Introducción a la Lógica y la Computación

Mariana Badano Héctor Gramaglia
Pedro Sánchez Terraf Mauricio Tellechea
Guido Ivetta César Vallero

FaMAF, 25 de agosto de 2021

Contenidos estimados para hoy

1. Conjuntos parcialmente ordenados
   - Isomorfismo de posets
   - Supremos e ínfimos

2. Posets Reticulados
   - Ejemplos
   - Isomorfismos preservan estructura
   - Dualidad
   - Propiedades fundamentales del supremo e ínfimo

Isomorfismo de posets

Sean $(P, \leq)$, $(Q, \leq')$ dos posets, y sea $f : P \to Q$ una función.

Isomorfismo de posets

Sean $(P, \leq)$, $(Q, \leq')$ dos posets, y sea $f : P \to Q$ una función.

Definición

f es un **isomorfismo** ("iso") si

- f es biyectiva y
- para todo $x, y \in P$, se cumple que

$$x \leq y \iff f(x) \leq' f(y).$$

Isomorfismo de posets

Sean $(P, \leq)$, $(Q, \leq')$ dos posets, y sea $f : P \to Q$ una función.

Definición

f es un **isomorfismo** ("iso") si

- f es biyectiva y
- para todo $x, y \in P$, se cumple que

$$x \leq y \iff f(x) \leq' f(y).$$

Decimos entonces que $(P, \leq)$ y $(Q, \leq')$ son **isomorfos** y escribimos $(P, \leq) \cong (Q, \leq')$.

Isomorfismo de posets

Sean $(P, \leq)$, $(Q, \leq')$ dos posets, y sea $f : P \to Q$ una función.

Definición

f es un **isomorfismo** ("iso") si

- f es biyectiva y
- para todo $x, y \in P$, se cumple que

$$x \leq y \iff f(x) \leq' f(y).$$

Decimos entonces que $(P, \leq)$ y $(Q, \leq')$ son **isomorfos** y escribimos $(P, \leq) \cong (Q, \leq')$.

Isomorfismo es una noción simétrica

$f : (P, \leq) \to (Q, \leq')$ iso $\implies f^{-1} : (Q, \leq') \to (P, \leq)$ iso.

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Isomorfismo de posets

Sean $(P, \leq)$, $(Q, \leq')$ dos posets, y sea $f : P \to Q$ una función.

Definición

f es un **isomorfismo** (“iso”) si

- f es biyectiva y
- para todo $x, y \in P$, se cumple que

$$x \leq y \iff f(x) \leq' f(y).$$

Decimos entonces que $(P, \leq)$ y $(Q, \leq')$ son **isomorfos** y escribimos $(P, \leq) \cong (Q, \leq')$.

Isomorfismo es una noción simétrica

$f : (P, \leq) \to (Q, \leq')$ iso $\implies f^{-1} : (Q, \leq') \to (P, \leq)$ iso. $\longleftarrow$ ¡Ejercicio!

Supremos e ínfimos

Sea $(P, \leq)$ un poset, sea $S \subseteq P$ y sean $u, l, s, i \in P$.

Definición

1. $u \in P$ se dice **cota superior** de $S \iff \forall x \in S, \quad x \leq u$.
   u está "encima" de S.
2. $l \in P$ se dice **cota inferior** de $S \iff \forall x \in S, \quad l \leq x$.
   l está "debajo" de S.
3. $s \in P$ se dice **supremo** de S si s es una cota superior de S y
   $\forall b \in P$, b es cota superior b de $S \implies s \leq b$.
   Escribimos "$s = \sup S$". Es la menor cota superior.
4. $i \in P$ se dice **ínfimo** de S si i es una cota inferior de S y
   $\forall b \in P$, b es cota inferior b de $S \implies b \leq i$.
   Escribimos "$i = \text{ínf}\, S$". Es la mayor cota inferior.

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Supremos e ínfimos

Definición

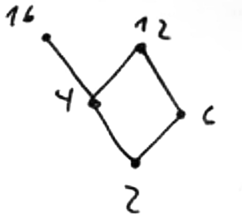
1. $u \in P$ se dice **cota superior** de $S \iff \forall x \in S, \quad x \leq u$.
2. $l \in P$ se dice **cota inferior** de $S \iff \forall x \in S, \quad l \leq x$.
3. El **supremo** $\sup S$ es la menor cota superior de S en P (si existe).
4. El **ínfimo** $\inf S$ es la mayor cota inferior de S en P (si existe).

Supremos e ínfimos

Definición

1. $u \in P$ se dice **cota superior** de $S \iff \forall x \in S, \quad x \leq u$.
2. $l \in P$ se dice **cota inferior** de $S \iff \forall x \in S, \quad l \leq x$.
3. El **supremo** $\sup S$ es la menor cota superior de S en P (si existe).
4. El **ínfimo** $\inf S$ es la mayor cota inferior de S en P (si existe).

Ejemplo

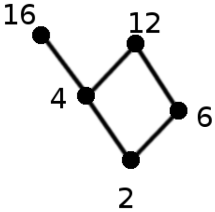


Supremos e ínfimos

Definición

1. $u \in P$ se dice **cota superior** de $S \iff \forall x \in S, \quad x \leq u$.
2. $l \in P$ se dice **cota inferior** de $S \iff \forall x \in S, \quad l \leq x$.
3. El **supremo** $\sup S$ es la menor cota superior de S en P (si existe).
4. El **ínfimo** $\inf S$ es la mayor cota inferior de S en P (si existe).

Ejemplo

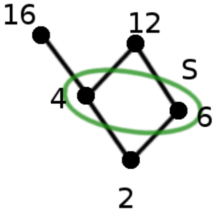


Supremos e ínfimos

Definición

1. $u \in P$ se dice **cota superior** de $S \iff \forall x \in S, \quad x \leq u$.
2. $l \in P$ se dice **cota inferior** de $S \iff \forall x \in S, \quad l \leq x$.
3. El **supremo** $\sup S$ es la menor cota superior de S en P (si existe).
4. El **ínfimo** $\inf S$ es la mayor cota inferior de S en P (si existe).

Ejemplo



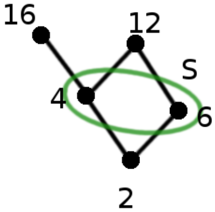
Especialmente: el caso de S con (a lo sumo) dos elementos.

Supremos e ínfimos

Definición

1. $u \in P$ se dice **cota superior** de $S \iff \forall x \in S, \quad x \leq u$.
2. $l \in P$ se dice **cota inferior** de $S \iff \forall x \in S, \quad l \leq x$.
3. El **supremo** $\sup S$ es la menor cota superior de S en P (si existe).
4. El **ínfimo** $\inf S$ es la mayor cota inferior de S en P (si existe).

Ejemplo



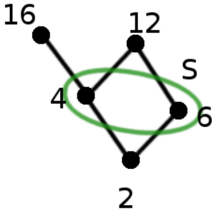
Especialmente: el caso de S con (a lo sumo) dos elementos.

$$\sup\{4,6\} = 12 \quad \inf\{4,6\} = 2$$

Definición

1. $u \in P$ se dice **cota superior** de $S \iff \forall x \in S, \quad x \leq u$.
2. $l \in P$ se dice **cota inferior** de $S \iff \forall x \in S, \quad l \leq x$.
3. El **supremo** $\sup S$ es la menor cota superior de S en P (si existe).
4. El **ínfimo** $\inf S$ es la mayor cota inferior de S en P (si existe).

Ejemplo



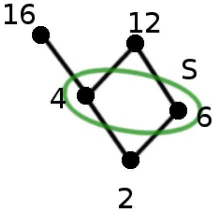
Especialmente: el caso de S con (a lo sumo) dos elementos.

$$\underbrace{\sup\{4,6\}}_{4 \vee 6} = 12 \qquad \inf\{4,6\} = 2$$

Definición

1. $u \in P$ se dice **cota superior** de $S \iff \forall x \in S, \quad x \leq u$.
2. $l \in P$ se dice **cota inferior** de $S \iff \forall x \in S, \quad l \leq x$.
3. El **supremo** $\sup S$ es la menor cota superior de S en P (si existe).
4. El **ínfimo** $\inf S$ es la mayor cota inferior de S en P (si existe).

Ejemplo



Especialmente: el caso de S con (a lo sumo) dos elementos.

$$\underbrace{\sup\{4,6\}}_{4 \vee 6} = 12 \qquad \underbrace{\inf\{4,6\}}_{4 \wedge 6} = 2$$

Posets Reticulados

Definición

$(L, \leq)$ es un poset **reticulado** si para todo $a, b \in L$ existen $\sup\{a, b\}$ e $\text{ínf}\{a, b\}$.

Posets Reticulados

Definición

$(L, \leq)$ es un poset **reticulado** si para todo $a, b \in L$ existen $\sup\{a, b\}$ e $\text{ínf}\{a, b\}$.

Notación: $a \vee b := \sup\{a, b\} \quad a \wedge b := \text{ínf}\{a, b\}$

Posets Reticulados

Definición

$(L, \leq)$ es un poset **reticulado** si para todo $a, b \in L$ existen $\sup\{a, b\}$ e $\text{ínf}\{a, b\}$.

Notación: $a \vee b := \sup\{a, b\}$ $\quad a \wedge b := \text{ínf}\{a, b\}$

Ejemplo

1. $(\mathbb{R}, \leqslant)$, $(\mathbb{N}, \leqslant)$, $(\mathbb{Z}, \leqslant)$.
2. $(\mathbb{N}, |)$.
3. $(\mathscr{P}(A), \subseteq)$ para cada conjunto A.

Definición

$(L, \leq)$ es un poset **reticulado** si para todo $a, b \in L$ existen $\sup\{a, b\}$ e $\text{ínf}\{a, b\}$.

Notación: $a \vee b := \sup\{a, b\}$ $a \wedge b := \text{ínf}\{a, b\}$

Ejemplo

1. $(\mathbb{R}, \leqslant)$, $(\mathbb{N}, \leqslant)$, $(\mathbb{Z}, \leqslant)$. ¡Totales!
2. $(\mathbb{N}, |)$.
3. $(\mathscr{P}(A), \subseteq)$ para cada conjunto A.

Posets Reticulados

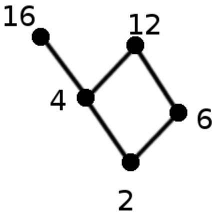
Definición

$(L, \leq)$ es un poset **reticulado** si para todo $a, b \in L$ existen $\sup\{a, b\}$ e $\text{ínf}\{a, b\}$.

Notación: $a \vee b := \sup\{a, b\}$ $\quad a \wedge b := \text{ínf}\{a, b\}$

Ejemplo

1. $(\mathbb{R}, \leqslant)$, $(\mathbb{N}, \leqslant)$, $(\mathbb{Z}, \leqslant)$. ¡Totales!
2. $(\mathbb{N}, |)$. $\longrightarrow$ ¡Ojo con los subposets!
3. $(\mathscr{P}(A), \subseteq)$ para cada conjunto A.



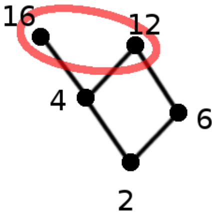
Definición

$(L, \leq)$ es un poset **reticulado** si para todo $a, b \in L$ existen $\sup\{a, b\}$ e $\text{ínf}\{a, b\}$.

Notación: $a \vee b := \sup\{a, b\}$ $\quad a \wedge b := \text{ínf}\{a, b\}$

Ejemplo

1. $(\mathbb{R}, \leqslant)$, $(\mathbb{N}, \leqslant)$, $(\mathbb{Z}, \leqslant)$. ¡Totales!
2. $(\mathbb{N}, |)$. $\longrightarrow$ ¡Ojo con los subposets!
3. $(\mathscr{P}(A), \subseteq)$ para cada conjunto A.



Ejemplos de posets reticulados

Ejemplo (Conjunto de divisores de n)

$D_n := \{k \in \mathbb{N} : k \mid n\}$.

$(D_n, |)$ tiene **primer elemento** 1 y **último elemento** n.

Ejemplos de posets reticulados

Ejemplo (Conjunto de divisores de n)

$D_n := \{k \in \mathbb{N} : k \mid n\}$.
$(D_n, |)$ tiene **primer elemento** 1 y **último elemento** n.

$$x \vee y = \mathrm{mcm}(x, y) \qquad x \wedge y = \mathrm{mcd}(x, y).$$

Ejemplos de posets reticulados

Ejemplo (Conjunto de divisores de n)

$D_n := \{k \in \mathbb{N} : k \mid n\}$.
$(D_n, |)$ tiene **primer elemento** 1 y **último elemento** n.

$$x \vee y = \mathrm{mcm}(x, y) \qquad x \wedge y = \mathrm{mcd}(x, y).$$

Ejemplo (Partes de un conjunto)

$\mathscr{P}(A) := \{X : X \subseteq A\}$.
$(\mathscr{P}(A), \subseteq)$ tiene primer elemento $\varnothing$ y último elemento A.

$$X \vee Y = X \cup Y \qquad X \wedge Y = X \cap Y.$$

Repetimos las definiciones:

$u \in P$ se dice **cota superior** de $S \iff \forall x \in S, \quad x \leq u$.
El **supremo** $\sup S$ es la menor cota superior de S en P (si existe).
$(L, \leq)$ es un poset **reticulado** si para todo $a, b \in L$ existen $\sup\{a, b\}$ e $\text{ínf}\{a, b\}$.

Repetimos las definiciones:

$u \in P$ se dice **cota superior** de $S \iff \forall x \in S, \quad x \leq u$.
El **supremo** $\sup S$ es la menor cota superior de S en P (si existe).
$(L, \leq)$ es un poset **reticulado** si para todo $a, b \in L$ existen $\sup\{a, b\}$ e $\inf\{a, b\}$.

$\mathbf{P} := ([0, 1) \cup [2, 3), \leqslant)$

Consideremos el conjunto $[0, 1) \cup [2, 3) = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leqslant x < 1$ ó $2 \leqslant x < 3\}$ con el orden heredado de $\mathbb{R}$.

1. ¿Es $\mathbf{P}$ un poset reticulado?
2. ¿Existe $\sup [2, 3)$?
3. ¿$\sup [0, 1) = 1$?
4. ¿$\sup [0, 1) = 2$?

Isomorfismos preservan la estructura

$f : (P, \leq) \to (Q, \leq')$ **isomorfismo** si es biyectiva y para todo $x, y \in P$,
$x \leq y \iff f(x) \leq' f(y)$.

Isomorfismos preservan la estructura

$f : (P, \leq) \to (Q, \leq')$ **isomorfismo** si es biyectiva y para todo $x, y \in P$,
$x \leq y \iff f(x) \leq' f(y)$.

Proposición

Sean $u \in P$ y $S \subseteq P$. Entonces
u es cota superior de $S \iff f(u)$ es cota superior de $f(S) := \{f(x) : x \in S\}$.

Isomorfismos preservan la estructura

$f : (P, \leq) \to (Q, \leq')$ **isomorfismo** si es biyectiva y para todo $x, y \in P$,
$x \leq y \iff f(x) \leq' f(y)$.

Proposición

Sean $u \in P$ y $S \subseteq P$. Entonces
u es cota superior de $S \iff f(u)$ es cota superior de $f(S) := \{f(x) : x \in S\}$.

Demostración.

$(\Rightarrow)$ Pizarra.

Isomorfismos preservan la estructura

$f : (P, \leq) \to (Q, \leq')$ **isomorfismo** si es biyectiva y para todo $x, y \in P$,
$x \leq y \iff f(x) \leq' f(y)$.

Proposición

Sean $u \in P$ y $S \subseteq P$. Entonces
u es cota superior de $S \iff f(u)$ es cota superior de $f(S) := \{f(x) : x \in S\}$.

Demostración.

($\Rightarrow$) Pizarra.
($\Leftarrow$) Por simetría (porque f^{-1} es iso).

Isomorfismos preservan la estructura

$f : (P, \leq) \to (Q, \leq')$ **isomorfismo** si es biyectiva y para todo $x, y \in P$,
$x \leq y \iff f(x) \leq' f(y)$.

Proposición

Sean $u \in P$ y $S \subseteq P$. Entonces
u es cota superior de $S \iff f(u)$ es cota superior de $f(S) := \{f(x) : x \in S\}$.

Demostración.

($\Rightarrow$) Pizarra.
($\Leftarrow$) Por simetría (porque f^{-1} es iso).

Luego,

- S tiene cota superior en $P \iff f(S)$ tiene cota superior en Q.

Isomorfismos preservan la estructura

$f : (P, \leq) \to (Q, \leq')$ **isomorfismo** si es biyectiva y para todo $x, y \in P$, $x \leq y \iff f(x) \leq' f(y)$.

Proposición

Sean $u \in P$ y $S \subseteq P$. Entonces
u es cota superior de $S \iff f(u)$ es cota superior de $f(S) := \{f(x) : x \in S\}$.

Demostración.

($\Rightarrow$) Pizarra.
($\Leftarrow$) Por simetría (porque f^{-1} es iso).

Luego,

- S tiene cota superior en $P \iff f(S)$ tiene cota superior en Q.
- S tiene máximo $\iff f(S)$ tiene máximo.

Isomorfismos de posets preservan $\sup$ e $\inf$

Lema

Sean $(P, \leq)$ *y* $(Q, \leq')$ *posets. Sea* $f : P \to Q$ *un isomorfismo y supongamos que* $S \subseteq P$*.*

1. *Se da que:*

$$\textit{existe } \sup S \iff \textit{existe } \sup f(S)$$

y en el caso de que existan, se tiene que

$$f(\sup S) = \sup f(S).$$

Isomorfismos de posets preservan $\sup$ e $\inf$

Lema

Sean $(P, \leq)$ y $(Q, \leq')$ posets. Sea $f : P \to Q$ un isomorfismo y supongamos que $S \subseteq P$.

1. *Se da que:*

$$\textit{existe } \sup S \iff \textit{existe } \sup f(S)$$

   y en el caso de que existan, se tiene que

$$f(\sup S) = \sup f(S).$$

2. *Dualmente,*

$$\textit{existe } \inf S \iff \textit{existe } \inf f(S)$$

   y en el caso de que existan, se tiene que

$$f(\inf S) = \inf f(S).$$

Dualidad

u es **cota superior** de $S \iff \forall x \in S, \quad x \leq u$.

Dualidad

u es **cota superior** de $S \iff \forall x \in S, \quad x \leq u$.

¿Si damos vuelta el orden?

Dualidad

u es **cota** inferior de $S \iff \forall x \in S, \quad x \geq u.$

¿Si damos vuelta el orden? Obtenemos cota inferior.

Dualidad

u es **cota** inferior de $S \iff \forall x \in S, \quad x \geq u$.

¿Si damos vuelta el orden? Obtenemos cota inferior.
En la definición de que $s \in L$ es supremo de $S \subseteq L$:

s es una cota superior de S y $\forall b \in L$, b es cota superior b de $S \implies s \leq b$.

Dualidad

u es **cota** inferior de $S \iff \forall x \in S, \quad x \geq u$.

¿Si damos vuelta el orden? Obtenemos cota inferior.
En la definición de que $s \in L$ es supremo de $S \subseteq L$:

s es una cota superior de S y $\forall b \in L$, b es cota superior b de $S \implies s \leq b$.

Damos vuelta,

Dualidad

u es **cota** inferior de $S \iff \forall x \in S, \quad x \geq u$.

¿Si damos vuelta el orden? Obtenemos cota inferior.
En la definición de que $s \in L$ es supremo de $S \subseteq L$:

s es una cota superior de S y $\forall b \in L$, b es cota superior b de $S \implies s \leq b$.

Damos vuelta,

Dualidad

u es **cota** inferior de $S \iff \forall x \in S, \quad x \geq u$.

¿Si damos vuelta el orden? Obtenemos cota inferior.
En la definición de que $s \in L$ es supremo de $S \subseteq L$:

s es una cota inferior de S y $\forall b \in L$, b es cota inferior b de $S \implies s \geq b$.

Damos vuelta, y queda el ínfimo.

Dualidad

u es **cota** inferior de $S \iff \forall x \in S, \quad x \geq u$.

¿Si damos vuelta el orden? Obtenemos cota inferior.
En la definición de que $s \in L$ es supremo de $S \subseteq L$:

s es una cota inferior de S y $\forall b \in L$, b es cota inferior b de $S \implies s \geq b$.

Damos vuelta, y queda el ínfimo.

Dualidad para posets reticulados

Toda propiedad válida para todos los reticulados también vale al intercambiar $\leq$ con $\geq$, "superior" con "inferior", $\sup$ con ínf, máx con mín, ...

¿Cómo demostrar propiedades de supremo e ínfimo?

Lema

Sea $(L, \leq)$ *poset reticulado, y elementos* $x, y, u, l \in L$.

- $x \leq x \vee y, \quad y \leq x \vee y$.

¿Cómo demostrar propiedades de supremo e ínfimo?

Lema

Sea $(L, \leq)$ *poset reticulado, y elementos* $x, y, u, l \in L$.

- $x \leq x \vee y, \quad y \leq x \vee y$.
- $x \vee y \leq u \iff x \leq u \ \& \ y \leq u$.

¿Cómo demostrar propiedades de supremo e ínfimo?

Lema

Sea $(L, \leq)$ *poset reticulado, y elementos* $x, y, u, l \in L$.

- $x \leq x \vee y, \quad y \leq x \vee y.$
- $x \vee y \leq u \iff x \leq u \ \& \ y \leq u.$

Dualmente,

- $x \wedge y \leq x, \quad x \wedge y \leq y.$
- $l \leq x \wedge y \iff l \leq x \ \& \ l \leq y.$

¿Cómo demostrar propiedades de supremo e ínfimo?

Lema

Sea $(L, \leq)$ *poset reticulado, y elementos* $x, y, u, l \in L$*.*

- $x \leq x \vee y, \quad y \leq x \vee y.$
- $x \vee y \leq u \iff x \leq u \;\&\; y \leq u.$

Dualmente,

- $x \wedge y \leq x, \quad x \wedge y \leq y.$
- $l \leq x \wedge y \iff l \leq x \;\&\; l \leq y.$

Demostración.

Pizarra.

¿Cómo demostrar propiedades de supremo e ínfimo?

Lema

Sea $(L, \leq)$ *poset reticulado, y elementos* $x, y, u, l \in L$.

- $x \leq x \vee y, \quad y \leq x \vee y.$
- $x \vee y \leq u \iff x \leq u \;\&\; y \leq u.$

Dualmente,

- $x \wedge y \leq x, \quad x \wedge y \leq y.$
- $l \leq x \wedge y \iff l \leq x \;\&\; l \leq y.$

Demostración.

Pizarra.

(En todo poset,

- $\sup X \leq u \iff \forall x \in X,\ x \leq u;$
- $l \leq \inf X \iff \forall x \in X,\ l \leq x,$

si existen).

¿Cómo demostrar propiedades de supremo e ínfimo?

Lema

Sea $(L, \leq)$ *poset reticulado, y elementos* $x, y, u, l \in L$.

$$x \leq x \vee y, \quad y \leq x \vee y. \qquad x \wedge y \leq x, \quad x \wedge y \leq y.$$

$$x \vee y \leq u \iff x \leq u \;\&\; y \leq u. \qquad l \leq x \wedge y \iff l \leq x \;\&\; l \leq y.$$

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

¿Cómo demostrar propiedades de supremo e ínfimo?

Lema

Sea $(L, \leq)$ *poset reticulado, y elementos* $x, y, u, l \in L$.

$x \leq x \vee y, \quad y \leq x \vee y.$ $\qquad$ $x \wedge y \leq x, \quad x \wedge y \leq y.$

$x \vee y \leq u \iff x \leq u \ \& \ y \leq u.$ $\qquad$ $l \leq x \wedge y \iff l \leq x \ \& \ l \leq y.$

Aplicaciones

- Leyes de compatibilidad o **monotonía**:

$$x \leq z \text{ e } y \leq w \quad \text{implican} \quad x \vee y \leq z \vee w, \quad x \wedge y \leq z \wedge w.$$

¿Cómo demostrar propiedades de supremo e ínfimo?

Lema

Sea $(L, \leq)$ *poset reticulado, y elementos* $x, y, u, l \in L$*.*

$x \leq x \vee y, \quad y \leq x \vee y.$ $\qquad x \wedge y \leq x, \quad x \wedge y \leq y.$

$x \vee y \leq u \iff x \leq u \ \& \ y \leq u.$ $\qquad l \leq x \wedge y \iff l \leq x \ \& \ l \leq y.$

Aplicaciones

- Leyes de compatibilidad o **monotonía**:

$$x \leq z \text{ e } y \leq w \quad \text{implican} \quad x \vee y \leq z \vee w, \quad x \wedge y \leq z \wedge w.$$

- Desigualdades distributivas:

$$x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$
$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee z).$$