

Introducción a la Lógica y la Computación

Mariana Badano Héctor Gramaglia
Pedro Sánchez Terraf Mauricio Tellechea
Guido Ivetta

FaMAF, 20 de octubre de 2021



- 1 Repaso
 - Lenguajes regulares
- 2 Operaciones con lenguajes
- 3 Expresiones regulares
 - Lenguaje de una expresión regular
- 4 *Regex* definen lenguajes regulares
- 5 Propiedades de clausura de los lenguajes regulares
 - Clausura bajo complementos e intersección

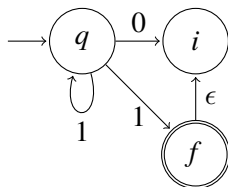
Lenguajes

- **Lenguaje**: cualquier subconjunto $L \subseteq \Sigma^*$ para cierto **alfabeto** finito Σ .
- **Lenguaje regular**: uno de la forma $L(\mathbb{A})$ con \mathbb{A} DFA ó NFA ó ϵ -NFA.

Lenguajes

- **Lenguaje**: cualquier subconjunto $L \subseteq \Sigma^*$ para cierto **alfabeto** finito Σ .
- **Lenguaje regular**: uno de la forma $L(\mathbb{A})$ con \mathbb{A} DFA ó NFA ó ϵ -NFA.

Ejemplo

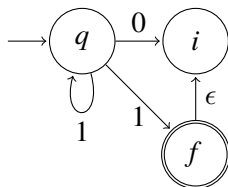


$$\mathbb{A} = (\{q, i, f\}, \{0, 1\}, \rightarrow, q, \{f\})$$

Lenguajes

- **Lenguaje**: cualquier subconjunto $L \subseteq \Sigma^*$ para cierto **alfabeto** finito Σ .
- **Lenguaje regular**: uno de la forma $L(\mathbb{A})$ con \mathbb{A} DFA ó NFA ó ϵ -NFA.

Ejemplo



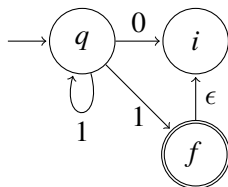
$$\mathbb{A} = (\{q, i, f\}, \{0, 1\}, \rightarrow, q, \{f\})$$

$$L(\mathbb{A}) = \{\alpha \in \{0, 1\}^* : |\alpha|_0 = 0 < |\alpha|_1\}$$

Lenguajes

- **Lenguaje**: cualquier subconjunto $L \subseteq \Sigma^*$ para cierto **alfabeto** finito Σ .
- **Lenguaje regular**: uno de la forma $L(\mathbb{A})$ con \mathbb{A} DFA ó NFA ó ϵ -NFA.

Ejemplo



$$\mathbb{A} = (\{q, i, f\}, \{0, 1\}, \rightarrow, q, \{f\})$$

$$L(\mathbb{A}) = \{\alpha \in \{0, 1\}^* : |\alpha|_0 = 0 < |\alpha|_1\}$$

Expresiones regulares

Una forma de algebraica de describir un lenguaje regular: $\mathbf{1(1)^*}$.

vacío	\emptyset
singulete	$\{(x)\}$ (donde $x \in \Sigma$)
complemento	$L^c = \Sigma^* \setminus L$
intersección	$L \cap L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \text{ y } \alpha \in L'\}$
unión	$L \cup L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \text{ ó } \alpha \in L'\}$
concatenación	$LL' = \{\alpha\beta \mid \alpha \in L \text{ y } \beta \in L'\}$

$$L = \{a, ab\} \quad L' = \{b, a\}$$
$$LL' = \{ab, aa, abb, aba\}$$
$$L'L \ni bab \notin LL'$$

Operaciones con lenguajes $\subseteq \Sigma^*$

$$\underline{L \{\epsilon\}} = \{\alpha \epsilon : \alpha \in L\} = \{\alpha : \alpha \in L\} = \underline{L}$$

vacío \emptyset

singulete $\{(x)\}$ (donde $x \in \Sigma$)

complemento $L^c = \Sigma^* \setminus L$

intersección $L \cap L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \text{ y } \alpha \in L'\}$

unión $L \cup L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \text{ ó } \alpha \in L'\}$

concatenación $LL' = \{\alpha\beta \mid \alpha \in L \text{ y } \beta \in L'\}$

potencias $L^n = \begin{cases} \{\epsilon\} & \text{si } n = 0 \\ LL^k & \text{si } n = k + 1 \end{cases}$

$$L^2 = LL^1 = L(LL^0) = L(L\{\epsilon\}) = LL$$

$$L = \{a, ab\}, L^2 = \{aa, abab, \underbrace{a} \underbrace{ab}, \underbrace{ab} \underbrace{a}\}$$

$$\{\alpha^2 : \alpha \in L\} = \{aa, abab\}$$



UNC

Universidad Nacional de Córdoba



vacío	\emptyset
singulete	$\{(x)\}$ (donde $x \in \Sigma$)
complemento	$L^c = \Sigma^* \setminus L$
intersección	$L \cap L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \text{ y } \alpha \in L'\}$
unión	$L \cup L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \text{ ó } \alpha \in L'\}$
concatenación	$LL' = \{\alpha\beta \mid \alpha \in L \text{ y } \beta \in L'\}$
potencias	$L^n = \begin{cases} \{\epsilon\} & \text{si } n = 0 \\ LL^k & \text{si } n = k + 1 \end{cases}$

$$L^2 = LL = \{\alpha\beta \mid \alpha \in L \text{ y } \beta \in L\} \therefore |L^2| \leq |L|^2$$

Ejercicios: $|L^2| = 2$ es imposible $|L^2| = 4$ es posible

$|L^2| = 3$ es posible!: $\{a, \epsilon\}^2 = \{aa, a, \epsilon\}$.

Para $|L| = 3$ hay al menos 4 valores posibles de $|L^2|$!!!



vacío	\emptyset
singulete	$\{(x)\}$ (donde $x \in \Sigma$)
complemento	$L^c = \Sigma^* \setminus L$
intersección	$L \cap L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \text{ y } \alpha \in L'\}$
unión	$L \cup L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \text{ ó } \alpha \in L'\}$
concatenación	$LL' = \{\alpha\beta \mid \alpha \in L \text{ y } \beta \in L'\}$
potencias	$L^n = \begin{cases} \{\epsilon\} & \text{si } n = 0 \\ LL^k & \text{si } n = k + 1 \end{cases}$

Volvieron!!!

Actividad en Aula Virtual.

Operaciones con lenguajes $\subseteq \Sigma^*$

vacío	\emptyset
singulete	$\{(x)\}$ (donde $x \in \Sigma$)
complemento	$L^c = \Sigma^* \setminus L$
intersección	$L \cap L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \text{ y } \alpha \in L'\}$
unión	$L \cup L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \text{ ó } \alpha \in L'\}$
concatenación	$LL' = \{\alpha\beta \mid \alpha \in L \text{ y } \beta \in L'\}$
potencias	$L^n = \begin{cases} \{\epsilon\} & \text{si } n = 0 \\ LL^k & \text{si } n = k + 1 \end{cases}$
clausura	$L^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^n = \{\epsilon\} \cup L \cup LL \cup LLL \cup \dots$

$\{0,1\}^* = \{ \underbrace{\epsilon}_{L^0}, \underbrace{0,1}_{L^1}, \underbrace{00,01,10,11}_{L^2}, \underbrace{000,001,\dots}_{L^3}, \dots \}$



vacío	\emptyset	\emptyset
singulete	$\{(x)\}$ (donde $x \in \Sigma$)	
complemento	$L^c = \Sigma^* \setminus L$	
intersección	$L \cap L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \text{ y } \alpha \in L'\}$	
unión	$L \cup L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \text{ ó } \alpha \in L'\}$	
concatenación	$LL' = \{\alpha\beta \mid \alpha \in L \text{ y } \beta \in L'\}$	
potencias	$L^n = \begin{cases} \{\epsilon\} & \text{si } n = 0 \\ LL^k & \text{si } n = k + 1 \end{cases}$	
clausura	$L^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^n$	

vacío	\emptyset	\emptyset
singulete	$\{(x)\}$ (donde $x \in \Sigma$)	x
complemento	$L^c = \Sigma^* \setminus L$	
intersección	$L \cap L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \text{ y } \alpha \in L'\}$	
unión	$L \cup L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \text{ ó } \alpha \in L'\}$	
concatenación	$LL' = \{\alpha\beta \mid \alpha \in L \text{ y } \beta \in L'\}$	
potencias	$L^n = \begin{cases} \{\epsilon\} & \text{si } n = 0 \\ LL^k & \text{si } n = k + 1 \end{cases}$	
clausura	$L^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^n$	

vacío	\emptyset	\emptyset
singulete	$\{(x)\}$ (donde $x \in \Sigma$)	x
complemento	$L^c = \Sigma^* \setminus L$	
intersección	$L \cap L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \text{ y } \alpha \in L'\}$	
unión	$L \cup L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \text{ ó } \alpha \in L'\}$	$r + r'$
concatenación	$LL' = \{\alpha\beta \mid \alpha \in L \text{ y } \beta \in L'\}$	
potencias	$L^n = \begin{cases} \{\epsilon\} & \text{si } n = 0 \\ LL^k & \text{si } n = k + 1 \end{cases}$	
clausura	$L^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^n$	

Operaciones con lenguajes $\subseteq \Sigma^*$

vacío	\emptyset	\emptyset
singulete	$\{(x)\}$ (donde $x \in \Sigma$)	x
complemento	$L^c = \Sigma^* \setminus L$	
intersección	$L \cap L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \text{ y } \alpha \in L'\}$	
unión	$L \cup L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \text{ ó } \alpha \in L'\}$	$r + r'$
concatenación	$LL' = \{\alpha\beta \mid \alpha \in L \text{ y } \beta \in L'\}$	rr'
potencias	$L^n = \begin{cases} \{\epsilon\} & \text{si } n = 0 \\ LL^k & \text{si } n = k + 1 \end{cases}$	
clausura	$L^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^n$	

Operaciones con lenguajes $\subseteq \Sigma^*$

$$\emptyset \neq \{\epsilon\}$$

vacío	\emptyset	\emptyset
singulete	$\{(x)\}$ (donde $x \in \Sigma$)	x
complemento	$L^c = \Sigma^* \setminus L$	
intersección	$L \cap L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \text{ y } \alpha \in L'\}$	
unión	$L \cup L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \text{ ó } \alpha \in L'\}$	$r + r'$
concatenación	$LL' = \{\alpha\beta \mid \alpha \in L \text{ y } \beta \in L'\}$	rr'
potencias	$L^n = \begin{cases} \{\epsilon\} & \text{si } n = 0 \\ LL^k & \text{si } n = k + 1 \end{cases}$	$r^0 = \epsilon$
clausura	$L^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^n$	



UNC

Universidad
Nacional
de Córdoba1613-2013
400
AÑOS

Operaciones con lenguajes $\subseteq \Sigma^*$

vacío	\emptyset	\emptyset
singulete	$\{(x)\}$ (donde $x \in \Sigma$)	x
complemento	$L^c = \Sigma^* \setminus L$	
intersección	$L \cap L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \text{ y } \alpha \in L'\}$	
unión	$L \cup L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \text{ ó } \alpha \in L'\}$	$r + r'$
concatenación	$LL' = \{\alpha\beta \mid \alpha \in L \text{ y } \beta \in L'\}$	rr'
potencias	$L^n = \begin{cases} \{\epsilon\} & \text{si } n = 0 \\ LL^k & \text{si } n = k + 1 \end{cases}$	$r^0 = \epsilon$ rr^n
clausura	$L^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^n$	

vacío	\emptyset	\emptyset
singulete	$\{(x)\}$ (donde $x \in \Sigma$)	x
complemento	$L^c = \Sigma^* \setminus L$	
intersección	$L \cap L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \text{ y } \alpha \in L'\}$	
unión	$L \cup L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \text{ ó } \alpha \in L'\}$	$r + r'$
concatenación	$LL' = \{\alpha\beta \mid \alpha \in L \text{ y } \beta \in L'\}$	rr'
potencias	$L^n = \begin{cases} \{\epsilon\} & \text{si } n = 0 \\ LL^k & \text{si } n = k + 1 \end{cases}$	$r^0 = \epsilon$ r^n
clausura	$L^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^n$	r^*

donde r y r' son expresiones regulares y $n \in \mathbb{N}_0$.

Fijado un alfabeto Σ , son el menor conjunto *Regex* que cumple:

- vacío $\emptyset \in \text{Regex}$.
- épsilon $\epsilon \in \text{Regex}$.
- símbolo $x \in \Sigma \implies x \in \text{Regex}$.
- unión $r_1, r_2 \in \text{Regex} \implies (r_1 + r_2) \in \text{Regex}$.
- concatenación $r_1, r_2 \in \text{Regex} \implies r_1 r_2 \in \text{Regex}$.
- clausura $r \in \text{Regex} \implies (r)^* \in \text{Regex}$.

Lenguaje de una expresión regular

Como *Regex* fue definido inductivamente, podemos definir por recursión:

vacío	$L(\emptyset) := \emptyset.$
épsilon	$L(\epsilon) := \{\epsilon\}.$
símbolo	$L(x) := \{(x)\}.$
unión	$L((r_1 + r_2)) := L(r_1) \cup L(r_2).$
concatenación	$L(r_1 r_2) := L(r_1) L(r_2).$
clausura	$L((r)^*) := (L(r))^*.$

Lenguaje de una expresión regular

Como *Regex* fue definido inductivamente, podemos definir por recursión:

vacío $L(\emptyset) := \emptyset$.

épsilon $L(\epsilon) := \{\epsilon\}$.

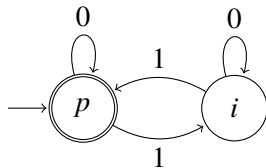
símbolo $L(x) := \{(x)\}$.

unión $L((r_1 + r_2)) := L(r_1) \cup L(r_2)$.

concatenación $L(r_1 r_2) := L(r_1) L(r_2)$.

clausura $L((r)^*) := (L(r))^*$.

Ejemplo



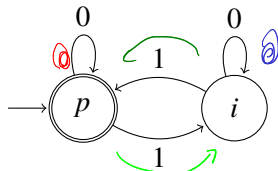
$$L(\mathbb{A}) = \{\alpha \in \{0, 1\}^* : |\alpha|_1 \text{ es par}\}$$

Lenguaje de una expresión regular

Como *Regex* fue definido inductivamente, podemos definir por recursión:

vacío	$L(\emptyset) := \emptyset.$
épsilon	$L(\epsilon) := \{\epsilon\}.$
símbolo	$L(x) := \{(x)\}.$
unión	$L((r_1 + r_2)) := L(r_1) \cup L(r_2).$
concatenación	$L(r_1 r_2) := L(r_1) L(r_2).$
clausura	$L((r)^*) := (L(r))^*.$

Ejemplo



$$L(\mathbb{A}) = \{\alpha \in \{0, 1\}^* : |\alpha|_1 \text{ es par}\}$$

$$L(\mathbb{A}) = L(\underline{0^*10^*10^*}0^*)$$

$$L(0^*10^*10^*)$$

$$\{ \overset{U}{11}, 011, 101, 0110, \dots \}$$

Lenguaje de una expresión regular

Como *Regex* fue definido inductivamente, podemos definir por recursión:

vacío $L(\emptyset) := \emptyset$.

épsilon $L(\epsilon) := \{\epsilon\}$.

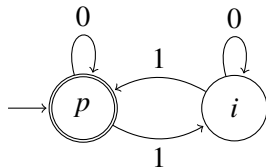
símbolo $L(x) := \{x\}$.

unión $L((r_1 + r_2)) := L(r_1) \cup L(r_2)$.

concatenación $L(r_1 r_2) := L(r_1) L(r_2)$.

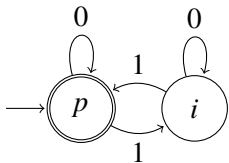
clausura $L((r)^*) := (L(r))^*$.

Ejemplo



$L(\mathbb{A}) = \{\alpha \in \{0, 1\}^* : |\alpha|_1 \text{ es par}\}$

$L(\mathbb{A}) = L((\mathbf{0^*10^*10^*})^*\mathbf{0^*})$
 $= L((\mathbf{10^*1 + 0})^*)$



$$L(\mathbb{A}) = \{\alpha \in \{0, 1\}^* : |\alpha|_1 \text{ es par}\}$$

$$L(\mathbb{A}) = L((0^*10^*10^*)^*0^*)$$

$$= L((10^*1 + 0)^*)$$

→ sí se puede (verificar)
 → no se puede sacar.

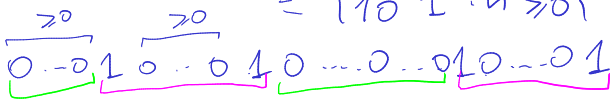
$$L((10^*1 + 0)^*) = \{\epsilon, 0, \alpha_1, 0\alpha_2, \alpha_3, 00, \alpha_4\alpha_5, 0\alpha_6, \dots\}$$

$$\cup L(10^*1 + 0)^3 \quad \text{con } \alpha_i \in L(10^*1) \quad \left(\{10^n1 : n \geq 0\} \cup \{0\} \right)^*$$

$$L(10^*1 + 0) = L(10^*1) \cup L(0)$$

$$L(10^*1) \cup \{0\}$$

$$= \{10^n1 : n \geq 0\} \cup \{0\}$$



Teorema

Para toda expresión regular r , existe un ϵ -NFA $\mathbb{A}(r)$ con un único estado final tal que $L(r) = L(\mathbb{A}(r))$.

Teorema

Para toda expresión regular r , existe un ϵ -NFA $\mathbb{A}(r)$ con un único estado final tal que $L(r) = L(\mathbb{A}(r))$.

Demostración.

Por recursión en r .

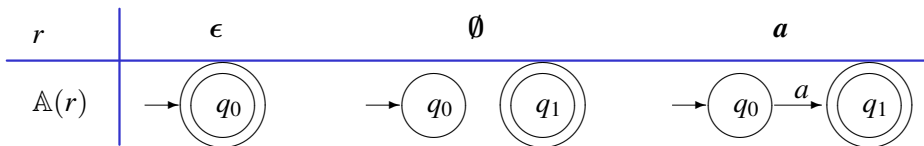
Regex definen lenguajes regulares

Teorema

Para toda expresión regular r , existe un ϵ -NFA $\mathbb{A}(r)$ con un único estado final tal que $L(r) = L(\mathbb{A}(r))$.

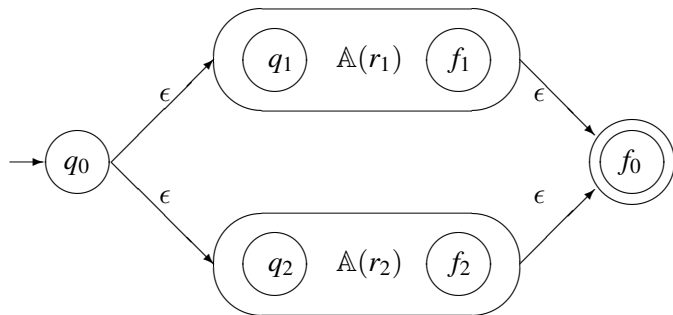
Demostración.

Por recursión en r .



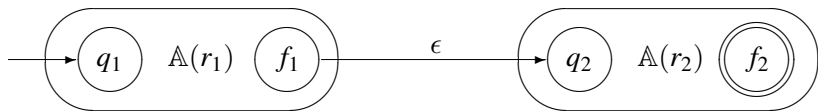
Regex definen lenguajes regulares

$\mathbb{A}(r_1 + r_2)$



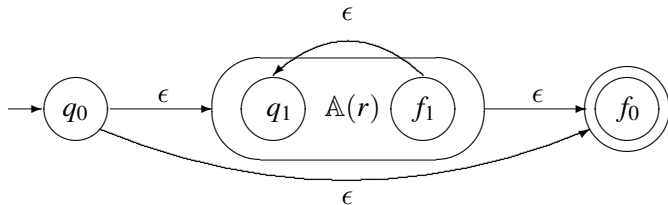
Regex definen lenguajes regulares

$\mathbb{A}(r_1 r_2)$



Regex definen lenguajes regulares

$\mathbb{A}(r^*)$

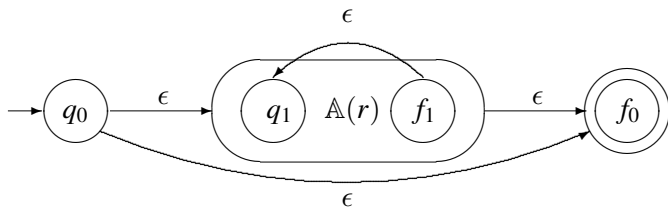


Nota el uso de ϵ !!



Regex definen lenguajes regulares

$\mathbb{A}(r^*)$



¿Qué pasa con las otras operaciones?

Operaciones con lenguajes $\subseteq \Sigma^*$

vacío	\emptyset	\emptyset
singulete	$\{(x)\}$ (donde $x \in \Sigma$)	x
complemento	$L^c = \Sigma^* \setminus L$	
intersección	$L \cap L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \text{ y } \alpha \in L'\}$	
unión	$L \cup L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \text{ ó } \alpha \in L'\}$	$r + r'$
concatenación	$LL' = \{\alpha\beta \mid \alpha \in L \text{ y } \beta \in L'\}$	rr'
potencias	$L^n = \begin{cases} \{\epsilon\} & \text{si } n = 0 \\ LL^k & \text{si } n = k + 1 \end{cases}$	$r^0 = \epsilon$ r^n
clausura	$L^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^n$	r^*

Operaciones con lenguajes $\subseteq \Sigma^*$

vacío	\emptyset	\emptyset
singulete	$\{(x)\}$ (donde $x \in \Sigma$)	x
complemento	$L^c = \Sigma^* \setminus L$	
intersección	$L \cap L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \text{ y } \alpha \in L'\}$	
unión	$L \cup L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \text{ ó } \alpha \in L'\}$	$r + r'$
concatenación	$LL' = \{\alpha\beta \mid \alpha \in L \text{ y } \beta \in L'\}$	rr'
potencias	$L^n = \begin{cases} \{\epsilon\} & \text{si } n = 0 \\ LL^k & \text{si } n = k + 1 \end{cases}$	$r^0 = \epsilon$ r^n
clausura	$L^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^n$	r^*

Clausura bajo complementos e intersección

complemento $L^c = \Sigma^* \setminus L.$

intersección $L \cap L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \text{ y } \alpha \in L'\}$

Clausura bajo complementos e intersección

complemento $L^c = \Sigma^* \setminus L.$

intersección $L \cap L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \text{ y } \alpha \in L'\}$

Proposición

- 1 L_1 regular $\implies L_1^c$ regular.
- 2 L_1 y L_2 regulares $\implies L_1 \cap L_2$ regular.

Clausura bajo complementos e intersección

complemento $L^c = \Sigma^* \setminus L.$

intersección $L \cap L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \text{ y } \alpha \in L'\}$

Proposición

- 1 L_1 regular $\implies L_1^c$ regular.
- 2 L_1 y L_2 regulares $\implies L_1 \cap L_2$ regular.

En ambos casos es muy útil saber que hay **DFA**s $\mathbb{A}_i = (Q_i, \Sigma, \delta_i, q_i, F_i)$ tales que $L_i = L(\mathbb{A}_i)$ (con $i = 1, 2$).

Clausura bajo complementos e intersección

complemento $L^c = \Sigma^* \setminus L.$

intersección $L \cap L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \text{ y } \alpha \in L'\}$

Proposición

- 1** L_1 regular $\implies L_1^c$ regular.
- 2** L_1 y L_2 regulares $\implies L_1 \cap L_2$ regular.

En ambos casos es muy útil saber que hay **DFA**s $\mathbb{A}_i = (Q_i, \Sigma, \delta_i, q_i, F_i)$ tales que $L_i = L(\mathbb{A}_i)$ (con $i = 1, 2$).

Demostración.

- 1** Casi el mismo \mathbb{A}_1 nos sirve, sólo hay que cambiar F_1 .

Clausura bajo complementos e intersección

complemento $L^c = \Sigma^* \setminus L.$

intersección $L \cap L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \text{ y } \alpha \in L'\}$

Proposición

- 1 L_1 regular $\implies L_1^c$ regular.
- 2 L_1 y L_2 regulares $\implies L_1 \cap L_2$ regular.

En ambos casos es muy útil saber que hay **DFA**s $\mathbb{A}_i = (Q_i, \Sigma, \delta_i, q_i, F_i)$ tales que $L_i = L(\mathbb{A}_i)$ (con $i = 1, 2$).

Demostración.

- 1 Casi el mismo \mathbb{A}_1 nos sirve, sólo hay que cambiar F_1 .
- 2 Para este ítem, necesitamos una nueva operación entre estructuras matemáticas.

Intermezzo: Productos directos de estructuras

Tal como se hace el producto cartesiano de conjuntos, se puede hacer el “producto directo” de estructuras algebraicas.

Intermezzo: Productos directos de estructuras

Tal como se hace el producto cartesiano de conjuntos, se puede hacer el “producto directo” de estructuras algebraicas.

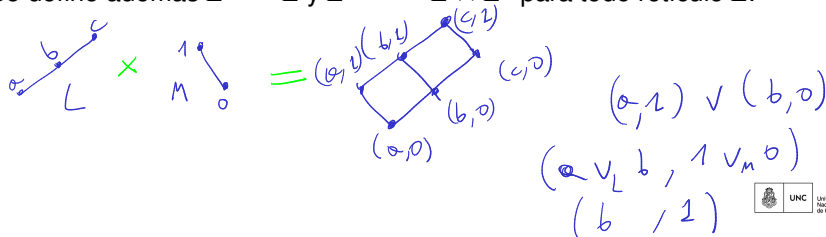
Ejemplo

El **producto directo** $(L, \vee_L, \wedge_L) \times (M, \vee_M, \wedge_M)$ de dos retículos tiene como universo a $\underline{L \times M}$ y operaciones definidas **coordenada a coordenada**:

$$(x_1, y_1) \vee_{L \times M} (x_2, y_2) := (x_1 \vee_L x_2, y_1 \vee_M y_2)$$

$$(x_1, y_1) \wedge_{L \times M} (x_2, y_2) := (x_1 \wedge_L x_2, y_1 \wedge_M y_2)$$

Se define además $L^1 := L$ y $L^{n+1} := L \times L^n$ para todo retículo L .



Intermezzo: Productos directos de estructuras

Tal como se hace el producto cartesiano de conjuntos, se puede hacer el “producto directo” de estructuras algebraicas.

Ejemplo

El **producto directo** $(L, \vee_L, \wedge_L) \times (M, \vee_M, \wedge_M)$ de dos retículos tiene como universo a $L \times M$ y operaciones definidas **coordenada a coordenada**:

$$(x_1, y_1) \vee_{L \times M} (x_2, y_2) := (x_1 \vee_L x_2, y_1 \vee_M y_2)$$

$$(x_1, y_1) \wedge_{L \times M} (x_2, y_2) := (x_1 \wedge_L x_2, y_1 \wedge_M y_2)$$

Se define además $L^1 := L$ y $L^{n+1} := L \times L^n$ para todo retículo L .

¿ L^0 ?



UNC
Universidad
Nacional
de Córdoba



Intermezzo: Productos directos de estructuras

Tal como se hace el producto cartesiano de conjuntos, se puede hacer el “producto directo” de estructuras algebraicas.

Ejemplo

conjunto *operaciones*

$$\wedge_L: L \times L \rightarrow L$$
$$\vee_L: L \times L \rightarrow L$$

El **producto directo** $(L, \vee_L, \wedge_L) \times (M, \vee_M, \wedge_M)$ de dos retículos tiene como universo a $L \times M$ y operaciones definidas **coordenada a coordenada**:

$$(x_1, y_1) \vee_{L \times M} (x_2, y_2) := (x_1 \vee_L x_2, y_1 \vee_M y_2)$$

$$(x_1, y_1) \wedge_{L \times M} (x_2, y_2) := (x_1 \wedge_L x_2, y_1 \wedge_M y_2)$$

Se define además $L^1 := L$ y $L^{n+1} := L \times L^n$ para todo retículo L .

¿ L^0 ?

Ejercicio

- 1 Sea $\mathbf{2}$ la cadena de 2 elementos. Comprobar que $\mathbf{2}^n \cong \mathcal{P}(\{1, \dots, n\})$ (P7E13a).
- 2 (*) Definir producto infinito o potencia infinita de estructuras.

DFAs como estructuras

■ $\mathbb{A} = (Q, \{a, b\}, \delta, q, F)$

$$\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$$

DFAs como estructuras

$$\blacksquare \mathbb{A} = (Q, \{a, b\}, \delta, q, F) \rightsquigarrow \overline{\mathbb{A}} = (Q, \delta^a, \delta^b, q, F)$$

donde

$$\begin{aligned} \delta^a &: Q \rightarrow Q \\ \delta^a(x) &:= \delta(x, a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta^b &: Q \rightarrow Q \\ \delta^b(x) &:= \delta(x, b). \end{aligned}$$

DFAs como estructuras

$$\blacksquare \mathbb{A} = (Q, \{a, b\}, \delta, q, F) \rightsquigarrow \overline{\mathbb{A}} = (Q, \delta^a, \delta^b, q, F)$$

donde

$$\begin{aligned} \delta^a : Q &\rightarrow Q & \delta^b : Q &\rightarrow Q \\ \delta^a(x) &:= \delta(x, a) & \delta^b(x) &:= \delta(x, b). \end{aligned}$$

Entonces podemos definir el DFA $\mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_2$ correspondiente al **producto** de las estructuras $\overline{\mathbb{A}}_1$ y $\overline{\mathbb{A}}_2$:

DFAs como estructuras

$$\blacksquare \mathbb{A} = (Q, \{a, b\}, \delta, q, F) \rightsquigarrow \overline{\mathbb{A}} = (Q, \delta^a, \delta^b, q, F)$$

donde

$$\begin{aligned} \delta^a : Q &\rightarrow Q & \delta^b : Q &\rightarrow Q \\ \delta^a(x) &:= \delta(x, a) & \delta^b(x) &:= \delta(x, b). \end{aligned}$$

Entonces podemos definir el DFA $\overline{\mathbb{A}}_1 \times \overline{\mathbb{A}}_2$ correspondiente al **producto** de las estructuras $\overline{\mathbb{A}}_1$ y $\overline{\mathbb{A}}_2$:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{A}}_1 \times \overline{\mathbb{A}}_2 &= (Q_1 \times Q_2, \delta_{1 \times 2}^a, \delta_{1 \times 2}^b, (q_1, q_2), F_1 \times F_2) \\ \delta_{1 \times 2}^a(s) &:= (\delta_1^a(s), \delta_2^a(s)) \\ \delta_{1 \times 2}^b(s) &:= (\delta_1^b(s), \delta_2^b(s)) \end{aligned}$$



UNC

Universidad
Nacional
de Córdoba



DFAs como estructuras

$$\blacksquare \mathbb{A} = (Q, \{a, b\}, \delta, q, F) \rightsquigarrow \overline{\mathbb{A}} = (Q, \delta^a, \delta^b, q, F)$$

donde

$$\begin{aligned} \delta^a : Q &\rightarrow Q & \delta^b : Q &\rightarrow Q \\ \delta^a(x) &:= \delta(x, a) & \delta^b(x) &:= \delta(x, b). \end{aligned}$$

Entonces podemos definir el DFA $\mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_2$ correspondiente al **producto** de las estructuras \mathbb{A}_1 y \mathbb{A}_2 :

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{A}_1} \times \overline{\mathbb{A}_2} &= (Q_1 \times Q_2, \delta_{1 \times 2}^a, \delta_{1 \times 2}^b, (q_1, q_2), F_1 \times F_2) \\ \delta_{1 \times 2}^a(s) &:= (\delta_1^a(s), \delta_2^a(s)) \\ \delta_{1 \times 2}^b(s) &:= (\delta_1^b(s), \delta_2^b(s)) \end{aligned}$$

Ejercicio

$$L(\mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_2) = L(\mathbb{A}_1) \cap L(\mathbb{A}_2).$$