Introducción a la Lógica y la Computación

Mariana Badano   Héctor Gramaglia
Pedro Sánchez Terraf   Mauricio Tellechea
Guido Ivetta

FaMAF, 3 de noviembre de 2021

Contenidos estimados para hoy

1. Lenguajes no regulares
   - Lema de bombeo (Pumping Lemma)
   - Aplicación del Lema
   - Juego de no regularidad
2. Lenguajes libres de contexto
   - Gramáticas libres de contexto
   - Gramática para expresiones aritméticas

Teorema

L regular $\implies$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para toda cadena $\alpha \in L$ con $|\alpha| \geqslant k$ existen palabras β, γ, δ tales que

- $\alpha = \beta\gamma\delta$;
- $\gamma \neq \epsilon$;
- $|\beta\gamma| \leqslant k$; *y*
- *para todo* $n > 0$, $\beta\gamma^n\delta \in L$.

$$\beta \overbrace{\gamma\gamma\cdots\gamma}^{n \text{ veces}} \delta$$

Lema de bombeo (Pumping Lemma)

Teorema

L regular $\implies$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para toda cadena $\alpha \in L$ con $|\alpha| \geqslant k$ existen palabras β, γ, δ tales que

- $\alpha = \beta\gamma\delta$;
- $\gamma \neq \epsilon$;
- $|\beta\gamma| \leqslant k$; *y*
- *para todo* $n > 0$, $\beta\gamma^n\delta \in L$.

Toda palabra larga de un lenguaje regular L tiene un prefijo corto con una parte "repetible" (sin salirse de L).

Lema de bombeo (Pumping Lemma)

Teorema

L regular $\implies$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para toda cadena $\alpha \in L$ con $|\alpha| \geqslant k$ existen palabras β, γ, δ tales que

- $\alpha = \beta\gamma\delta$;
- $\gamma \neq \epsilon$;
- $|\beta\gamma| \leqslant k$; *y*
- *para todo* $n > 0$, $\beta\gamma^n\delta \in L$.

Toda palabra larga de un lenguaje regular L tiene un prefijo corto con una parte “repetible” (sin salirse de L).

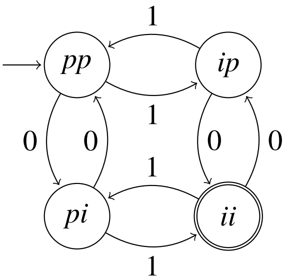
La longitud del prefijo se puede acotar viendo un autómata $\mathbb{A}$ que acepte L (y entonces $k \leqslant |\mathbb{A}|$).

Ejemplo de validez del Lema de bombeo

Toda palabra larga de un lenguaje regular L tiene un prefijo corto con una parte “repetible” (sin salirse de L).

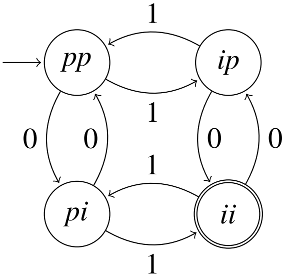
Ejemplo de validez del Lema de bombeo

Toda palabra larga de un lenguaje regular L tiene un prefijo corto con una parte “repetible” (sin salirse de L).



Ejemplo de validez del Lema de bombeo

Toda palabra larga de un lenguaje regular L tiene un prefijo corto con una parte “repetible” (sin salirse de L).

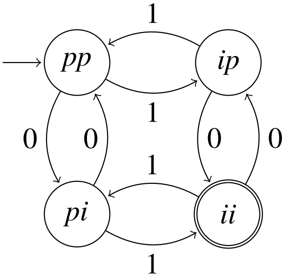


Ejercicio

¿Quién es $L(\mathbb{A})$?

Ejemplo de validez del Lema de bombeo

Toda palabra larga de un lenguaje regular L tiene un prefijo corto con una parte "repetible" (sin salirse de L).



Ejercicio

¿Quién es $L(\mathbb{A})$? ¡Encuesta!

$|11| \geq 2$, $|11|$ par

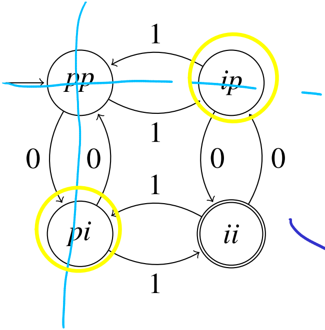
$11 \notin L(\mathbb{A})$ $|11| \equiv 2 (4)$

$001 \notin L(\mathbb{A})$

$|001|_0$ es par

$|001|_1$ es impar.

Toda palabra larga de un lenguaje regular L tiene un prefijo corto con una parte "repetible" (sin salirse de L).



Ejercicio

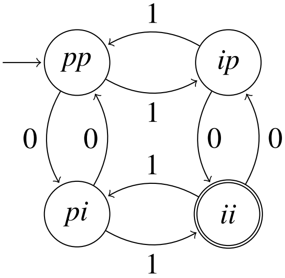
¿Quién es $L(\mathbb{A})$? ¡Encuesta!

$$L(\mathbb{A}) = \{\alpha \in \{0,1\}^* : |\alpha|_0, |\alpha|_1 \text{ impares}\}$$

es un "producto directo".

Ejemplo de validez del Lema de bombeo

Toda palabra larga de un lenguaje regular L tiene un prefijo corto con una parte “repetible” (sin salirse de L).



Ejercicio

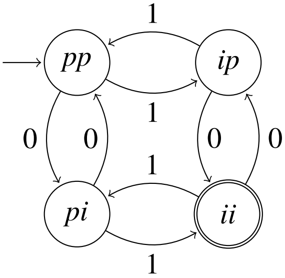
¿Quién es $L(\mathbb{A})$? ¡Encuesta!

$$L(\mathbb{A}) = \{\alpha \in \{0,1\}^* : |\alpha|_0, |\alpha|_1 \text{ impares}\}$$

$$pp \xrightarrow{0} pi \xrightarrow{1} ii \xrightarrow{1} pi \xrightarrow{1} ii$$

Ejemplo de validez del Lema de bombeo

Toda palabra larga de un lenguaje regular L tiene un prefijo corto con una parte "repetible" (sin salirse de L).



Ejercicio

¿Quién es $L(\mathbb{A})$? ¡Encuesta!

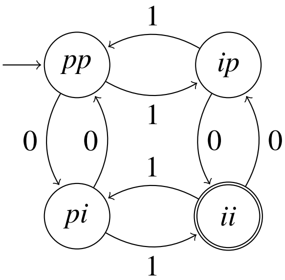
$$L(\mathbb{A}) = \{\alpha \in \{0,1\}^* : |\alpha|_0, |\alpha|_1 \text{ impares}\}$$

$$pp \xrightarrow{0} pi \xrightarrow{1} ii \xrightarrow{1} pi \xrightarrow{1} ii$$

Se repite un estado.

Ejemplo de validez del Lema de bombeo

Toda palabra larga de un lenguaje regular L tiene un prefijo corto con una parte “repetible” (sin salirse de L).



Ejercicio

¿Quién es $L(\mathbb{A})$? ¡Encuesta!

$$L(\mathbb{A}) = \{\alpha \in \{0,1\}^* : |\alpha|_0, |\alpha|_1 \text{ impares}\}$$

$$\underbrace{pp \overbrace{\xrightarrow{0}}^{\beta} \color{red}{pi} \overbrace{\xrightarrow{1} ii \xrightarrow{1}}^{\rho} \color{red}{pi} \overbrace{\xrightarrow{1}}^{\delta} ii}_{\alpha}$$

Se repite un estado.

Ejemplo más largo:

011111

||

$\beta\rho\rho\delta \in L(A)$

$$\color{red}{pp} \xrightarrow{0} pi \xrightarrow{1} ii \xrightarrow{0} ip \xrightarrow{1} \color{red}{pp} \xrightarrow{0} pi \xrightarrow{1} ii$$

Prueba del Lema de bombeo

Sea L regular. Tenemos que encontrar $k \in \mathbb{N}$ tal que:

Toda palabra $\alpha \in L$ larga ($\geqslant k$) tiene un prefijo $\beta\gamma$ corto ($\leqslant k$) con una parte ($\gamma \neq \epsilon$) "repetible" (sin salirse de L).

Prueba del Lema de bombeo

Sea L regular. Tenemos que encontrar $k \in \mathbb{N}$ tal que:

Toda palabra $\alpha \in L$ larga ($\geqslant k$) tiene un prefijo $\beta\gamma$ corto ($\leqslant k$) con una parte ($\gamma \neq \epsilon$) “repetible” (sin salirse de L).

Demostración.

Sea $\mathbb{A}$ un DFA tal que $L(\mathbb{A}) = L$, y sea k la cantidad de estados de $\mathbb{A}$.

Prueba del Lema de bombeo

Sea L regular. Tenemos que encontrar $k \in \mathbb{N}$ tal que:

Toda palabra $\alpha \in L$ larga ($\geqslant k$) tiene un prefijo $\beta\gamma$ corto ($\leqslant k$) con una parte ($\gamma \neq \epsilon$) “repetible” (sin salirse de L).

Demostración.

Sea $\mathbb{A}$ un DFA tal que $L(\mathbb{A}) = L$, y sea k la cantidad de estados de $\mathbb{A}$.
Si α es más larga que k y es aceptada por $\mathbb{A}$, al consumirse los primeros k símbolos se tiene que haber repetido algún estado. Sea q el primer estado que aparece dos veces.

Prueba del Lema de bombeo

Sea L regular. Tenemos que encontrar $k \in \mathbb{N}$ tal que:

Toda palabra $\alpha \in L$ larga ($\geqslant k$) tiene un prefijo $\beta\gamma$ corto ($\leqslant k$) con una parte ($\gamma \neq \epsilon$) "repetible" (sin salirse de L).

Demostración.

Sea $\mathbb{A}$ un DFA tal que $L(\mathbb{A}) = L$, y sea k la cantidad de estados de $\mathbb{A}$.
Si α es más larga que k y es aceptada por $\mathbb{A}$, al consumirse los primeros k símbolos se tiene que haber repetido algún estado. Sea q el primer estado que aparece dos veces.
Entonces β es el prefijo que consume antes que aparezca q por primera vez y γ lo que se consume entre la primera y la segunda vez (es no vacía dado que es un DFA).

Prueba del Lema de bombeo

Sea L regular. Tenemos que encontrar $k \in \mathbb{N}$ tal que:

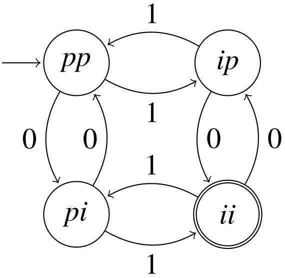
Toda palabra $\alpha \in L$ larga ($\geqslant k$) tiene un prefijo $\beta\gamma$ corto ($\leqslant k$) con una parte ($\gamma \neq \epsilon$) "repetible" (sin salirse de L).

Demostración.

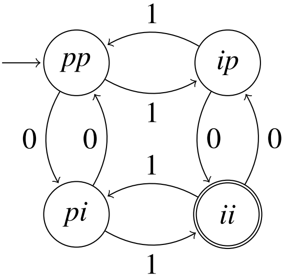
Sea $\mathbb{A}$ un DFA tal que $L(\mathbb{A}) = L$, y sea k la cantidad de estados de $\mathbb{A}$.
Si α es más larga que k y es aceptada por $\mathbb{A}$, al consumirse los primeros k símbolos se tiene que haber repetido algún estado. Sea q el primer estado que aparece dos veces. Ojo!
Entonces β es el prefijo que consume antes que aparezca q por primera vez y γ lo que se consume entre la primera y la segunda vez (es no vacía dado que es un DFA).
Como después de consumir γ vuelvo a q, puedo hacer ese bucle todas las veces que quiera.

Sucesión hipotética de Lucía   pp → pi → ii → ip → pi → pp

Volviendo al ejemplo



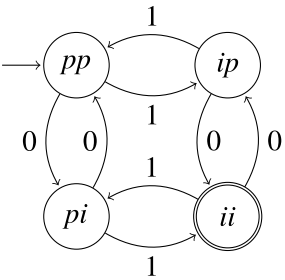
Volviendo al ejemplo



Debo elegir el 1er estado que se repite, sino $|\beta\gamma|$ podría ser más largo que k (Ejemplo, tomar $\varphi = pi$ abajo)
$k = 4$

$$\overset{\epsilon}{\beta}\; pp \underbrace{\xrightarrow{0} pi \xrightarrow{1} ii \xrightarrow{0} ip \xrightarrow{1}}_{\gamma} pp \xrightarrow{0} pi \xrightarrow{1} ii$$

Volviendo al ejemplo



$$\overset{\epsilon}{\underset{\beta}{}}\, pp \underbrace{\xrightarrow{0} pi \xrightarrow{1} ii \xrightarrow{0} ip \xrightarrow{1}}_{\gamma} pp \xrightarrow{0} pi \xrightarrow{1} ii$$

$$pp \underbrace{\xrightarrow{1}}_{\beta} ip \underbrace{\xrightarrow{0} ii \xrightarrow{0}}_{\gamma} ip \xrightarrow{0} ii$$

Aplicación del Lema

L regular $\implies$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para toda cadena $\alpha \in L$ con $|\alpha| \geqslant k$ existen palabras β, γ, δ tales que $\alpha = \beta\gamma\delta$, $\gamma \neq \epsilon$, $|\beta\gamma| \leqslant k$, y para todo $n > 0$, $\beta\gamma^n\delta \in L$.

Aplicación del Lema

L regular $\implies$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para toda cadena $\alpha \in L$ con $|\alpha| \geqslant k$ existen palabras β, γ, δ tales que $\alpha = \beta\gamma\delta$, $\gamma \neq \epsilon$, $|\beta\gamma| \leqslant k$, y para todo $n > 0$, $\beta\gamma^n\delta \in L$.

Realmente, el Lema de Bombeo se usa para ver que un lenguaje no es regular.

Aplicación del Lema

L regular $\implies$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para toda cadena $\alpha \in L$ con $|\alpha| \geqslant k$ existen palabras β, γ, δ tales que $\alpha = \beta\gamma\delta$, $\gamma \neq \epsilon$, $|\beta\gamma| \leqslant k$, y para todo $n > 0$, $\beta\gamma^n\delta \in L$.

Realmente, el Lema de Bombeo se usa para ver que un lenguaje no es regular.

¡Contrarrecíproca!

Si para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $\alpha \in L$ con $|\alpha| \geqslant k$ tal que para todas β, γ, δ tales que $\alpha = \beta\gamma\delta$, $\gamma \neq \epsilon$ y $|\beta\gamma| \leqslant k$, existe $n > 0$ tal que $\beta\gamma^n\delta \notin L$, entonces L no es regular

Aplicación del Lema

L regular $\implies$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para toda cadena $\alpha \in L$ con $|\alpha| \geqslant k$ existen palabras β, γ, δ tales que $\alpha = \beta\gamma\delta$, $\gamma \neq \epsilon$, $|\beta\gamma| \leqslant k$, y para todo $n > 0$, $\beta\gamma^n\delta \in L$.

Realmente, el Lema de Bombeo se usa para ver que un lenguaje no es regular.

¡Contrarrecíproca!

Si para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $\alpha \in L$ con $|\alpha| \geqslant k$ tal que para todas β, γ, δ tales que $\alpha = \beta\gamma\delta$, $\gamma \neq \epsilon$ y $|\beta\gamma| \leqslant k$, existe $n > 0$ tal que $\beta\gamma^n\delta \notin L$, entonces L no es regular

Si hay palabras en L arbitrariamente largas que no tienen parte repetible al principio, entonces L no es regular

Aplicación del Lema, versión juego

Si para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $\alpha \in L$ con $|\alpha| \geqslant k$ tal que para todas β, γ, δ tales que $\alpha = \beta\gamma\delta$, $\gamma \neq \epsilon$ y $|\beta\gamma| \leqslant k$, existe $n > 0$ tal que $\beta\gamma^n\delta \notin L$, entonces L no es regular

Aplicación del Lema, versión juego

Si para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $\alpha \in L$ con $|\alpha| \geqslant k$ tal que para todas β, γ, δ tales que $\alpha = \beta\gamma\delta$, $\gamma \neq \epsilon$ y $|\beta\gamma| \leqslant k$, existe $n > 0$ tal que $\beta\gamma^n\delta \notin L$, entonces L no es regular

En los "para todo" juega el adversario y en los "existe" jugamos nosotros.

Aplicación del Lema, versión juego

Si para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $\alpha \in L$ con $|\alpha| \geqslant k$ tal que para todas β, γ, δ tales que $\alpha = \beta\gamma\delta$, $\gamma \neq \epsilon$ y $|\beta\gamma| \leqslant k$, existe $n > 0$ tal que $\beta\gamma^n\delta \notin L$, entonces L no es regular

En los "para todo" juega el adversario y en los "existe" jugamos nosotros.

1. El adversario elige $k \in \mathbb{N}$ (no lo conocemos).

Aplicación del Lema, versión juego

Si para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $\alpha \in L$ con $|\alpha| \geqslant k$ tal que para todas β, γ, δ tales que $\alpha = \beta\gamma\delta$, $\gamma \neq \epsilon$ y $|\beta\gamma| \leqslant k$, existe $n > 0$ tal que $\beta\gamma^n\delta \notin L$, entonces L no es regular

En los "para todo" juega el adversario y en los "existe" jugamos nosotros.

1. El adversario elige $k \in \mathbb{N}$ (no lo conocemos).
2. Nosotros debemos dar $\alpha \in L$ con $|\alpha| \geqslant k$.

Aplicación del Lema, versión juego

Si para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $\alpha \in L$ con $|\alpha| \geqslant k$ tal que para todas β, γ, δ tales que $\alpha = \beta\gamma\delta$, $\gamma \neq \epsilon$ y $|\beta\gamma| \leqslant k$, existe $n > 0$ tal que $\beta\gamma^n\delta \notin L$, entonces L no es regular

En los "para todo" juega el adversario y en los "existe" jugamos nosotros.

1. El adversario elige $k \in \mathbb{N}$ (no lo conocemos).
2. Nosotros debemos dar $\alpha \in L$ con $|\alpha| \geqslant k$.
3. El adversario descompone α en tres pedazos $\beta\gamma\delta$ (pero debe cumplir que $|\beta\gamma| \leqslant k$ y que $\gamma \neq \epsilon$).

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Aplicación del Lema, versión juego

Si para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $\alpha \in L$ con $|\alpha| \geqslant k$ tal que para todas β, γ, δ tales que $\alpha = \beta\gamma\delta$, $\gamma \neq \epsilon$ y $|\beta\gamma| \leqslant k$, existe $n > 0$ tal que $\beta\gamma^n\delta \notin L$, entonces L no es regular

En los "para todo" juega el adversario y en los "existe" jugamos nosotros.

1. El adversario elige $k \in \mathbb{N}$ (no lo conocemos).
2. Nosotros debemos dar $\alpha \in L$ con $|\alpha| \geqslant k$.
3. El adversario descompone α en tres pedazos $\beta\gamma\delta$ (pero debe cumplir que $|\beta\gamma| \leqslant k$ y que $\gamma \neq \epsilon$).
4. Nosotros damos un $n > 0$ y armamos $\beta\gamma^n\delta \notin L$.

Aplicación del Lema, versión juego

Si para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $\alpha \in L$ con $|\alpha| \geqslant k$ tal que para todas β, γ, δ tales que $\alpha = \beta\gamma\delta$, $\gamma \neq \epsilon$ y $|\beta\gamma| \leqslant k$, existe $n > 0$ tal que $\beta\gamma^n\delta \notin L$, entonces L no es regular

En los "para todo" juega el adversario y en los "existe" jugamos nosotros.

1. El adversario elige $k \in \mathbb{N}$ (no lo conocemos).
2. Nosotros debemos dar $\alpha \in L$ con $|\alpha| \geqslant k$.
3. El adversario descompone α en tres pedazos $\beta\gamma\delta$ (pero debe cumplir que $|\beta\gamma| \leqslant k$ y que $\gamma \neq \epsilon$).
4. Nosotros damos un $n > 0$ y armamos $\beta\gamma^n\delta \notin L$.

Si podemos dar una estrategia para ganar siempre este juego, entonces L no es regular.

Ejemplo de estrategia

1. El adversario elige $k \in \mathbb{N}$.
2. Nosotros damos $\alpha \in L$ con $|\alpha| \geqslant k$.
3. El adversario descompone α como $\beta\gamma\delta$ (con $|\beta\gamma| \leqslant k$ y que $\gamma \neq \epsilon$).
4. Nosotros damos un $n > 0$ y armamos $\beta\gamma^n\delta \notin L$.

Ejemplo de estrategia

1. El adversario elige $k \in \mathbb{N}$.
2. Nosotros damos $\alpha \in L$ con $|\alpha| \geqslant k$.
3. El adversario descompone α como $\beta\gamma\delta$ (con $|\beta\gamma| \leqslant k$ y que $\gamma \neq \epsilon$).
4. Nosotros damos un $n > 0$ y armamos $\beta\gamma^n\delta \notin L$.

$\varepsilon, 01, 0011, \ldots$

Estrategia para ver que $L_{01} := \{0^n 1^n : n \in \mathbb{N}\}$ no es regular

Ejemplo de estrategia

1. El adversario elige $k \in \mathbb{N}$.
2. Nosotros damos $\alpha \in L$ con $|\alpha| \geqslant k$.
3. El adversario descompone α como $\beta\gamma\delta$ (con $|\beta\gamma| \leqslant k$ y que $\gamma \neq \epsilon$).
4. Nosotros damos un $n > 0$ y armamos $\beta\gamma^n\delta \notin L$.

Estrategia para ver que $L_{01} := \{0^n 1^n : n \in \mathbb{N}\}$ no es regular

- Adversario elige k.

Ejemplo de estrategia

1. El adversario elige $k \in \mathbb{N}$.
2. Nosotros damos $\alpha \in L$ con $|\alpha| \geqslant k$.
3. El adversario descompone α como $\beta\gamma\delta$ (con $|\beta\gamma| \leqslant k$ y que $\gamma \neq \epsilon$).
4. Nosotros damos un $n > 0$ y armamos $\beta\gamma^n\delta \notin L$.

Estrategia para ver que $L_{01} := \{0^n 1^n : n \in \mathbb{N}\}$ no es regular

- Adversario elige k.
- Nosotros proponemos $0^k 1^k \in L$.

Ejemplo de estrategia

1. El adversario elige $k \in \mathbb{N}$.
2. Nosotros damos $\alpha \in L$ con $|\alpha| \geqslant k$.
3. El adversario descompone α como $\beta\gamma\delta$ (con $|\beta\gamma| \leqslant k$ y que $\gamma \neq \epsilon$).
4. Nosotros damos un $n > 0$ y armamos $\beta\gamma^n\delta \notin L$.

Estrategia para ver que $L_{01} := \{0^n 1^n : n \in \mathbb{N}\}$ no es regular

- Adversario elige k.
- Nosotros proponemos $0^k 1^k \in L$.
- Adversario descompone $0^k 1^k = \beta\gamma\delta$

Ejemplo de estrategia

1. El adversario elige $k \in \mathbb{N}$.
2. Nosotros damos $\alpha \in L$ con $|\alpha| \geqslant k$.
3. El adversario descompone α como $\beta\gamma\delta$ (con $|\beta\gamma| \leqslant k$ y que $\gamma \neq \epsilon$).
4. Nosotros damos un $n > 0$ y armamos $\beta\gamma^n\delta \notin L$.

Estrategia para ver que $L_{01} := \{0^n1^n : n \in \mathbb{N}\}$ no es regular

- Adversario elige k.
- Nosotros proponemos $0^k1^k \in L$.
- Adversario descompone $0^k1^k = \beta\gamma\delta$
  ¡$\beta\gamma$ está hecha sólo de ceros!

$$\overbrace{\underbrace{0000000}_{\beta\gamma}}^{k}\ 1111111$$

$\gamma = 0^\ell$ $\quad \ell > 0$

Ejemplo de estrategia

1. El adversario elige $k \in \mathbb{N}$.
2. Nosotros damos $\alpha \in L$ con $|\alpha| \geqslant k$.
3. El adversario descompone α como $\beta\gamma\delta$ (con $|\beta\gamma| \leqslant k$ y que $\gamma \neq \epsilon$).
4. Nosotros damos un $n > 0$ y armamos $\beta\gamma^n\delta \notin L$.

Estrategia para ver que $L_{01} := \{0^n 1^n : n \in \mathbb{N}\}$ no es regular

- Adversario elige k.
- Nosotros proponemos $0^k 1^k \in L$.
- Adversario descompone $0^k 1^k = \beta\gamma\delta$
  ¡$\beta\gamma$ está hecha sólo de ceros!
- Nosotros jugamos $n = 2$ y ganamos (porque $\beta\gamma^2\delta$ tiene más 0s que 1s y entonces no está en L_{01}).

$$\overbrace{0000000}^{k}1111111$$

$$\underbrace{00000}_{\beta}\underbrace{0}_{\gamma}\underbrace{0\,1111111}_{\delta}$$

Lenguajes libres de contexto

Si bien $L_{01} = \{0^n 1^n : n \in \mathbb{N}\}$ no es regular, se puede describir de una manera muy simple

Lenguajes libres de contexto

Si bien $L_{01} = \{0^n 1^n : n \in \mathbb{N}\}$ no es regular, se puede describir de una manera muy simple

L_{01} es libre de contexto

$$S \longrightarrow 0\,S\,1$$
$$S \longrightarrow \epsilon$$

Lenguajes libres de contexto

Si bien $L_{01} = \{0^n 1^n : n \in \mathbb{N}\}$ no es regular, se puede describir de una manera muy simple

L_{01} es libre de contexto

$$S \longrightarrow 0\,S\,1$$
$$S \longrightarrow \epsilon$$

Esto es un ejemplo de **gramática libre de contexto**. Podemos **producir** cualquier palabra de L_{01}:

Lenguajes libres de contexto

Si bien $L_{01} = \{0^n 1^n : n \in \mathbb{N}\}$ no es regular, se puede describir de una manera muy simple

L_{01} es libre de contexto

$$S \longrightarrow 0\,S\,1$$
$$S \longrightarrow \epsilon$$

Esto es un ejemplo de **gramática libre de contexto**. Podemos **producir** cualquier palabra de L_{01}:

$$S \Longrightarrow 0\,S\,1$$

Lenguajes libres de contexto

Si bien $L_{01} = \{0^n 1^n : n \in \mathbb{N}\}$ no es regular, se puede describir de una manera muy simple

L_{01} es libre de contexto

$$S \longrightarrow 0\,S\,1$$
$$S \longrightarrow \epsilon$$

Esto es un ejemplo de **gramática libre de contexto**. Podemos **producir** cualquier palabra de L_{01}:

$$S \Longrightarrow 0\,S\,1 \Longrightarrow 0\,0\,S\,1\,1$$

Lenguajes libres de contexto

Si bien $L_{01} = \{0^n 1^n : n \in \mathbb{N}\}$ no es regular, se puede describir de una manera muy simple

L_{01} es libre de contexto

$$S \longrightarrow 0\,S\,1$$
$$S \longrightarrow \epsilon$$

Esto es un ejemplo de **gramática libre de contexto**. Podemos **producir** cualquier palabra de L_{01}:

$$S \Longrightarrow 0\,S\,1 \Longrightarrow 0\,0\,S\,1\,1 \Longrightarrow 0\,0\,0\,S\,1\,1\,1$$

Si bien $L_{01} = \{0^n 1^n : n \in \mathbb{N}\}$ no es regular, se puede describir de una manera muy simple

L_{01} es libre de contexto

$$
\begin{aligned}
S &\longrightarrow 0\,S\,1 \\
S &\longrightarrow \epsilon
\end{aligned}
$$

Esto es un ejemplo de **gramática libre de contexto**. Podemos **producir** cualquier palabra de L_{01}:

$$S \Longrightarrow 0\,S\,1 \Longrightarrow 0\,0\,S\,1\,1 \Longrightarrow 0\,0\,0\,S\,1\,1\,1 \Longrightarrow 0\,0\,0\,\epsilon\,1\,1\,1 = 000111.$$

Gramáticas libres de contexto (CFG)

Una CFG $G = (V, T, P, S)$ está dada por:

- **Variables** (o símbolos **no terminales**): Definen las distintas *categorías sintácticas*.

Gramáticas libres de contexto (CFG)

Una CFG $G = (V, T, P, S)$ está dada por:

- **Variables** (o símbolos **no terminales**): Definen las distintas *categorías sintácticas*.
  $V_{01} := \{S\}$.

Gramáticas libres de contexto (CFG)

Una CFG $G = (V, T, P, S)$ está dada por:

- **Variables** (o símbolos **no terminales**): Definen las distintas *categorías sintácticas*.
  $V_{01} := \{S\}$.
- **Alfabeto terminal**: Conjunto de símbolos sobre los que definimos el lenguaje.
  $T_{01} := \{0, 1\}$.

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Gramáticas libres de contexto (CFG)

Una CFG $G = (V, T, P, S)$ está dada por:

- **Variables** (o símbolos **no terminales**): Definen las distintas *categorías sintácticas*.
  $V_{01} := \{S\}$.
- **Alfabeto terminal**: Conjunto de símbolos sobre los que definimos el lenguaje.
  $T_{01} := \{0, 1\}$.
- **Símbolo inicial**: Es una variable que determina el lenguaje que estamos generando.
  $S_{01} := S$.

Gramáticas libres de contexto (CFG)

Una CFG $G = (V, T, P, S)$ está dada por:

- **Variables** (o símbolos **no terminales**): Definen las distintas *categorías sintácticas*.
  $V_{01} := \{S\}$.
- **Alfabeto terminal**: Conjunto de símbolos sobre los que definimos el lenguaje.
  $T_{01} := \{0, 1\}$.
- **Símbolo inicial**: Es una variable que determina el lenguaje que estamos generando.
  $S_{01} := S$.
- **Reglas** (**o producciones**): representan la definición recursiva del lenguaje: son de la forma $U \longrightarrow \alpha$ donde $\alpha \in (V \cup T)^*$.
  Decimos que U es la *cabeza* y α el *cuerpo*.

Gramática para expresiones aritméticas

$$G_{ar} = (\{E, N, D, I\}, \{a, 0, \ldots, 9, +, *, (,)\}, P_{ar}, E)$$

$$
\begin{array}{rcl}
E & \longrightarrow & N \mid I \mid E + E \mid E * E \mid (E) \\
I & \longrightarrow & a \mid I0 \mid \ldots \mid I9 \\
N & \longrightarrow & 1D \mid \ldots \mid 9D \\
D & \longrightarrow & 0D \mid \ldots \mid 9D \mid \epsilon
\end{array}
$$

$E \to N$
$E \to I$
$E \to E + E$
...

$I \Rightarrow I0 \Rightarrow I90 \Rightarrow a90$

Gramática para expresiones aritméticas

$$G_{ar} = (\{E, N, D, I\}, \{a, 0, \ldots, 9, +, *, (,)\}, P_{ar}, E)$$

$$\begin{array}{rcl}
E & \longrightarrow & N \mid I \mid E + E \mid E * E \mid (E) \\
I & \longrightarrow & a \mid I0 \mid \ldots \mid I9 \\
N & \longrightarrow & 1D \mid \ldots \mid 9D \\
D & \longrightarrow & 0D \mid \ldots \mid 9D \mid \epsilon
\end{array}$$

Sean $\alpha, \beta \in (V \cup T)^*$.

Definición

α **deriva** β ("$\alpha \Longrightarrow \beta$") si β se obtiene reemplazando en α una variable de V por el cuerpo de una producción $V \longrightarrow \gamma$:

$$\underbrace{\alpha' V \alpha''}_{\alpha} \Longrightarrow \underbrace{\alpha' \gamma \alpha''}_{\beta}$$