{F} := \{D : D \cap F \neq \emptyset\}$.
- $D \xrightarrow{x} \{q' \mid \exists q \in D : q \xRightarrow{x} q'\}$.
- $\boxed{D \xrightarrow{x} E}$ si y sólo si $\boxed{\forall q'.\ q' \in E \iff (\exists q \in D : q \xRightarrow{x} q')}$

Lema (Transiciones generalizadas del determinizado)

- $D \xRightarrow{\alpha} \{q' \mid \exists q \in D : q \xRightarrow{\alpha} q'\}$.
- $\boxed{D \xRightarrow{\alpha} E}$ *si y sólo si* $\boxed{q' \in E \iff (\exists q \in D : q \xRightarrow{\alpha} q')}$

Teorema

$L(\mathbb{A}) = L(\mathbb{A}')$, *i.e.*

$\exists q' : q_0 \xRightarrow{\alpha} q' \in F$ *si y sólo si* $\exists E : [q_0] \xRightarrow{\alpha} E \in \mathscr{F}$

- $q \overset{\alpha\beta}{\Longrightarrow} q'$ si y sólo si $\exists r : q \overset{\alpha}{\Longrightarrow} r \overset{\beta}{\Longrightarrow} q'$.
- $D \overset{\beta x}{\Longrightarrow} E$ si y sólo si $\exists E' : D \overset{\beta}{\Longrightarrow} E' \overset{x}{\longrightarrow} E$
- $\boxed{D \overset{x}{\longrightarrow} E}$ si y sólo si $\boxed{\forall q'.\ q' \in E \iff (\exists q \in D : q \overset{x}{\Longrightarrow} q')}$

Lema $D \overset{\alpha}{\Longrightarrow} E$ si y sólo si $\boxed{q' \in E \iff (\exists q \in D : q \overset{\alpha}{\Longrightarrow} q')}$ $\forall p'$

Por inducción en α

$\boxed{\alpha = \varepsilon}$ $D \overset{\varepsilon}{\Longrightarrow} E$ sii $\forall p'\ p' \in E \iff (\exists p \in D\ p \overset{\varepsilon}{\Rightarrow} p')$

sii

$E = D = [D] = \{p' \mid \exists p \in D : q \overset{\varepsilon}{\Longrightarrow} p'\}$ ✓

- $q \overset{\alpha\beta}{\Longrightarrow} q'$ si y sólo si $\exists r : q \overset{\alpha}{\Longrightarrow} r \overset{\beta}{\Longrightarrow} q'$.
- $D \overset{\beta x}{\Longrightarrow} E$ si y sólo si $\exists E' : D \overset{\beta}{\Longrightarrow} E' \overset{x}{\longrightarrow} E$
- $\boxed{D \overset{x}{\longrightarrow} E}$ si y sólo si $\boxed{\forall q'.\ q' \in E \iff (\exists q \in D : q \overset{x}{\Longrightarrow} q')}$

HI $D \overset{\alpha}{\Longrightarrow} E$ si y sólo si $q' \in E \iff (\exists q \in D : q \overset{\alpha}{\Longrightarrow} q')$

Consideremos $\alpha = \beta x$ (vuelta)

$D \overset{\beta x}{\Longrightarrow} E$ sii $\exists E'.\ D \overset{\beta}{\Longrightarrow} E' \overset{x}{\longrightarrow} E$

$E' \overset{x}{\longrightarrow} E$ sii $\forall q'\ q' \in E \iff (\exists r.\ r \in E' \wedge r \overset{x}{\Longrightarrow} q')$

$q' \in E \iff (\exists r.\ \exists p \in D : q \overset{\beta}{\Longrightarrow} r \wedge r \overset{x}{\Longrightarrow} q')$

$\iff \exists p \in D.\ \exists r : p \overset{\beta}{\Longrightarrow} r \overset{x}{\Longrightarrow} p'$

$\iff \exists p \in D : p \overset{\beta x}{\Longrightarrow} p'$

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

- $q \xRightarrow{\alpha\beta} q'$ si y sólo si $\exists r : q \xRightarrow{\alpha} r \xRightarrow{\beta} q'$.

$D \xRightarrow{\alpha} \{ q' : \exists q \in D \,(q \xRightarrow{\alpha} q') \}$

- $\boxed{D \xRightarrow{\alpha} E}$ si y sólo si $\boxed{q' \in E \iff (\exists q \in D : q \xRightarrow{\alpha} q')}$

Teorema $\exists q' : q_0 \xRightarrow{\alpha} q' \in F$ si y sólo si $\exists E : [q_0] \xRightarrow{\alpha} E \in \mathscr{F}$

Prueba: $(\Rightarrow)$ Sup. $q_0 \xRightarrow{\alpha} q' \in F$. Quiero ver

$[q_0] \xRightarrow{\alpha} E \in \mathscr{F}$ para algún E.

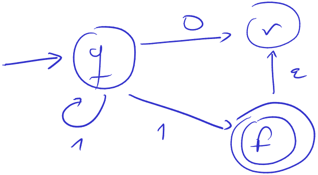
$E = \{ q'' : \exists q \in [q_0] \,(q \xRightarrow{\alpha} q'') \} \ni q'$

Como $\overset{q_0}{q_0} \xRightarrow{\alpha} q'$, entonces $q' \in E \in \mathscr{F}$ ✓

$(\Leftarrow)$ Sup. $[q_0] \xRightarrow{\alpha} E \in \mathscr{F} \leadsto \exists q' \in F$ tq $q' \in E$

Luego $\exists q \in [q_0]$ tq $q_0 \xRightarrow{\varepsilon} q \xRightarrow{\alpha} q'$ " $q_0 \xRightarrow{\varepsilon\alpha} q'$ "

Ejemplo de determinización de ϵ-NFA



$$[\emptyset] = \emptyset$$
$$[q] = \{q\}$$
$$[r] = \{r\}$$
$$[f] = \{f, r\} \;(= [f, r])$$
$$[q, f] = \{q, f, r\} \;(= [q, f, r])$$
$$[q, r] = \{q, r\}$$