Introducción a la Lógica y la Computación

Mariana Badano   Héctor Gramaglia
Pedro Sánchez Terraf   Mauricio Tellechea
Guido Ivetta

FaMAF, 15 de septiembre de 2021

Contenidos estimados para hoy

1. Repaso
2. Semántica de la lógica proposicional
   - Asignaciones y valuaciones/semánticas
   - Teorema de Extensión
   - Abreviaciones: Conectivos nuevos
   - La relación de consecuencia y tautologías
   - Lema de Coincidencia
   - Tablas de verdad
3. Sustitución
   - La regla de Leibniz

Repaso

Tres componentes de la lógica

- Sintaxis: qué objetos usamos: proposiciones (= "fórmulas proposicionales", "fórmulas"), cómo se escriben.

Repaso

Tres componentes de la lógica

- Sintaxis: qué objetos usamos: proposiciones (= “fórmulas proposicionales”, “fórmulas”), cómo se escriben.
  - **Símbolos/variables proposicionales**: $\mathcal{V} := \{p_0, p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots\}$
  - **Conectivos**: $\bot, \wedge, \vee, \rightarrow$.
  - $At := \{\bot\} \cup \mathcal{V}$; $\Sigma := At \cup \{\,), (, \wedge, \vee, \rightarrow\}$; $PROP \subseteq \Sigma^*$.

Repaso

Tres componentes de la lógica

- Sintaxis: qué objetos usamos: proposiciones (= “fórmulas proposicionales”, “fórmulas”), cómo se escriben.
  - **Símbolos/variables proposicionales**: $\mathcal{V} := \{p_0, p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots\}$
  - **Conectivos**: $\bot, \wedge, \vee, \to$.
  - $At := \{\bot\} \cup \mathcal{V}$; $\Sigma := At \cup \{\,),(,\wedge,\vee,\to\}$; $\;PROP \subseteq \Sigma^*$.
- Semántica: cómo asignamos *significado* a las proposiciones: **valor de verdad**.
- Cálculo: cómo se **deducen** proposiciones a partir de otras y se obtienen **teoremas**.

Repaso

Tres componentes de la lógica

- Sintaxis: qué objetos usamos: proposiciones (= "fórmulas proposicionales", "fórmulas"), cómo se escriben.
  - **Símbolos/variables proposicionales**: $\mathcal{V} := \{p_0, p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots\}$
  - **Conectivos**: $\bot, \wedge, \vee, \rightarrow$.
  - $At := \{\bot\} \cup \mathcal{V}$; $\Sigma := At \cup \{\,),(,\wedge,\vee,\rightarrow\}$; $PROP \subseteq \Sigma^*$.
- Semántica: cómo asignamos *significado* a las proposiciones: **valor de verdad**. Ahora
- Cálculo: cómo se **deducen** proposiciones a partir de otras y se obtienen **teoremas**. Después

Repaso

Tres componentes de la lógica

- Sintaxis: qué objetos usamos: proposiciones (= "fórmulas proposicionales", "fórmulas"), cómo se escriben.
  - **Símbolos/variables proposicionales**: $\mathcal{V} := \{p_0, p_1, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots\}$
  - **Conectivos**: $\perp, \wedge, \vee, \to$.
  - $At := \{\perp\} \cup \mathcal{V}$; $\Sigma := At \cup \{\ ),(, \wedge, \vee, \to\}$; $\boxed{PROP \subseteq \Sigma^*}$.
- Semántica: cómo asignamos *significado* a las proposiciones: **valor de verdad**. Ahora
- Cálculo: cómo se **deducen** proposiciones a partir de otras y se obtienen **teoremas**.

Asignaciones y valuaciones/semánticas

Nuestras proposiciones son sólo cadenas de símbolos.

$(p_0 \wedge p_3)$

Asignaciones y valuaciones/semánticas

Nuestras proposiciones son sólo cadenas de símbolos.
Para "interpretarlas", diremos para cada símbolo proposicional en $\mathcal{V}$ si es "falso" (valor 0) o "verdadero" (valor 1).

Asignaciones y valuaciones/semánticas

Nuestras proposiciones son sólo cadenas de símbolos.
Para “interpretarlas”, diremos para cada símbolo proposicional en $\mathcal{V}$ si es “falso” (valor 0) o “verdadero” (valor 1).

Definición

Una **asignación** será una función $v : \{p_0, p_1, \dots\} \to \{0, 1\}$.

Asignaciones y valuaciones/semánticas

Nuestras proposiciones son sólo cadenas de símbolos.
Para "interpretarlas", diremos para cada símbolo proposicional en $\mathcal{V}$ si es "falso" (valor 0) o "verdadero" (valor 1).

Definición

Una **asignación** será una función $v : \{p_0, p_1, \ldots\} \to \{0, 1\}$.

Ahora podemos dar significado a todas las proposiciones.

Asignaciones y valuaciones/semánticas

Nuestras proposiciones son sólo cadenas de símbolos.
Para "interpretarlas", diremos para cada símbolo proposicional en $\mathscr{V}$ si es "falso" (valor 0) o "verdadero" (valor 1).

Definición

Una **asignación** será una función $v : \{p_0, p_1, \dots\} \to \{0, 1\}$.

letra

$\varphi \notin PROP$

Ahora podemos dar significado a todas las proposiciones.

Definición

Una función $[\![\cdot]\!] : PROP \to \{0, 1\}$ es una **semántica** o **valuación** si:

1. $[\![\bot]\!] = 0$.
2. $[\![(\varphi \wedge \psi)]\!] = \text{mín}\{[\![\varphi]\!], [\![\psi]\!]\}$.
3. $[\![(\varphi \vee \psi)]\!] = \text{máx}\{[\![\varphi]\!], [\![\psi]\!]\}$.
4. $[\![(\varphi \to \psi)]\!] = 0$ si y sólo si $[\![\varphi]\!] = 1$ y $[\![\psi]\!] = 0$.

$(\varphi \odot \psi)$

1 si y sólo si $[\![\varphi]\!] = 0$ ó $[\![\psi]\!] = 1$

Asignaciones y valuaciones/semánticas

Nuestras proposiciones son sólo cadenas de símbolos.
Para "interpretarlas", diremos para cada símbolo proposicional en $\mathcal{V}$ si es "falso" (valor 0) o "verdadero" (valor 1).

Definición

Una **asignación** será una función $v : \{p_0, p_1, \dots\} \to \{0, 1\}$.

Ahora podemos dar significado a todas las proposiciones.

Definición

Una función $[\![\cdot]\!] : PROP \to \{0, 1\}$ es una **semántica** o **valuación** si:

1. $[\![\bot]\!] = 0$. $\longleftarrow$ $\longleftarrow$ Develado el misterio de $\bot$!!
2. $[\![(\varphi \wedge \psi)]\!] = \text{mín}\{[\![\varphi]\!], [\![\psi]\!]\}$.
3. $[\![(\varphi \vee \psi)]\!] = \text{máx}\{[\![\varphi]\!], [\![\psi]\!]\}$.
4. $[\![(\varphi \to \psi)]\!] = 0$ si y sólo si $[\![\varphi]\!] = 1$ y $[\![\psi]\!] = 0$.

Extensión de asignaciones

$f : \mathcal{V} \longrightarrow \{0, 1\}$ PROP $\rightarrow \{0,1\}$

Teorema (de Extensión)

Para toda asignación f*, existe una única función semántica* $[\![\cdot]\!]_f$ *tal que* $[\![\varphi]\!]_f = f(\varphi)$ *para toda* $\varphi \in \mathcal{V}$*.*

Extensión de asignaciones

Teorema (de Extensión)

Para toda asignación f, existe una única función semántica $[\![\cdot]\!]_f$ tal que $[\![\varphi]\!]_f = f(\varphi)$ para toda $\varphi \in \mathcal{V}$.

Demostración.

Existencia: Construimos la semántica $[\![\cdot]\!]_f$ por recursión en subfórmulas.

$\boxed{\varphi \in At}$ $[\![p_n]\!]_f := f(p_n)$ para $n \in \mathbb{N}_0$ y $[\![\bot]\!]_f := 0$.

Extensión de asignaciones

Teorema (de Extensión)

Para toda asignación f, existe una única función semántica $[\![\cdot]\!]_f$ tal que $[\![\varphi]\!]_f = f(\varphi)$ para toda $\varphi \in \mathcal{V}$.

Demostración.

Existencia: Construimos la semántica $[\![\cdot]\!]_f$ por recursión en subfórmulas.

$\boxed{\varphi \in At}$ $[\![p_n]\!]_f := f(p_n)$ para $n \in \mathbb{N}_0$ y $[\![\bot]\!]_f := 0$.

$\boxed{(\varphi \wedge \psi)}$ $[\![(\varphi \wedge \psi)]\!]_f := \text{mín}\{[\![\varphi]\!]_f, [\![\psi]\!]_f\}$.

Extensión de asignaciones

Teorema (de Extensión)

Para toda asignación f, existe una única función semántica $[\![\cdot]\!]_f$ tal que $[\![\varphi]\!]_f = f(\varphi)$ para toda $\varphi \in \mathcal{V}$.

Demostración.

Existencia: Construimos la semántica $[\![\cdot]\!]_f$ por recursión en subfórmulas.

$\boxed{\varphi \in At}$ $[\![p_n]\!]_f := f(p_n)$ para $n \in \mathbb{N}_0$ y $[\![\bot]\!]_f := 0$.

$\boxed{(\varphi \wedge \psi)}$ $[\![(\varphi \wedge \psi)]\!]_f := \text{mín}\{[\![\varphi]\!]_f, [\![\psi]\!]_f\}$.

$\boxed{(\varphi \to \psi)}$ $[\![(\varphi \to \psi)]\!]_f := 0$ si $[\![\varphi]\!]_f = 1$ y $[\![\psi]\!]_f = 0$, y $[\![(\varphi \to \psi)]\!]_f := 1$ en caso contrario.

Extensión de asignaciones

Teorema (de Extensión)

Para toda asignación f, existe una única función semántica $[\![\cdot]\!]_f$ tal que $[\![\varphi]\!]_f = f(\varphi)$ para toda $\varphi \in \mathcal{V}$.

Demostración.

Existencia: Construimos la semántica $[\![\cdot]\!]_f$ por recursión en subfórmulas.

$\boxed{\varphi \in At}$ $[\![p_n]\!]_f := f(p_n)$ para $n \in \mathbb{N}_0$ y $[\![\bot]\!]_f := 0$.

$\boxed{(\varphi \wedge \psi)}$ $[\![(\varphi \wedge \psi)]\!]_f := \text{mín}\{[\![\varphi]\!]_f, [\![\psi]\!]_f\}$.

$\boxed{(\varphi \to \psi)}$ $[\![(\varphi \to \psi)]\!]_f := 0$ si $[\![\varphi]\!]_f = 1$ y $[\![\psi]\!]_f = 0$, y $[\![(\varphi \to \psi)]\!]_f := 1$ en caso contrario.

$\boxed{(\varphi \vee \psi)}$ $[\![(\varphi \vee \psi)]\!]_f := \text{máx}\{[\![\varphi]\!]_f, [\![\psi]\!]_f\}$.

Extensión de asignaciones

Teorema (de Extensión)

Para toda asignación f, existe una única función semántica $[\![\cdot]\!]_f$ tal que $[\![\varphi]\!]_f = f(\varphi)$ para toda $\varphi \in \mathcal{V}$.

Demostración.

Existencia: Construimos la semántica $[\![\cdot]\!]_f$ por recursión en subfórmulas.

$\boxed{\varphi \in At}$ $[\![p_n]\!]_f := f(p_n)$ para $n \in \mathbb{N}_0$ y $[\![\bot]\!]_f := 0$. H_{At}

$\boxed{(\varphi \wedge \psi)}$ $[\![(\varphi \wedge \psi)]\!]_f := \text{mín}\{[\![\varphi]\!]_f, [\![\psi]\!]_f\}$. $H_{\wedge}$

$\boxed{(\varphi \to \psi)}$ $[\![(\varphi \to \psi)]\!]_f := 0$ si $[\![\varphi]\!]_f = 1$ y $[\![\psi]\!]_f = 0$, y $[\![(\varphi \to \psi)]\!]_f := 1$ en caso contrario. $H_{\to}$

$\boxed{(\varphi \vee \psi)}$ $[\![(\varphi \vee \psi)]\!]_f := \text{máx}\{[\![\varphi]\!]_f, [\![\psi]\!]_f\}$. $H_{\vee}$

Extensión de asignaciones

Teorema (de Extensión)

Para toda asignación f*, existe una única función semántica* $[\![\cdot]\!]_f$ *tal que* $[\![\varphi]\!]_f = f(\varphi)$ *para toda* $\varphi \in \mathcal{V}$*.*

Demostración.

Unicidad:

Extensión de asignaciones

Teorema (de Extensión)

Para toda asignación f, existe una única función semántica $[\![\cdot]\!]_f$ tal que $[\![\varphi]\!]_f = f(\varphi)$ para toda $\varphi \in \mathcal{V}$.

Demostración.

Unicidad:

Por definición, una valuación debe cumplir con los casos inductivos de la definición recursiva anterior (las $H_\odot$).

Extensión de asignaciones

Teorema (de Extensión)

Para toda asignación f, existe una única función semántica $[\![\cdot]\!]_f$ tal que $[\![\varphi]\!]_f = f(\varphi)$ para toda $\varphi \in \mathcal{V}$.

Demostración.

Unicidad:

Por definición, una valuación debe cumplir con los casos inductivos de la definición recursiva anterior (las $H_\odot$).

Y el caso base (la H_{At}) está fijado por la hipótesis y la definición de valuación en $\perp$.

Extensión de asignaciones

Teorema (de Extensión)

Para toda asignación f, existe una única función semántica $[\![\cdot]\!]_f$ tal que $[\![\varphi]\!]_f = f(\varphi)$ para toda $\varphi \in \mathcal{V}$.

Demostración.

Unicidad:

Por definición, una valuación debe cumplir con los casos inductivos de la definición recursiva anterior (las $H_\odot$).

Y el caso base (la H_{At}) está fijado por la hipótesis y la definición de valuación en $\bot$.

Luego el Teorema de Recursión nos dice que hay a lo sumo una función que satisface todo esto.

Extensión de asignaciones

Teorema (de Extensión)

Para toda asignación f*, existe una única función semántica* $[\![\cdot]\!]_f$ *tal que* $[\![\varphi]\!]_f = f(\varphi)$ *para toda* $\varphi \in \mathcal{V}$*.*

Extensión de asignaciones

Teorema (de Extensión)

Para toda asignación f, existe una única función semántica $[\![\cdot]\!]_f$ tal que $[\![\varphi]\!]_f = f(\varphi)$ para toda $\varphi \in \mathcal{V}$.

Corolario

$[\![\varphi]\!]_1 = [\![\varphi]\!]_2$ *para toda* $\varphi \in At \implies [\![\varphi]\!]_1 = [\![\varphi]\!]_2$ *para toda* $\varphi \in PROP$.

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Extensión de asignaciones

Teorema (de Extensión)

Para toda asignación f, existe una única función semántica $[\![\cdot]\!]_f$ tal que $[\![\varphi]\!]_f = f(\varphi)$ para toda $\varphi \in \mathcal{V}$.

Corolario

$[\![\varphi]\!]_1 = [\![\varphi]\!]_2$ *para toda* $\varphi \in At \implies [\![\varphi]\!]_1 = [\![\varphi]\!]_2$ *para toda* $\varphi \in PROP$.

Demostración.

Por la unicidad en el Teorema de Extensión

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Extensión de asignaciones

Teorema (de Extensión)

Para toda asignación f*, existe una única función semántica* $[\![\cdot]\!]_f$ *tal que* $[\![\varphi]\!]_f = f(\varphi)$ *para toda* $\varphi \in \mathcal{V}$*.*

Corolario

$[\![\varphi]\!]_1 = [\![\varphi]\!]_2$ *para toda* $\varphi \in At \implies [\![\varphi]\!]_1 = [\![\varphi]\!]_2$ *para toda* $\varphi \in PROP$*.*

Demostración.

Por la unicidad en el Teorema de Extensión: ambas valuaciones son extensiones de la misma asignación $[\![\cdot]\!]_1 \upharpoonright \mathcal{V} = [\![\cdot]\!]_2 \upharpoonright \mathcal{V}$.

$[\![\cdot]\!]_1$ extiende

extiende $[\![\cdot]\!]_2$

Conectivos nuevos

Introducimos nueva notación. $\wedge \quad \vee \quad \longrightarrow$

Conectivos nuevos

Introducimos nueva notación.

Abreviaturas

- $(\neg\varphi)$ denotará $(\varphi \to \bot)$.
- $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ denotará $((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi))$.

Conectivos nuevos

$(\neg\varphi) := (\cancel{\varphi \wedge \bot})$???

Introducimos nueva notación.

Abreviaturas

- $(\neg\varphi)$ denotará $(\varphi \to \bot)$.
- $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ denotará $((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi))$.

Ejercicio

Para toda valuación $[\![\cdot]\!]$: $PROP \to \{0,1\}$

1. $[\![(\neg\varphi)]\!] = 1 - [\![\varphi]\!]$.
2. $[\![(\varphi \leftrightarrow \psi)]\!] = 1 \iff [\![\varphi]\!] = [\![\psi]\!]$.

Sea $\Gamma \subseteq PROP$ y v una asignación.

$$v: \left.\begin{array}{l} p_0 \longmapsto 0 \\ p_1 \longmapsto 0 \\ p_2 \longmapsto 1 \\ p_3 \longmapsto 0 \\ \ldots \end{array}\right\} \rightsquigarrow \llbracket\ \rrbracket_v$$

$(p_0 \wedge p_1) \longmapsto 0$

$(p_0 \vee p_2) \longmapsto 1$

$\vdots$

$((p_0 \wedge p_1) \longrightarrow p_1)$

La relación de consecuencia y tautologías

Sea $\Gamma \subseteq PROP$ y v una asignación.

$\Gamma = \{ p_0, (p_2 \vee p_3) \}$

Definición

- v **valida** $\Gamma \iff$ para toda $\psi \in \Gamma$, $[\![\psi]\!]_v = 1$.

$[\![\ ]\!]_v$

$$\begin{cases} v(p_0) = 1 \\ v(p_2) = 0 \\ v(p_3) = 1 \end{cases}$$

$[\![p_0]\!]_v = v(p_0) = 1$

$[\![(p_2 \vee p_3)]\!]_v = max\{[\![p_2]\!]_v, [\![p_3]\!]_v\} = 1$

1

" $[\![\Gamma]\!]_v = 1$ "

La relación de consecuencia y tautologías

Sea $\Gamma \subseteq PROP$ y v una asignación.

Definición

- v **valida** $\Gamma \iff$ para toda $\psi \in \Gamma$, $[\![\psi]\!]_v = 1$. (**notación**: $[\![\Gamma]\!]_v = 1$)

La relación de consecuencia y tautologías

Sea $\Gamma \subseteq PROP$ y v una asignación.

Definición

- v **valida** $\Gamma \iff$ para toda $\psi \in \Gamma$, $[\![\psi]\!]_v = 1$. (**notación**: $[\![\Gamma]\!]_v = 1$)
- φ es **consecuencia** de $\Gamma \iff$ toda asignación v que valida Γ hace verdadera a φ:

$$[\![\Gamma]\!]_v = 1 \implies [\![\varphi]\!]_v = 1$$

La relación de consecuencia y tautologías

Sea $\Gamma \subseteq PROP$ y v una asignación.

Definición

- v **valida** $\Gamma \iff$ para toda $\psi \in \Gamma$, $[\![\psi]\!]_v = 1$. (**notación**: $[\![\Gamma]\!]_v = 1$)
- φ es **consecuencia** de $\Gamma \iff$ toda asignación v que valida Γ hace verdadera a φ:

$$[\![\Gamma]\!]_v = 1 \implies [\![\varphi]\!]_v = 1$$

$1 = [\![(p_2 \vee p_3)]\!]_v$

(**notación**: $\Gamma \models \varphi$)

$\Gamma := \{p_0, (p_2 \vee p_3)\}$.

$\Gamma \models (p_0 \vee p_3)$, $\Gamma \models ((p_0 \wedge p_2) \vee p_3)$

Sup. v valida Γ $[\![\Gamma]\!]_v = 1$. Ver $[\![\varphi]\!]_v = 1$:

$[\![((p_0 \wedge p_2) \vee p_3)]\!]_v = \max\{[\![(p_0 \wedge p_2)]\!]_v, [\![p_3]\!]_v\} =$

$= \max\{\min\{[\![p_0]\!]_v, [\![p_2]\!]_v\}, [\![p_3]\!]_v\} = \max\{[\![p_2]\!], [\![p_3]\!]_v\}$

La relación de consecuencia y tautologías

Sea $\Gamma \subseteq PROP$ y v una asignación.

Definición

- v **valida** $\Gamma \iff$ para toda $\psi \in \Gamma$, $[\![\psi]\!]_v = 1$. (**notación**: $[\![\Gamma]\!]_v = 1$)
- φ es **consecuencia** de $\Gamma \iff$ toda asignación v que valida Γ hace verdadera a φ:

$$[\![\Gamma]\!]_v = 1 \implies [\![\varphi]\!]_v = 1$$

  (**notación**: $\Gamma \models \varphi$)
- φ es una **tautología** $\iff [\![\varphi]\!]_v = 1$ para toda asignación v.

La relación de consecuencia y tautologías

Sea $\Gamma \subseteq PROP$ y v una asignación.

Definición

- v **valida** $\Gamma \iff$ para toda $\psi \in \Gamma$, $[\![\psi]\!]_v = 1$. (**notación**: $[\![\Gamma]\!]_v = 1$)
- φ es **consecuencia** de $\Gamma \iff$ toda asignación v que valida Γ hace verdadera a φ:

$$[\![\Gamma]\!]_v = 1 \implies [\![\varphi]\!]_v = 1$$

  (**notación**: $\Gamma \models \varphi$)
- φ es una **tautología** $\iff [\![\varphi]\!]_v = 1$ para toda asignación v. (**notación**: $\models \varphi$)

La relación de consecuencia y tautologías

Sea $\Gamma \subseteq PROP$ y v una asignación.

Definición

- v **valida** $\Gamma \iff$ para toda $\psi \in \Gamma$, $[\![\psi]\!]_v = 1$. (**notación**: $[\![\Gamma]\!]_v = 1$)
- φ es **consecuencia** de $\Gamma \iff$ toda asignación v que valida Γ hace verdadera a φ:

  $$[\![\Gamma]\!]_v = 1 \implies [\![\varphi]\!]_v = 1$$

  (**notación**: $\Gamma \models \varphi$)
- φ es una **tautología** $\iff$ $[\![\varphi]\!]_v = 1$ para toda asignación v.
  (**notación**: $\models \varphi$)

Ejercicio

$\models \varphi \iff \emptyset \models \varphi$.

$(y \models ((\neg(\neg\varphi)) \to \varphi))$

Ejemplos

1. $\models (\varphi \to \varphi)$.

Ejemplos

1. $\models (\varphi \to \varphi)$.
   Tenemos que ver que para toda asignación v, $[\![(\varphi \to \varphi)]\!]_v = 1$.

Ejemplos

1. $\models (\varphi \to \varphi)$.
   Tenemos que ver que para toda asignación v, $[\![(\varphi \to \varphi)]\!]_v = 1$.
   Equivalentemente, $[\![(\varphi \to \varphi)]\!]_v \neq 0$.

$[\![(\varphi \to \varphi)]\!]_v \neq 0$ sii no$([\![\varphi]\!]_v = 1$ y $[\![\varphi]\!]_v = 0)$

sii no(falso!)

sii Verdadero.

Ejemplos

1. $\models (\varphi \to \varphi)$.
   Tenemos que ver que para toda asignación v, $[\![(\varphi \to \varphi)]\!]_v = 1$.
   Equivalentemente, $[\![(\varphi \to \varphi)]\!]_v \neq 0$.
2. $\models ((\neg(\neg\varphi)) \to \varphi)$ (Ejercicio).

Ejemplos

1. $\models (\varphi \to \varphi)$.
   Tenemos que ver que para toda asignación v, $[\![(\varphi \to \varphi)]\!]_v = 1$.
   Equivalentemente, $[\![(\varphi \to \varphi)]\!]_v \neq 0$.
2. $\models ((\neg(\neg\varphi)) \to \varphi)$ (Ejercicio).
3. $\{\varphi, (\varphi \to \psi)\} \models \psi$.

Ejemplos

1. $\models (\varphi \to \varphi)$.
   Tenemos que ver que para toda asignación v, $[\![(\varphi \to \varphi)]\!]_v = 1$.
   Equivalentemente, $[\![(\varphi \to \varphi)]\!]_v \neq 0$.
2. $\models ((\neg(\neg\varphi)) \to \varphi)$ (Ejercicio).
3. $\{\varphi, (\varphi \to \psi)\} \models \psi$.
   Debemos ver que si v valida $\{\varphi, (\varphi \to \psi)\}$, entonces $[\![\psi]\!]_v = 1$

Ejemplos

1. $\models (\varphi \to \varphi)$.
   Tenemos que ver que para toda asignación v, $[\![(\varphi \to \varphi)]\!]_v = 1$.
   Equivalentemente, $[\![(\varphi \to \varphi)]\!]_v \neq 0$.
2. $\models ((\neg(\neg\varphi)) \to \varphi)$ (Ejercicio).
3. $\{\varphi, (\varphi \to \psi)\} \models \psi$.
   Debemos ver que si v valida $\{\varphi, (\varphi \to \psi)\}$, entonces $[\![\psi]\!]_v = 1$:

$$[\![\varphi]\!]_v = [\![(\varphi \to \psi)]\!]_v = 1 \implies [\![\psi]\!]_v = 1.$$

Por el absurdo: $[\![\psi]\!]_v = 0$. Luego tenemos:
$([\![\varphi]\!]_v = 1$ y $[\![\psi]\!]_v = 0)$ sii $[\![(\varphi \to \psi)]\!]_v = 0$
sii Absurdo.

1. $\models (\varphi \to \varphi)$.
   Tenemos que ver que para toda asignación v, $[\![(\varphi \to \varphi)]\!]_v = 1$.
   Equivalentemente, $[\![(\varphi \to \varphi)]\!]_v \neq 0$.
2. $\models ((\neg(\neg\varphi)) \to \varphi)$ (Ejercicio).
3. $\{\varphi, (\varphi \to \psi)\} \models \psi$.
   Debemos ver que si v valida $\{\varphi, (\varphi \to \psi)\}$, entonces $[\![\psi]\!]_v = 1$:

$$[\![\varphi]\!]_v = [\![(\varphi \to \psi)]\!]_v = 1 \implies [\![\psi]\!]_v = 1.$$

4. $\not\models p_1$

$\not\models \varphi \Leftrightarrow \exists v \; [\![\varphi]\!]_v \neq 1$

$\not\models \varphi \Leftrightarrow \exists v \; [\![\varphi]\!]_v = 0$

Ejemplos

1. $\models (\varphi \to \varphi)$.
   Tenemos que ver que para toda asignación v, $[\![(\varphi \to \varphi)]\!]_v = 1$.
   Equivalentemente, $[\![(\varphi \to \varphi)]\!]_v \neq 0$.
2. $\models ((\neg(\neg\varphi)) \to \varphi)$ (Ejercicio).
3. $\{\varphi, (\varphi \to \psi)\} \models \psi$.
   Debemos ver que si v valida $\{\varphi, (\varphi \to \psi)\}$, entonces $[\![\psi]\!]_v = 1$:

$$[\![\varphi]\!]_v = [\![(\varphi \to \psi)]\!]_v = 1 \implies [\![\psi]\!]_v = 1.$$

4. $\not\models p_1$
   Sale negando la definición

Ejemplos

1. $\models (\varphi \to \varphi)$.
   Tenemos que ver que para toda asignación v, $[\![(\varphi \to \varphi)]\!]_v = 1$.
   Equivalentemente, $[\![(\varphi \to \varphi)]\!]_v \neq 0$.
2. $\models ((\neg(\neg\varphi)) \to \varphi)$ (Ejercicio).
3. $\{\varphi, (\varphi \to \psi)\} \models \psi$.
   Debemos ver que si v valida $\{\varphi, (\varphi \to \psi)\}$, entonces $[\![\psi]\!]_v = 1$:

$$[\![\varphi]\!]_v = [\![(\varphi \to \psi)]\!]_v = 1 \implies [\![\psi]\!]_v = 1.$$

$v : \mathcal{V} \longrightarrow \{0, 1\}$

4. $\not\models p_1$
   Sale negando la definición:
   p_1 no es una tautología $\iff$ existe alguna v tal que $[\![p_1]\!]_v = 0$.

$v : \mathcal{V} \longrightarrow \{0, 1\}$ $\quad v(p_n) = 0 \quad \forall n$

$[\![p_1]\!]_v := v(p_1) = 0$

Lema de Coincidencia

La verdad de una proposición se determina localmente.

Lema de Coincidencia

La verdad de una proposición se determina localmente.

Lema (de Coincidencia)

Si $v(p_i) = v'(p_i)$ *para todos los* p_i *que ocurran en* φ, *entonces* $[\![\varphi]\!]_v = [\![\varphi]\!]_{v'}$.

Lema de Coincidencia

HI: $P(n) \Rightarrow Q(n)$

Concl: $P(n+1) \Rightarrow Q(n+1)$ HI $P' \Rightarrow Q'$

Concl $P \Rightarrow Q$

La verdad de una proposición se determina localmente.

Lema (de Coincidencia)

Si $v(p_i) = v'(p_i)$ *para todos los* p_i *que ocurran en* φ*, entonces* $[\![\varphi]\!]_v = [\![\varphi]\!]_{v'}$.

Demostración.

$\boxed{\varphi \in At}$ Si $\varphi = p_n$, sólo ocurre p_n en φ.

Lema de Coincidencia

La verdad de una proposición se determina localmente.

Lema (de Coincidencia)

Si $v(p_i) = v'(p_i)$ para todos los p_i que ocurran en φ, entonces $[\![\varphi]\!]_v = [\![\varphi]\!]_{v'}$.

Demostración.

Antecedente

$\boxed{\varphi \in At}$ Si $\varphi = p_n$, sólo ocurre p_n en φ. Luego $[\![\varphi]\!]_v = v(\varphi) = v'(\varphi) = [\![\varphi]\!]_{v'}$.

def valuación

extensión.

Lema de Coincidencia

La verdad de una proposición se determina localmente.

Lema (de Coincidencia)

Si $v(p_i) = v'(p_i)$ para todos los p_i que ocurran en φ, entonces $[\![\varphi]\!]_v = [\![\varphi]\!]_{v'}$.

Demostración.

$\boxed{\varphi \in At}$ Si $\varphi = p_n$, sólo ocurre p_n en φ. Luego $[\![\varphi]\!]_v = v(\varphi) = v'(\varphi) = [\![\varphi]\!]_{v'}$. Además, $[\![\bot]\!]_v = [\![\bot]\!]_{v'} = 0$ siempre.

Lema de Coincidencia

La verdad de una proposición se determina localmente.

Lema (de Coincidencia)

Si $v(p_i) = v'(p_i)$ para todos los p_i que ocurran en φ, entonces $[\![\varphi]\!]_v = [\![\varphi]\!]_{v'}$.

Demostración.

$\boxed{\varphi \in At}$ Si $\varphi = p_n$, sólo ocurre p_n en φ. Luego $[\![\varphi]\!]_v = v(\varphi) = v'(\varphi) = [\![\varphi]\!]_{v'}$. Además, $[\![\bot]\!]_v = [\![\bot]\!]_{v'} = 0$ siempre.

$\boxed{(\varphi \wedge \psi)}$ Supongamos que v y v' coinciden en las variables de $(\varphi \wedge \psi)$

Lema de Coincidencia

La verdad de una proposición se determina localmente.

Lema (de Coincidencia)

Si $v(p_i) = v'(p_i)$ *para todos los* p_i *que ocurran en* φ*, entonces* $[\![\varphi]\!]_v = [\![\varphi]\!]_{v'}$.

Demostración.

$\boxed{\varphi \in At}$ Si $\varphi = p_n$, sólo ocurre p_n en φ. Luego $[\![\varphi]\!]_v = v(\varphi) = v'(\varphi) = [\![\varphi]\!]_{v'}$. Además, $[\![\bot]\!]_v = [\![\bot]\!]_{v'} = 0$ siempre.

$\boxed{(\varphi \wedge \psi)}$ Supongamos que v y v' coinciden en las variables de $(\varphi \wedge \psi)$

Probamos que $[\![(\varphi \wedge \psi)]\!]_v = [\![(\varphi \wedge \psi)]\!]_{v'}$.

HI: • "si v, v' coinciden ... φ entonces $[\![\varphi]\!]_v = [\![\varphi]\!]_{v'}$"

• "si v, v' coinciden – ψ entonces $[\![\psi]\!]_v = [\![\psi]\!]_{v'}$"

$[\![(\varphi \wedge \psi)]\!]_v = \min\{[\![\varphi]\!]_v, [\![\psi]\!]_v\} = \min\{[\![\varphi]\!]_{v'}, [\![\psi]\!]_{v'}\} = \ldots$

Lema de Coincidencia

La verdad de una proposición se determina localmente.

Lema (de Coincidencia)

Si $v(p_i) = v'(p_i)$ *para todos los* p_i *que ocurran en* φ*, entonces* $[\![\varphi]\!]_v = [\![\varphi]\!]_{v'}$.

Demostración.

$\boxed{\varphi \in At}$ Si $\varphi = p_n$, sólo ocurre p_n en φ. Luego $[\![\varphi]\!]_v = v(\varphi) = v'(\varphi) = [\![\varphi]\!]_{v'}$. Además, $[\![\bot]\!]_v = [\![\bot]\!]_{v'} = 0$ siempre.

$\boxed{(\varphi \wedge \psi)}$ Supongamos que v y v' coinciden en las variables de $(\varphi \wedge \psi)$

Probamos que $[\![(\varphi \wedge \psi)]\!]_v = [\![(\varphi \wedge \psi)]\!]_{v'}$.

$\boxed{(\varphi \odot \psi)}$ El resto de los casos queda como ejercicio.

Tablas de verdad

Recordemos que una asignación es una función de $\mathcal{V} = \{p_0, p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots\}$ en $\{0, 1\}$.

Tablas de verdad

Recordemos que una asignación es una función de $\mathcal{V} = \{p_0, p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots\}$ en $\{0, 1\}$.

Pregunta

¿Cuántas asignaciones posibles hay?

Tablas de verdad

Recordemos que una asignación es una función de $\mathcal{V} = \{p_0, p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots\}$ en $\{0, 1\}$.

Pregunta

¿Cuántas asignaciones posibles hay? $\longrightarrow$ Actividad en Aula virtual!

Tablas de verdad

Recordemos que una asignación es una función de $\mathcal{V} = \{p_0, p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots\}$ en $\{0, 1\}$.

Pregunta

¿Cuántas asignaciones posibles hay? $\longrightarrow$ Actividad en Aula virtual!

Demasiadas.

Tablas de verdad

Recordemos que una asignación es una función de
$\mathcal{V} = \{p_0, p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots\}$ en $\{0, 1\}$.

Pregunta

¿Cuántas asignaciones posibles hay? $\longrightarrow$ Actividad en Aula virtual!

Demasiadas.
¿Hay que chequear todas para saber si $\models ((p_0 \wedge p_2) \rightarrow p_2)$?

Tablas de verdad

Recordemos que una asignación es una función de
$\mathcal{V} = \{p_0, p_1, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots\}$ en $\{0, 1\}$.

Pregunta

¿Cuántas asignaciones posibles hay? $\longrightarrow$ Actividad en Aula virtual!

Demasiadas.
¿Hay que chequear todas para saber si $\models ((p_0 \wedge p_2) \rightarrow p_2)$?
Por el Lema de Coincidencia, no.

Tablas de verdad

	p_0	p_1	p_2	p_3	$\dots$
v_1	1	0	1	1	$\dots$

Tablas de verdad

	p_0	p_1	p_2	p_3	$\dots$
v_1	1	0	1	1	$\dots$
v_2	1	1	0	1	$\dots$

Tablas de verdad

	p_0	p_1	p_2	p_3	$\dots$
v_1	1	0	1	1	$\dots$
v_2	1	1	0	1	$\dots$
v_3	1	0	1	0	$\dots$

Tablas de verdad

	p_0	p_1	p_2	p_3	$\dots$
v_1	1	0	1	1	$\dots$
v_2	1	1	0	1	$\dots$
v_3	1	0	1	0	$\dots$
v_4	0	0	1	1	$\dots$

Tablas de verdad

	p_0	p_1	p_2	p_3	$\dots$
v_1	1	0	1	1	$\dots$
v_2	1	1	0	1	$\dots$
v_3	1	0	1	0	$\dots$
v_4	0	0	1	1	$\dots$
v_5	0	1	0	0	$\dots$

Tablas de verdad

	p_0	p_1	p_2	p_3	$\dots$
v_1	1	0	1	1	$\dots$
v_2	1	1	0	1	$\dots$
v_3	1	0	1	0	$\dots$
v_4	0	0	1	1	$\dots$
v_5	0	1	0	0	$\dots$
$\vdots$			$\vdots$		$\ddots$

Tablas de verdad

	p_0	p_1	p_2	p_3	$\dots$	$(p_0 \wedge p_2)$	$((p_0 \wedge p_2) \rightarrow p_2)$
v_1	1	0	1	1	$\dots$		
v_2	1	1	0	1	$\dots$		
v_3	1	0	1	0	$\dots$		
v_4	0	0	1	1	$\dots$		
v_5	0	1	0	0	$\dots$		
$\vdots$			$\vdots$		$\ddots$		

Tablas de verdad

	p_0	p_1	p_2	p_3	$\ldots$	$(p_0 \wedge p_2)$	$((p_0 \wedge p_2) \rightarrow p_2)$
v_1	1	0	1	1	$\ldots$	1	1
v_2	1	1	0	1	$\ldots$		
v_3	1	0	1	0	$\ldots$		
v_4	0	0	1	1	$\ldots$		
v_5	0	1	0	0	$\ldots$		
$\vdots$			$\vdots$		$\ddots$		

Tablas de verdad

	p_0	p_1	p_2	p_3	$\dots$	$(p_0 \wedge p_2)$	$((p_0 \wedge p_2) \to p_2)$
v_1	1	0	1	1	$\dots$	1	1
v_2	1	1	0	1	$\dots$	0	1
v_3	1	0	1	0	$\dots$		
v_4	0	0	1	1	$\dots$		
v_5	0	1	0	0	$\dots$		
$\vdots$			$\vdots$		$\ddots$		

Tablas de verdad

	p_0	p_1	p_2	p_3	$\dots$	$(p_0 \wedge p_2)$	$((p_0 \wedge p_2) \to p_2)$
v_1	1	0	1	1	$\dots$	1	1
v_2	1	1	0	1	$\dots$	0	1
v_3	1	0	1	0	$\dots$	1	1
v_4	0	0	1	1	$\dots$		
v_5	0	1	0	0	$\dots$		
$\vdots$			$\vdots$		$\ddots$		

Tablas de verdad

	p_0	p_1	p_2	p_3	$\dots$	$(p_0 \wedge p_2)$	$((p_0 \wedge p_2) \rightarrow p_2)$
v_1	1	0	1	1	$\dots$	1	1
v_2	1	1	0	1	$\dots$	0	1
v_3	1	0	1	0	$\dots$	1	1
v_4	0	0	1	1	$\dots$	0	1
v_5	0	1	0	0	$\dots$		
$\vdots$			$\vdots$		$\ddots$		

Tablas de verdad

	p_0	p_1	p_2	p_3	$\dots$	$(p_0 \wedge p_2)$	$((p_0 \wedge p_2) \rightarrow p_2)$
v_1	1	0	1	1	$\dots$	1	1
v_2	1	1	0	1	$\dots$	0	1
v_3	1	0	1	0	$\dots$	1	1
v_4	0	0	1	1	$\dots$	0	1
v_5	0	1	0	0	$\dots$	0	1
$\vdots$			$\vdots$		$\ddots$		

Tablas de verdad

	p_0	p_1	p_2	p_3	$\dots$	$(p_0 \wedge p_2)$	$((p_0 \wedge p_2) \to p_2)$
v_1	1	0	1	1	$\dots$	1	1
v_2	1	1	0	1	$\dots$	0	1
v_3	1	0	1	0	$\dots$	1	1
v_4	0	0	1	1	$\dots$	0	1
v_5	0	1	0	0	$\dots$	0	1
$\vdots$			$\vdots$		$\ddots$		

Tablas de verdad

	p_0	p_1	p_2	p_3	$\dots$	$(p_0 \wedge p_2)$	$((p_0 \wedge p_2) \to p_2)$
v_1	1	0	1	1	$\dots$	1	1
v_2	1	1	0	1	$\dots$	0	1
v_3	1	0	1	0	$\dots$	1	1
v_4	0	0	1	1	$\dots$	0	1
v_5	0	1	0	0	$\dots$	0	1
$\vdots$			$\vdots$		$\ddots$		

Tablas de verdad

	p_0	p_2	$(p_0 \wedge p_2)$	$((p_0 \wedge p_2) \to p_2)$
v_1	1	1	1	1
v_2	1	0	0	1
v_4	0	1	0	1
v_5	0	0	0	1

Sustitución

Definición

$\varphi[\psi/p]$:= **sustitución** del símbolo proposicional p **por** la proposición ψ **en** φ:

"φ, con ψ en lugar de p"

Sustitución

Definición

$\varphi[\psi/p]$:= **sustitución** del símbolo proposicional p **por** la proposición ψ **en** φ:

$\boxed{\varphi \in At}$ Si $\varphi = p$ entonces $\varphi[\psi/p] := \psi$.

$p[\psi/p] = \psi$

Sustitución

Definición

$\varphi[\psi/p]$:= **sustitución** del símbolo proposicional p **por** la proposición ψ **en** φ:

$\boxed{\varphi \in At}$ Si $\varphi = p$ entonces $\varphi[\psi/p] := \psi$. Caso contrario, $\varphi[\psi/p] := \varphi$.

$$p_0[\psi/p_3] = p_0$$

Sustitución

Definición

$\varphi[\psi/p]$:= **sustitución** del símbolo proposicional p **por** la proposición ψ **en** φ:

$\boxed{\varphi \in At}$ Si $\varphi = p$ entonces $\varphi[\psi/p] := \psi$. Caso contrario, $\varphi[\psi/p] := \varphi$.

$\boxed{(\varphi \odot \chi)}$ $(\varphi \odot \chi)[\psi/p] := (\varphi[\psi/p] \odot \chi[\psi/p])$.

Sustitución

Definición

$\varphi[\psi/p]$:= **sustitución** del símbolo proposicional p **por** la proposición ψ **en** φ:

$\boxed{\varphi \in At}$ Si $\varphi = p$ entonces $\varphi[\psi/p] := \psi$. Caso contrario, $\varphi[\psi/p] := \varphi$.

$\boxed{(\varphi \odot \chi)}$ $(\varphi \odot \chi)[\psi/p] := (\varphi[\psi/p] \odot \chi[\psi/p])$.

Ejemplo

- $p_1[(p_1 \wedge p_2)/p_3] = p_1$.

Sustitución

Definición

$\varphi[\psi/p]$:= **sustitución** del símbolo proposicional p **por** la proposición ψ **en** φ:

$\boxed{\varphi \in At}$ Si $\varphi = p$ entonces $\varphi[\psi/p] := \psi$. Caso contrario, $\varphi[\psi/p] := \varphi$.

$\boxed{(\varphi \odot \chi)}$ $(\varphi \odot \chi)[\psi/p] := (\varphi[\psi/p] \odot \chi[\psi/p])$.

Ejemplo

- $p_1[(p_1 \wedge p_2)/p_3] = p_1$.
- $p_1[(p_1 \wedge p_2)/p_1] = (p_1 \wedge p_2)$.

Sustitución

Definición

$\varphi[\psi/p]$:= **sustitución** del símbolo proposicional p **por** la proposición ψ **en** φ:

$\boxed{\varphi \in At}$ Si $\varphi = p$ entonces $\varphi[\psi/p] := \psi$. Caso contrario, $\varphi[\psi/p] := \varphi$.

$\boxed{(\varphi \odot \chi)}$ $(\varphi \odot \chi)[\psi/p] := (\varphi[\psi/p] \odot \chi[\psi/p])$.

Ejemplo

- $p_1[(p_1 \wedge p_2)/p_3] = p_1$.
- $p_1[(p_1 \wedge p_2)/p_1] = (p_1 \wedge p_2)$.

Sustitución

Definición

$\varphi[\psi/p]$:= **sustitución** del símbolo proposicional p **por** la proposición ψ **en** φ:

$\boxed{\varphi \in At}$ Si $\varphi = p$ entonces $\varphi[\psi/p] := \psi$. Caso contrario, $\varphi[\psi/p] := \varphi$.

$\boxed{(\varphi \odot \chi)}$ $(\varphi \odot \chi)[\psi/p] := (\varphi[\psi/p] \odot \chi[\psi/p])$.

Ejemplo

- $p_1[(p_1 \wedge p_2)/p_3] = p_1$.
- $p_1[(p_1 \wedge p_2)/p_1] = (p_1 \wedge p_2)$.
- $(p_1 \wedge p_2)[(p_3 \wedge p_4)/p_1] = ((p_3 \wedge p_4) \wedge p_2)$.

Sustitución

Definición

$\varphi[\psi/p]$:= **sustitución** del símbolo proposicional p **por** la proposición ψ **en** φ:

$\boxed{\varphi \in At}$ Si $\varphi = p$ entonces $\varphi[\psi/p] := \psi$. Caso contrario, $\varphi[\psi/p] := \varphi$.

$\boxed{(\varphi \odot \chi)}$ $(\varphi \odot \chi)[\psi/p] := (\varphi[\psi/p] \odot \chi[\psi/p])$.

Ejemplo

- $p_1[(p_1 \wedge p_2)/p_3] = p_1$.
- $p_1[(p_1 \wedge p_2)/p_1] = (p_1 \wedge p_2)$.
- $(p_1 \wedge p_2)[(p_3 \wedge p_4)/p_1] = ((p_3 \wedge p_4) \wedge p_2)$.

Sustitución

Definición

$\varphi[\psi/p]$:= **sustitución** del símbolo proposicional p **por** la proposición ψ **en** φ:

$\boxed{\varphi \in At}$ Si $\varphi = p$ entonces $\varphi[\psi/p] := \psi$. Caso contrario, $\varphi[\psi/p] := \varphi$.

$\boxed{(\varphi \odot \chi)}$ $(\varphi \odot \chi)[\psi/p] := (\varphi[\psi/p] \odot \chi[\psi/p])$.

Ejemplo

- $p_1[(p_1 \wedge p_2)/p_3] = p_1$.
- $p_1[(p_1 \wedge p_2)/p_1] = (p_1 \wedge p_2)$.
- $(p_1 \wedge p_2)[(p_3 \wedge p_4)/p_1] = ((p_3 \wedge p_4) \wedge p_2)$.

Ejercicio

1. $(\neg\varphi)[\psi/p] = (\neg\varphi[\psi/p])$
2. $(\varphi \leftrightarrow \chi)[\psi/p] = (\varphi[\psi/p] \leftrightarrow \chi[\psi/p])$.

La regla de Leibnitz

$$\boxed{\varphi \in At} \;\; p[\psi/p] := \psi. \qquad \varphi \neq p \implies \varphi[\psi/p] = \varphi.$$

$$\boxed{(\varphi \odot \chi)} \;\; (\varphi \odot \chi)[\psi/p] := (\varphi[\psi/p] \odot \chi[\psi/p]).$$

La regla de Leibnitz

$\boxed{\varphi \in At}$ $p[\psi/p] := \psi$. $\quad \varphi \neq p \implies \varphi[\psi/p] = \varphi$.

$\boxed{(\varphi \odot \chi)}$ $(\varphi \odot \chi)[\psi/p] := (\varphi[\psi/p] \odot \chi[\psi/p])$.

Teorema (Regla de Leibnitz)

Si $\models \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$ *entonces* $\models \psi[\varphi_1/p] \leftrightarrow \psi[\varphi_2/p]$.

$\forall v \quad [\![\varphi_1]\!]_v = [\![\varphi_2]\!]_v$

$\psi \Rightarrow \forall v \ldots$

p

$\psi[\varphi_1/p] \qquad \psi[\varphi_2/p]$

$\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

La regla de Leibnitz

$\boxed{\varphi \in At}$ $p[\psi/p] := \psi$. $\varphi \neq p \implies \varphi[\psi/p] = \varphi$.

$\boxed{(\varphi \odot \chi)}$ $(\varphi \odot \chi)[\psi/p] := (\varphi[\psi/p] \odot \chi[\psi/p])$.

Teorema (Regla de Leibnitz)

Si $\models \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$ *entonces* $\models \psi[\varphi_1/p] \leftrightarrow \psi[\varphi_2/p]$.

Lema

$[\![\varphi_1]\!] = [\![\varphi_2]\!]$ *implica* $[\![\psi[\varphi_1/p]]\!] = [\![\psi[\varphi_2/p]]\!]$.

$\psi \in AT$: Caso : $\psi = p$.

$[\![\psi[\varphi_1/p]]\!] = [\![\varphi_1]\!] = [\![\varphi_2]\!] = [\![\psi[\varphi_2/p]]\!]$ ✓

$\psi \neq p$ $[\![\psi[\varphi_1/p]]\!] = [\![\psi]\!] = [\![\psi[\varphi_2/p]]\!]$ ✓

La regla de Leibnitz

$$\boxed{\varphi \in At} \quad p[\psi/p] := \psi. \qquad \varphi \neq p \implies \varphi[\psi/p] = \varphi.$$

$$\boxed{(\varphi \odot \chi)} \quad (\varphi \odot \chi)[\psi/p] := (\varphi[\psi/p] \odot \chi[\psi/p]).$$

Teorema (Regla de Leibnitz)

Si $\models \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$ *entonces* $\models \psi[\varphi_1/p] \leftrightarrow \psi[\varphi_2/p]$.

Lema

$[\![\varphi_1]\!] = [\![\varphi_2]\!]$ *implica* $[\![\psi[\varphi_1/p]]\!] = [\![\psi[\varphi_2/p]]\!]$.

Demostración.

Inducción en ψ.

La regla de Leibnitz

$$\boxed{\varphi \in At} \quad p[\psi/p] := \psi. \qquad \varphi \neq p \implies \varphi[\psi/p] = \varphi.$$

$$\boxed{(\varphi \odot \chi)} \quad (\varphi \odot \chi)[\psi/p] := (\varphi[\psi/p] \odot \chi[\psi/p]).$$

Teorema (Regla de Leibnitz)

Si $\models \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$ *entonces* $\models \psi[\varphi_1/p] \leftrightarrow \psi[\varphi_2/p]$.

Lema

$[\![\varphi_1]\!] = [\![\varphi_2]\!]$ *implica* $[\![\psi[\varphi_1/p]]\!] = [\![\psi[\varphi_2/p]]\!]$.

Demostración.

Inducción en ψ. En cada caso, suponemos en antecedente y probamos el consecuente.