Introducción a la Lógica y la Computación

Mariana Badano Héctor Gramaglia
Pedro Sánchez Terraf Mauricio Tellechea
Guido Ivetta César Vallero

FaMAF, 20 de agosto de 2021

Información Básica

Aula virtual

https://famaf.aulavirtual.unc.edu.ar/course/view.php?id=809

Ediciones anteriores de la materia

Clases completas de 2020 en YouTube
(y más info en mi web de la materia 2020).

Dinámica de trabajo

Clases virtuales

- César Vallero y Guido Ivetta serán moderadores del chat.
- Por favor hagan sus consultas por ahí, y en caso de ser necesario, ellos me la comunicarán a mí.
- **Prácticos**: 3 comisiones a cargo de Mariana, Héctor y Mauricio, respectivamente.

Dinámica de trabajo

Clases virtuales

- César Vallero y Guido Ivetta serán moderadores del chat.
- Por favor hagan sus consultas por ahí, y en caso de ser necesario, ellos me la comunicarán a mí.
- **Prácticos**: 3 comisiones a cargo de Mariana, Héctor y Mauricio, respectivamente.

Ver el teórico "en crudo" no sirve

- Cada clase (aproximadamente) tendrá indicada una lectura previa.
- De esta manera podrán sacarse más dudas en vivo.

Contenidos estimados para hoy

1. Conjuntos parcialmente ordenados
   - Ejemplos
   - Máximos, mínimos, maximales y minimales
   - Supremos e ínfimos
   - Isomorfismo de posets

Relaciones de orden

Repasamos las propiedades de una relación:

- **reflexiva**: $\forall a \in A, \quad a \, R \, a$.
- **simétrica**: $\forall a, b \in A, \quad a \, R \, b \implies b \, R \, a$.
- **antisimétrica**: $\forall a, b \in A, \quad a \, R \, b \ \& \ b \, R \, a \implies a = b$.
- **transitiva**: $\forall a, b, c \in A, \quad a \, R \, b \ \& \ b \, R \, c \implies a \, R \, c$.

Relaciones de orden

Repasamos las propiedades de una relación:

- **reflexiva**: $\forall a \in A, \quad a \, R \, a$.
- **simétrica**: $\forall a, b \in A, \quad a \, R \, b \implies b \, R \, a$.
- **antisimétrica**: $\forall a, b \in A, \quad a \, R \, b \ \& \ b \, R \, a \implies a = b$.
- **transitiva**: $\forall a, b, c \in A, \quad a \, R \, b \ \& \ b \, R \, c \implies a \, R \, c$.

Definición

Una **relación de orden parcial** R sobre un conjunto A es una relación que satisface las propiedades de reflexividad, antisimetría y transitividad.

Relaciones de orden

Repasamos las propiedades de una relación:

- **reflexiva**: $\forall a \in A, \quad a\, R\, a$.
- **simétrica**: $\forall a, b \in A, \quad a\, R\, b \implies b\, R\, a$.
- **antisimétrica**: $\forall a, b \in A, \quad a\, R\, b \;\&\; b\, R\, a \implies a = b$.
- **transitiva**: $\forall a, b, c \in A, \quad a\, R\, b \;\&\; b\, R\, c \implies a\, R\, c$.

Definición

Una **relación de orden parcial** R sobre un conjunto A es una relación que satisface las propiedades de reflexividad, antisimetría y transitividad.

Ejemplo

1. La relaciones de **orden usuales** $\leqslant$ sobre $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$.
2. La relación "divide" sobre $\mathbb{N}$.
3. La relación de **inclusión** $\subseteq$ sobre las partes $\mathscr{P}(A)$ de un conjunto A.

Conjuntos parcialmente ordenados

Definición

Un **conjunto parcial ordenado** (**cpo** ó **poset**) es un par (A, R) donde A es un conjunto y R es un orden parcial sobre A.

Definición

Un **conjunto parcial ordenado** (**cpo** ó **poset**) es un par (A, R) donde A es un conjunto y R es un orden parcial sobre A.

Ejemplo (Posets)

1. $(\mathbb{R}, \leqslant)$, $(\mathbb{N}, \leqslant)$, $(\mathbb{Z}, \leqslant)$.
2. $(\mathbb{N}, |)$.
3. $(\mathscr{P}(A), \subseteq)$ para cada conjunto A.

Conjuntos parcialmente ordenados

Definición

Un **conjunto parcial ordenado** (**cpo** ó **poset**) es un par (A, R) donde A es un conjunto y R es un orden parcial sobre A.

Ejemplo (Posets)

1. $(\mathbb{R}, \leqslant)$, $(\mathbb{N}, \leqslant)$, $(\mathbb{Z}, \leqslant)$. $\longrightarrow$ subconjuntos inducen nuevos posets.
2. $(\mathbb{N}, |)$.
3. $(\mathscr{P}(A), \subseteq)$ para cada conjunto A.

Muchísimos ejemplos

Subposets

Si (A, R) es un poset y $B \subseteq A$, entonces (B, R) también es un poset.

Muchísimos ejemplos

Subposets

Si (A, R) es un poset y $B \subseteq A$, entonces (B, R) también es un poset.

(Estrictamente hay que poner la *restricción de R a B* junto a B para tener un poset).

Muchísimos ejemplos

Subposets

Si (A, R) es un poset y $B \subseteq A$, entonces (B, R) también es un poset.

(Estrictamente hay que poner la *restricción de R a B* junto a B para tener un poset).
A partir de $(\mathbb{N}, |)$ obtenemos:

Ejemplo (Conjunto de divisores de n)

$D_n := \{k \in \mathbb{N} : k \mid n\}$.

Muchísimos ejemplos

Subposets

Si (A, R) es un poset y $B \subseteq A$, entonces (B, R) también es un poset.

(Estrictamente hay que poner la *restricción de R a B* junto a B para tener un poset).
A partir de $(\mathbb{N}, |)$ obtenemos:

Ejemplo (Conjunto de divisores de n)

$D_n := \{k \in \mathbb{N} : k \mid n\}$. $(D_n, |)$ es un poset.

Muchísimos ejemplos

Subposets

Si (A, R) es un poset y $B \subseteq A$, entonces (B, R) también es un poset.

(Estrictamente hay que poner la *restricción de R a B* junto a B para tener un poset).
A partir de $(\mathbb{N}, |)$ obtenemos:

Ejemplo (Conjunto de divisores de n)

$D_n := \{k \in \mathbb{N} : k \mid n\}$. $(D_n, |)$ es un poset.

- $D_4 = \{1, 2, 4\}$.

Muchísimos ejemplos

Subposets

Si (A, R) es un poset y $B \subseteq A$, entonces (B, R) también es un poset.

(Estrictamente hay que poner la *restricción de R a B* junto a B para tener un poset).
A partir de $(\mathbb{N}, |)$ obtenemos:

Ejemplo (Conjunto de divisores de n)

$D_n := \{k \in \mathbb{N} : k \mid n\}$. $(D_n, |)$ es un poset.

- $D_4 = \{1, 2, 4\}$.
- $D_8 = \{1, 2, 4, 8\}$.

Muchísimos ejemplos

Subposets

Si (A, R) es un poset y $B \subseteq A$, entonces (B, R) también es un poset.

(Estrictamente hay que poner la *restricción de R a B* junto a B para tener un poset).
A partir de $(\mathbb{N}, |)$ obtenemos:

Ejemplo (Conjunto de divisores de n)

$D_n := \{k \in \mathbb{N} : k \mid n\}$. $(D_n, |)$ es un poset.

- $D_4 = \{1, 2, 4\}$.
- $D_8 = \{1, 2, 4, 8\}$.
- $D_9 = \{1, 3, 9\}$.

Ordenes no parciales!

Un **orden total** o **cadena** sobre un conjunto P es un orden parcial $\leq$ sobre P que satisface la **ley de dicotomía**:

$$\text{para todo } a, b \in P, \quad a \leq b \ \text{ó} \ b \leq a.$$

Ordenes no parciales!

Un **orden total** o **cadena** sobre un conjunto P es un orden parcial $\leq$ sobre P que satisface la **ley de dicotomía**:

$$\text{para todo } a, b \in P, \quad a \leq b \text{ ó } b \leq a.$$

Ejemplo

1. El orden $\leqslant$ sobre $\mathbb{R}$.
2. El orden **lexicográfico** de las palabras en un diccionario.

Ordenes no parciales!

Un **orden total** o **cadena** sobre un conjunto P es un orden parcial $\leq$ sobre P que satisface la **ley de dicotomía**:

$$\text{para todo } a, b \in P, \quad a \leq b \text{ ó } b \leq a.$$

Ejemplo

1. El orden $\leqslant$ sobre $\mathbb{R}$.
2. El orden **lexicográfico** de las palabras en un diccionario.

Pregunta

¿Hay un subconjunto de S de $\mathbb{R}$ tal que $(S, \leqslant)$ tenga la misma forma que $(\mathscr{P}(\{a, b\}), \subseteq)$?

Ordenes no parciales!

Un **orden total** o **cadena** sobre un conjunto P es un orden parcial $\leq$ sobre P que satisface la **ley de dicotomía**:

$$\text{para todo } a, b \in P, \quad a \leq b \ \text{ó} \ b \leq a.$$

Ejemplo

1. El orden $\leqslant$ sobre $\mathbb{R}$.
2. El orden **lexicográfico** de las palabras en un diccionario.

Pregunta

¿Hay un subconjunto de S de $\mathbb{R}$ tal que $(S, \leqslant)$ tenga la misma forma que $(\mathscr{P}(\{a, b\}), \subseteq)$? $\longrightarrow$ Actividad en Aula virtual!

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Muchísimos ejemplos

Subposets

Si (A, R) es un poset y $B \subseteq A$, entonces (B, R) también es un poset.

(Estrictamente hay que poner la *restricción de R a B* junto a B para tener un poset).
A partir de $(\mathbb{N}, |)$ obtenemos:

Ejemplo (Conjunto de divisores de n)

$D_n := \{k \in \mathbb{N} : k \mid n\}$. $(D_n, |)$ es un poset.

- $D_4 = \{1, 2, 4\}$.
- $D_8 = \{1, 2, 4, 8\}$.
- $D_9 = \{1, 3, 9\}$.

Muchísimos ejemplos

Subposets

Si (A, R) es un poset y $B \subseteq A$, entonces (B, R) también es un poset.

(Estrictamente hay que poner la *restricción de* R *a* B junto a B para tener un poset).
A partir de $(\mathbb{N}, |)$ obtenemos:

Ejemplo (Conjunto de divisores de n)

$D_n := \{k \in \mathbb{N} : k \mid n\}$. $(D_n, |)$ es un poset.

- $D_4 = \{1, 2, 4\}$.
- $D_8 = \{1, 2, 4, 8\}$.
- $D_9 = \{1, 3, 9\}$.
- $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.

Máximos, mínimos, maximales y minimales

Sea $(P, \leq)$ un poset y $b, t \in P$

Máximos, mínimos, maximales y minimales

Sea $(P, \leq)$ un poset y $b, t \in P$

- b es **mínimo** de $P \iff \forall x \in P, \quad b \leq x$.

Máximos, mínimos, maximales y minimales

Sea $(P, \leq)$ un poset y $b, t \in P$

- b es **mínimo** de $P \iff \forall x \in P, \quad b \leq x$.

b está debajo de todo.

Máximos, mínimos, maximales y minimales

Sea $(P, \leq)$ un poset y $b, t \in P$

- b es **mínimo** de $P \iff \forall x \in P, \quad b \leq x$.

  b está debajo de todo.

- t es **máximo** de $P \iff \forall x \in P, \quad x \leq t$.

Máximos, mínimos, maximales y minimales

Sea $(P, \leq)$ un poset y $b, t \in P$

- b es **mínimo** de $P \iff \forall x \in P, \quad b \leq x$.

  b está debajo de todo.

- t es **máximo** de $P \iff \forall x \in P, \quad x \leq t$.

  t está encima de todo.

Máximos, mínimos, maximales y minimales

Sea $(P, \leq)$ un poset y $b, t \in P$

- b es **mínimo** de $P \iff \forall x \in P, \quad b \leq x$.

  b está debajo de todo.

- t es **máximo** de $P \iff \forall x \in P, \quad x \leq t$.

  t está encima de todo.

- b es **minimal** en $P \iff \forall x \in P, \quad x \leq b$ implica $x = b$.

Máximos, mínimos, maximales y minimales

Sea $(P, \leq)$ un poset y $b, t \in P$

- b es **mínimo** de $P \iff \forall x \in P, \quad b \leq x$.

  b está debajo de todo.

- t es **máximo** de $P \iff \forall x \in P, \quad x \leq t$.

  t está encima de todo.

- b es **minimal** en $P \iff \forall x \in P, \quad x \leq b$ implica $x = b$.

  No hay nadie bajo b.

Máximos, mínimos, maximales y minimales

Sea $(P, \leq)$ un poset y $b, t \in P$

- b es **mínimo** de $P \iff \forall x \in P, \quad b \leq x$.

  b está debajo de todo.

- t es **máximo** de $P \iff \forall x \in P, \quad x \leq t$.

  t está encima de todo.

- b es **minimal** en $P \iff \forall x \in P, \quad x \leq b$ implica $x = b$.

  No hay nadie bajo b.

- t es **maximal** en $P \iff \forall x \in P, \quad t \leq x$ implica $t = x$.

Máximos, mínimos, maximales y minimales

Sea $(P, \leq)$ un poset y $b, t \in P$

- b es **mínimo** de $P \iff \forall x \in P, \quad b \leq x$.

  b está debajo de todo.

- t es **máximo** de $P \iff \forall x \in P, \quad x \leq t$.

  t está encima de todo.

- b es **minimal** en $P \iff \forall x \in P, \quad x \leq b$ implica $x = b$.

  No hay nadie bajo b.

- t es **maximal** en $P \iff \forall x \in P, \quad t \leq x$ implica $t = x$.

  No hay nadie encima de t.

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Máximos, mínimos, maximales y minimales

Sea $(P, \leq)$ un poset y $b, t \in P$

- b es **mínimo** de P $\iff$ $\forall x \in P, \quad b \leq x$.

  b está debajo de todo.

- t es **máximo** de P $\iff$ $\forall x \in P, \quad x \leq t$.

  t está encima de todo.

- b es **minimal** en P $\iff$ $\forall x \in P, \quad x \leq b$ implica $x = b$.

  No hay nadie bajo b.

- t es **maximal** en P $\iff$ $\forall x \in P, \quad t \leq x$ implica $t = x$.

  No hay nadie encima de t.

¿Cuáles de los siguientes tienen máximo, mínimo, maximales y/o minimales?

1. $(\mathbb{N}, \leqslant)$.
2. $([0, 1), \leqslant)$.
3. $(\{2, 4, 6, 12, 16\}, |)$.
4. $(\{2, 4, 6, 12\}, |)$.
5. $(\{\{c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}, \subseteq)$.

$\longrightarrow$ Actividad en Aula virtual!

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Supremos e ínfimos

Sea $(P, \leq)$ un poset, sea $S \subseteq P$ y sean $u, l, s, i \in P$.

Definición

1. $u \in P$ se dice **cota superior** de $S \iff \forall x \in S, \quad x \leq u$.

Supremos e ínfimos

Sea $(P, \leq)$ un poset, sea $S \subseteq P$ y sean $u, l, s, i \in P$.

Definición

1. $u \in P$ se dice **cota superior** de $S \iff \forall x \in S, \quad x \leq u$.
   u está "encima" de S.

Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Supremos e ínfimos

Sea $(P, \leq)$ un poset, sea $S \subseteq P$ y sean $u, l, s, i \in P$.

Definición

1. $u \in P$ se dice **cota superior** de $S \iff \forall x \in S, \quad x \leq u$.
   u está "encima" de S.
2. $l \in P$ se dice **cota inferior** de $S \iff \forall x \in S, \quad l \leq x$.

Supremos e ínfimos

Sea $(P, \leq)$ un poset, sea $S \subseteq P$ y sean $u, l, s, i \in P$.

Definición

1. $u \in P$ se dice **cota superior** de $S \iff \forall x \in S, \quad x \leq u$.
   u está "encima" de S.
2. $l \in P$ se dice **cota inferior** de $S \iff \forall x \in S, \quad l \leq x$.
   l está "debajo" de S.

Supremos e ínfimos

Sea $(P, \leq)$ un poset, sea $S \subseteq P$ y sean $u, l, s, i \in P$.

Definición

1. $u \in P$ se dice **cota superior** de $S \iff \forall x \in S, \quad x \leq u$.
   u está "encima" de S.
2. $l \in P$ se dice **cota inferior** de $S \iff \forall x \in S, \quad l \leq x$.
   l está "debajo" de S.
3. $s \in P$ se dice **supremo** de S si s es una cota superior de S y $\forall b \in P$, b es cota superior b de $S \implies s \leq b$.
   Escribimos "$s = \sup S$".

Supremos e ínfimos

Sea $(P, \leq)$ un poset, sea $S \subseteq P$ y sean $u, l, s, i \in P$.

Definición

1. $u \in P$ se dice **cota superior** de $S \iff \forall x \in S, \quad x \leq u$.
   u está "encima" de S.
2. $l \in P$ se dice **cota inferior** de $S \iff \forall x \in S, \quad l \leq x$.
   l está "debajo" de S.
3. $s \in P$ se dice **supremo** de S si s es una cota superior de S y $\forall b \in P$, b es cota superior b de $S \implies s \leq b$.
   Escribimos "$s = \sup S$". Es la menor cota superior.

Supremos e ínfimos

Sea $(P, \leq)$ un poset, sea $S \subseteq P$ y sean $u, l, s, i \in P$.

Definición

1. $u \in P$ se dice **cota superior** de $S \iff \forall x \in S, \quad x \leq u$.
   u está "encima" de S.
2. $l \in P$ se dice **cota inferior** de $S \iff \forall x \in S, \quad l \leq x$.
   l está "debajo" de S.
3. $s \in P$ se dice **supremo** de S si s es una cota superior de S y
   $\forall b \in P$, b es cota superior b de $S \implies s \leq b$.
   Escribimos "$s = \sup S$". Es la menor cota superior.
4. $i \in P$ se dice **ínfimo** de S si i es una cota inferior de S y
   $\forall b \in P$, b es cota inferior b de $S \implies b \leq i$.
   Escribimos "$i = \text{ínf}\, S$".

Sea $(P, \leq)$ un poset, sea $S \subseteq P$ y sean $u, l, s, i \in P$.

Definición

1. $u \in P$ se dice **cota superior** de $S \iff \forall x \in S, \quad x \leq u$.
   u está "encima" de S.
2. $l \in P$ se dice **cota inferior** de $S \iff \forall x \in S, \quad l \leq x$.
   l está "debajo" de S.
3. $s \in P$ se dice **supremo** de S si s es una cota superior de S y $\forall b \in P$, b es cota superior b de $S \implies s \leq b$.
   Escribimos "$s = \sup S$". Es la menor cota superior.
4. $i \in P$ se dice **ínfimo** de S si i es una cota inferior de S y $\forall b \in P$, b es cota inferior b de $S \implies b \leq i$.
   Escribimos "$i = \text{ínf}\, S$". Es la mayor cota inferior.

Isomorfismo de posets

Sean $(P, \leq)$, $(Q, \leq')$ dos posets, y sea $f : P \to Q$ una función.

Isomorfismo de posets

Sean $(P, \leq)$, $(Q, \leq')$ dos posets, y sea $f : P \to Q$ una función.

Definición

f es un **isomorfismo** si

- f es biyectiva y
- para todo $x, y \in P$, se cumple que

$$x \leq y \iff f(x) \leq' f(y).$$

Isomorfismo de posets

Sean $(P, \leq)$, $(Q, \leq')$ dos posets, y sea $f : P \to Q$ una función.

Definición

f es un **isomorfismo** si

- f es biyectiva y
- para todo $x, y \in P$, se cumple que

$$x \leq y \iff f(x) \leq' f(y).$$

Decimos entonces que $(P, \leq)$ y $(Q, \leq')$ son **isomorfos** y escribimos $(P, \leq) \cong (Q, \leq')$.