

Introducción a la Lógica y la Computación

Mariana Badano Héctor Gramaglia
Pedro Sánchez Terraf Mauricio Tellechea
Guido Ivetta César Vallero

FaMAF, 1 de septiembre de 2020



- 1 Reticulados distributivos
 - Reticulados de partes
 - (Contra)ejemplos
 - Teorema M_3-N_5
 - Intermezzo: Posets y Partes
 - Precalentamiento: Representación de posets

- 2 Reticulados complementados y álgebras de Boole
 - Leyes de De Morgan
 - Isomorfismo de álgebras de Boole
 - Ejemplos

- Por favor, respeten la distribución alfabética de cada comisión.

Partes de un conjunto $(\mathcal{P}(A), \subseteq) \longleftrightarrow (\mathcal{P}(A), \cup, \cap)$

- Todo $X \in \mathcal{P}(A)$ tiene un **complemento**: un $Y \in \mathcal{P}(A)$ tal que

$$X \cup Y = 1^{\mathcal{P}(A)} = A \quad X \cap Y = 0^{\mathcal{P}(A)} = \emptyset.$$

Partes de un conjunto $(\mathcal{P}(A), \subseteq) \longleftrightarrow (\mathcal{P}(A), \cup, \cap)$

- Todo $X \in \mathcal{P}(A)$ tiene un **complemento**: un $Y \in \mathcal{P}(A)$ tal que

$$X \cup Y = 1^{\mathcal{P}(A)} = A \quad X \cap Y = 0^{\mathcal{P}(A)} = \emptyset.$$

- Las operaciones **distribuyen**:

$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$$

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z).$$

Reticulados distributivos

Partes de un conjunto $(\mathcal{P}(A), \subseteq) \longleftrightarrow (\mathcal{P}(A), \cup, \cap)$

- Todo $X \in \mathcal{P}(A)$ tiene un **complemento**: un $Y \in \mathcal{P}(A)$ tal que

$$X \cup Y = 1^{\mathcal{P}(A)} = A \quad X \cap Y = 0^{\mathcal{P}(A)} = \emptyset.$$

- Las operaciones **distribuyen**:

$$\begin{aligned} X \cup (Y \cap Z) &= (X \cup Y) \cap (X \cup Z) \\ X \cap (Y \cup Z) &= (X \cap Y) \cup (X \cap Z). \end{aligned}$$

Definición

L es **distributivo** si para todos los $a, b, c \in L$,

$$\begin{aligned} a \vee (b \wedge c) &= (a \vee b) \wedge (a \vee c) \\ a \wedge (b \vee c) &= (a \wedge b) \vee (a \wedge c). \end{aligned}$$

L es **distributivo** si para todos los $a, b, c \in L$,

■ $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

■ $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

L es **distributivo** si para todos los $a, b, c \in L$,

■ $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

■ $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

Ejemplo

- 1 Todos los órdenes totales.
- 2 $(\mathbb{N}, |)$.
- 3 $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ para cada conjunto A .

L es **distributivo** si para todos los $a, b, c \in L$,

■ $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

■ $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

Ejemplo

- 1 Todos los órdenes totales. Por análisis por casos
- 2 $(\mathbb{N}, |)$.
- 3 $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ para cada conjunto A .

L es **distributivo** si para todos los $a, b, c \in L$,

■ $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

■ $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

Ejemplo

- 1 Todos los órdenes totales. Por análisis por casos
- 2 $(\mathbb{N}, |)$. Subreticulados también! D_n
- 3 $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ para cada conjunto A .

Un criterio de distributividad

Sea L un reticulado. $S \subseteq L$ es un **subuniverso** de (L, \vee, \wedge) si es cerrado por las operaciones \vee y \wedge . En tal caso, (S, \vee, \wedge) es un **subreticulado** de (L, \vee, \wedge) .

Un criterio de distributividad

Sea L un reticulado. $S \subseteq L$ es un **subuniverso** de (L, \vee, \wedge) si es cerrado por las operaciones \vee y \wedge . En tal caso, (S, \vee, \wedge) es un **subreticulado** de (L, \vee, \wedge) .

Lema

- *Si L es distributivo y L' es isomorfo a L , entonces L' es distributivo*

Un criterio de distributividad

Sea L un reticulado. $S \subseteq L$ es un **subuniverso** de (L, \vee, \wedge) si es cerrado por las operaciones \vee y \wedge . En tal caso, (S, \vee, \wedge) es un **subreticulado** de (L, \vee, \wedge) .

Lema

- Si L es distributivo y L' es isomorfo a L , entonces L' es distributivo
- Si L es distributivo, entonces todos sus subreticulados lo son.

Un criterio de distributividad

Sea L un reticulado. $S \subseteq L$ es un **subuniverso** de (L, \vee, \wedge) si es cerrado por las operaciones \vee y \wedge . En tal caso, (S, \vee, \wedge) es un **subreticulado** de (L, \vee, \wedge) .

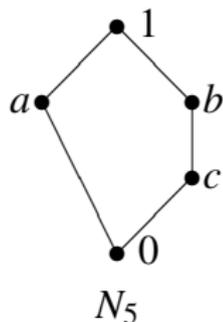
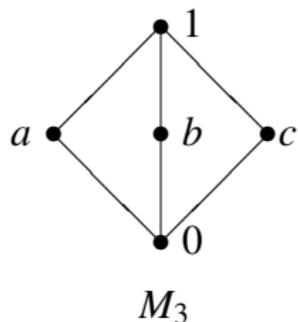
Lema

- Si L es distributivo y L' es isomorfo a L , entonces L' es distributivo
- Si L es distributivo, entonces todos sus subreticulados lo son.

Corolario

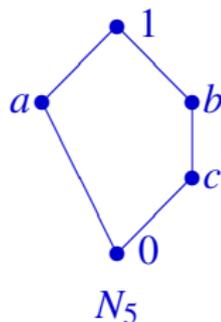
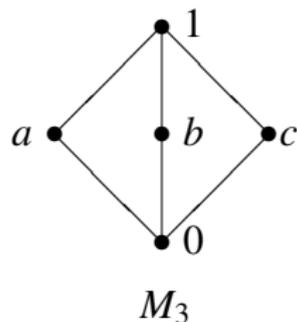
Si L es distributivo y L' es **isomorfo a un subreticulado** L (" L' se **incrusta** en L "), entonces L' es distributivo.

¡Contraejemplos!

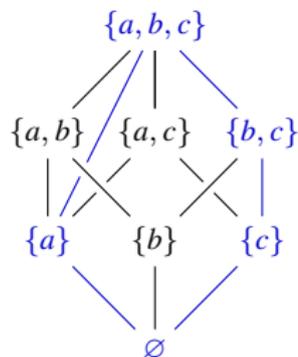


No todos lo son

¡Contraejemplos!

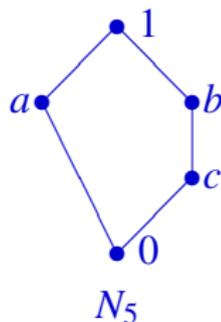
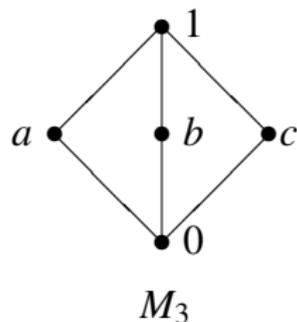


Subposets pero no subreticulados

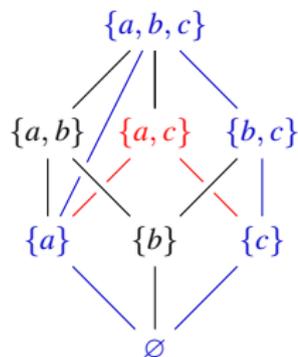


No todos lo son

¡Contraejemplos!

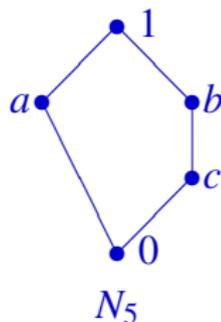
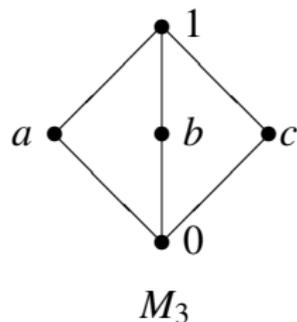


Subposets pero no subreticulados

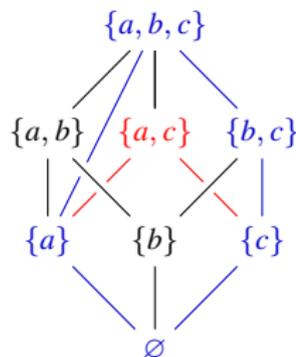


No todos lo son

¡Contraejemplos!



Subposets pero no subreticulados



Lema (Propiedad “cancelativa”)

Sea L distributivo. Para todos $a, b, c \in L$,

$$\left. \begin{array}{l} a \vee b = a \vee c \\ a \wedge b = a \wedge c \end{array} \right\} \implies b = c.$$

Teorema

Un reticulado L es distributivo si y sólo si ninguno de sus subreticulados es isomorfo a M_3 ni a N_5 (i.e., no se incrustan).

Teorema

Un reticulado L es distributivo si y sólo si ninguno de sus subreticulados es isomorfo a M_3 ni a N_5 (i.e., no se incrustan).

Teóricamente es muy limpio, pero como algoritmo apesta.

Teorema

Un reticulado L es distributivo si y sólo si ninguno de sus subreticulados es isomorfo a M_3 ni a N_5 (i.e., no se incrustan).

Teóricamente es muy limpio, pero como algoritmo apesta.

Para obtener mejores resultados es necesario poder presentar a los reticulados distributivos y sus operaciones de manera más concreta.

Teorema

Un reticulado L es distributivo si y sólo si ninguno de sus subreticulados es isomorfo a M_3 ni a N_5 (i.e., no se incrustan).

Teóricamente es muy limpio, pero como algoritmo apesta.

Para obtener mejores resultados es necesario poder presentar a los reticulados distributivos y sus operaciones de manera más concreta.

Un **teorema de representación** nos permite entender a una familia estructuras “abstractas” en términos de ejemplos concretos (más manejables)

Teorema

Un reticulado L es distributivo si y sólo si ninguno de sus subreticulados es isomorfo a M_3 ni a N_5 (i.e., no se incrustan).

Teóricamente es muy limpio, pero como algoritmo apesta.

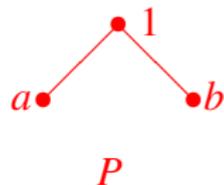
Para obtener mejores resultados es necesario poder presentar a los reticulados distributivos y sus operaciones de manera más concreta.

Un **teorema de representación** nos permite entender a una familia estructuras “abstractas” en términos de ejemplos concretos (más manejables)

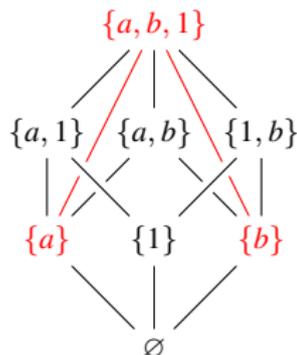
A continuación, representaremos posets usando partes de conjuntos.

Posets y subconjuntos

Poset P

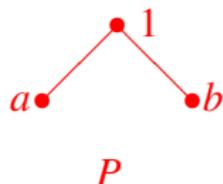


Partes $\mathcal{P}(P)$

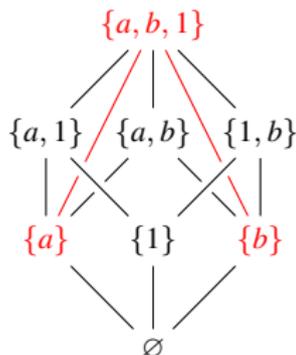


Posets y subconjuntos

Poset P



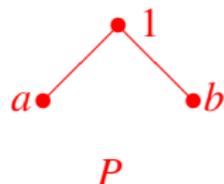
Partes $\mathcal{P}(P)$



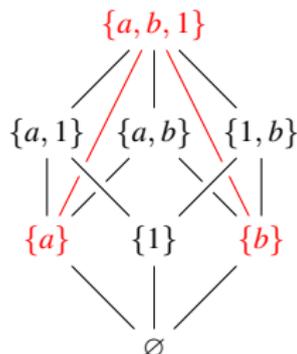
Notemos que cada $d \in P$ se corresponde con el **ideal principal**
 $d \downarrow := \{x \in P : x \leq d\}$.

Posets y subconjuntos

Poset P



Partes $\mathcal{P}(P)$



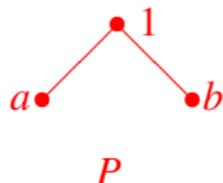
Notemos que cada $d \in P$ se corresponde con el **ideal principal**

$$d \downarrow := \{x \in P : x \leq d\}.$$

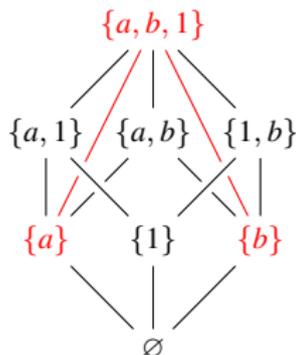
$d \mapsto d \downarrow$ es 1-1

Posets y subconjuntos

Poset P



Partes $\mathcal{P}(P)$



Notemos que cada $d \in P$ se corresponde con el **ideal principal**

$$d \downarrow := \{x \in P : x \leq d\}.$$

$d \mapsto d \downarrow$ es 1-1

Basta ver que $d = \sup d \downarrow = \sup c \downarrow = c$.

Precalentamiento: Representación de posets

De hecho, hay más:

Lema

Para todos $d, c \in P$, $d \leq c \iff d\downarrow \subseteq c\downarrow$.

Precalentamiento: Representación de posets

De hecho, hay más:

Lema

Para todos $d, c \in P$, $d \leq c \iff d\downarrow \subseteq c\downarrow$.

Demostración.

- (\Rightarrow) Por la transitividad de \leq .

Precaentamiento: Representación de posets

De hecho, hay más:

Lema

Para todos $d, c \in P$, $d \leq c \iff d\downarrow \subseteq c\downarrow$.

Demostración.

- (\Rightarrow) Por la transitividad de \leq .
- (\Leftarrow) $d \in c\downarrow$ implica $d \leq c$.

Precalentamiento: Representación de posets

De hecho, hay más:

Lema

Para todos $d, c \in P$, $d \leq c \iff d \downarrow \subseteq c \downarrow$.

Demostración.

- (\Rightarrow) Por la transitividad de \leq .
- (\Leftarrow) $d \in c \downarrow$ implica $d \leq c$.

Teorema

(P, \leq) es isomorfo a un subposet de $(\mathcal{P}(P), \subseteq)$.

Precalentamiento: Representación de posets

De hecho, hay más:

Lema

Para todos $d, c \in P$, $d \leq c \iff d \downarrow \subseteq c \downarrow$.

Demostración.

- (\Rightarrow) Por la transitividad de \leq .
- (\Leftarrow) $d \in c \downarrow$ implica $d \leq c$.

Teorema

(P, \leq) es isomorfo a **un subposet de** $(\mathcal{P}(P), \subseteq)$.

Un teorema de representación más ajustado nos diría a qué subposets de partes es isomorfo.

Precalentamiento: Representación de posets

De hecho, hay más:

Lema

Para todos $d, c \in P$, $d \leq c \iff d \downarrow \subseteq c \downarrow$.

Demostración.

- (\Rightarrow) Por la transitividad de \leq .
- (\Leftarrow) $d \in c \downarrow$ implica $d \leq c$.

Teorema

(P, \leq) es isomorfo a **un subposet de** $(\mathcal{P}(P), \subseteq)$.

Un teorema de representación más ajustado nos diría a qué subposets de partes es isomorfo.

Además “**subposet**” no es compatible con las operaciones.

Recordemos:

- L es **acotado** si tiene primer elemento 0^L y último elemento 1^L .
- Sea L acotado y sean $a, b \in L$. b es un **complemento** de a si

$$a \vee b = 1^L \quad a \wedge b = 0^L.$$

L es **complementado** si todo elemento tiene complemento.

Recordemos:

- L es **acotado** si tiene primer elemento 0^L y último elemento 1^L .
- Sea L acotado y sean $a, b \in L$. b es un **complemento** de a si

$$a \vee b = 1^L \quad a \wedge b = 0^L.$$

L es **complementado** si todo elemento tiene complemento.

Definición (Álgebra de Boole)

Un **álgebra de Boole** $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ es una estructura donde $(B, \vee, \wedge, 0, 1)$ es un retículo distributivo acotado y $\neg : B \rightarrow B$ da un complemento:

$$a \vee \neg a = 1 \quad a \wedge \neg a = 0.$$

Proposición

En toda álgebra de Boole, se dan

$$\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y \quad \neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$$

Proposición

En toda álgebra de Boole, se dan

$$\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y \quad \neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$$

Demostración.

Ver que $\neg x \wedge \neg y$ es complemento de $x \vee y$ y aplicar la propiedad cancelativa.
La segunda ley es análoga.

Definición

Un **isomorfismo de álgebras de Boole**

$f : (B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1) \rightarrow (B', \vee', \wedge', \neg', 0', 1')$ es un iso de retículos

$f : (B, \vee, \wedge) \rightarrow (B', \vee', \wedge')$ tal que para todo $x \in B$,

$$f(\neg x) = \neg' f(x) \quad \text{y} \quad f(0) = 0' \quad \text{y} \quad f(1) = 1'$$

Isomorfismo de álgebras de Boole

Definición

Un **isomorfismo de álgebras de Boole**

$f : (B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1) \rightarrow (B', \vee', \wedge', \neg', 0', 1')$ es un iso de retículos

$f : (B, \vee, \wedge) \rightarrow (B', \vee', \wedge')$ tal que para todo $x \in B$,

$$f(\neg x) = \neg' f(x) \quad \text{y} \quad f(0) = 0' \quad \text{y} \quad f(1) = 1'$$

Son lo mismo que los isos de posets (inducidos por la estructura de retículo).

Isomorfismo de álgebras de Boole

Definición

Un **isomorfismo de álgebras de Boole**

$f : (B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1) \rightarrow (B', \vee', \wedge', \neg', 0', 1')$ es un iso de retículos

$f : (B, \vee, \wedge) \rightarrow (B', \vee', \wedge')$ tal que para todo $x \in B$,

$$f(\neg x) = \neg' f(x) \quad \text{y} \quad f(0) = 0' \quad \text{y} \quad f(1) = 1'$$

Son lo mismo que los isos de posets (inducidos por la estructura de retículo).

Teorema

$f : (B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1) \rightarrow (B', \vee', \wedge', \neg', 0', 1')$ es iso \iff

$f : (B, \leq) \rightarrow (B', \leq')$ es iso.

Isomorfismo de álgebras de Boole

Definición

Un **isomorfismo de álgebras de Boole**

$f : (B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1) \rightarrow (B', \vee', \wedge', \neg', 0', 1')$ es un iso de retículos

$f : (B, \vee, \wedge) \rightarrow (B', \vee', \wedge')$ tal que para todo $x \in B$,

$$f(\neg x) = \neg' f(x) \quad \text{y} \quad f(0) = 0' \quad \text{y} \quad f(1) = 1'$$

Son lo mismo que los isos de posets (inducidos por la estructura de retículo).

Teorema

$f : (B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1) \rightarrow (B', \vee', \wedge', \neg', 0', 1')$ es iso \iff

$f : (B, \leq) \rightarrow (B', \leq')$ es iso.

Demostración.

Si y es complemento de x , $f(x)$ es complemento de $f(y)$ (por estar definido usando el orden), y aplico propiedad cancelativa.

Ejemplos

Bien, ahora a los ejemplos de álgebras de Boole.

Bien, ahora a los ejemplos de álgebras de Boole.

Ejemplo

- $\mathcal{P}(A)$ para todo A .

Bien, ahora a los ejemplos de álgebras de Boole.

Ejemplo

- $\mathcal{P}(A)$ para todo A .
- D_n con $n = p_1 \cdot \dots \cdot p_m$ producto de primos distintos.

Bien, ahora a los ejemplos de álgebras de Boole.

Ejemplo

- $\mathcal{P}(A)$ para todo A .
- D_n con $n = p_1 \cdots p_m$ producto de primos distintos. Es isomorfa a $\mathcal{P}(\{p_1, \dots, p_m\})$.

Bien, ahora a los ejemplos de álgebras de Boole.

Ejemplo

- $\mathcal{P}(A)$ para todo A .
- D_n con $n = p_1 \cdots p_m$ producto de primos distintos. Es isomorfa a $\mathcal{P}(\{p_1, \dots, p_m\})$. Es decir, esencialmente parte del ejemplo anterior.

Bien, ahora a los ejemplos de álgebras de Boole.

Ejemplo

- $\mathcal{P}(A)$ para todo A .
- D_n con $n = p_1 \cdots p_m$ producto de primos distintos. Es isomorfa a $\mathcal{P}(\{p_1, \dots, p_m\})$. Es decir, esencialmente parte del ejemplo anterior.
- ...

Bien, ahora a los ejemplos de álgebras de Boole.

Ejemplo

- $\mathcal{P}(A)$ para todo A .
- D_n con $n = p_1 \cdots p_m$ producto de primos distintos. Es isomorfa a $\mathcal{P}(\{p_1, \dots, p_m\})$. Es decir, esencialmente parte del ejemplo anterior.
- ...
- ...

Bien, ahora a los ejemplos de álgebras de Boole.

Ejemplo

- $\mathcal{P}(A)$ para todo A .
- D_n con $n = p_1 \cdots p_m$ producto de primos distintos. Es isomorfa a $\mathcal{P}(\{p_1, \dots, p_m\})$. Es decir, esencialmente parte del ejemplo anterior.
- ...
- ...

Sí, hay más ejemplos. Pero parece que el conjunto de partes es uno muy importante.

Bien, ahora a los ejemplos de álgebras de Boole.

Ejemplo

- $\mathcal{P}(A)$ para todo A .
- D_n con $n = p_1 \cdots p_m$ producto de primos distintos. Es isomorfa a $\mathcal{P}(\{p_1, \dots, p_m\})$. Es decir, esencialmente parte del ejemplo anterior.
- ...
- ...

Sí, hay más ejemplos. Pero parece que el conjunto de partes es uno muy importante.

Para continuar, podemos imaginarnos formas de asociar una familia de conjuntos a $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$.

Bien, ahora a los ejemplos de álgebras de Boole.

Ejemplo

- $\mathcal{P}(A)$ para todo A .
- D_n con $n = p_1 \cdots p_m$ producto de primos distintos. Es isomorfa a $\mathcal{P}(\{p_1, \dots, p_m\})$. Es decir, esencialmente parte del ejemplo anterior.
- ...
- ...

Sí, hay más ejemplos. Pero parece que el conjunto de partes es uno muy importante.

Para continuar, podemos imaginarnos formas de asociar una familia de conjuntos a $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$.

Una estrategia a lo bestia (exponencial)

Si todo falla, considerará todas las combinaciones.

Una estrategia a lo bestia (exponencial)

Si todo falla, considerará todas las combinaciones.

En este caso, es arrancar con $\mathcal{P}(B)$.

Esta estrategia de fuerza bruta también se usará en la tercera parte de la materia.

Una estrategia a lo bestia (exponencial)

Si todo falla, considerará todas las combinaciones.

En este caso, es arrancar con $\mathcal{P}(B)$.

Esta estrategia de fuerza bruta también se usará en la tercera parte de la materia.

¿Cómo asociamos a cada $b \in B$ un $F(b) \subseteq B$?

Ayuda: usemos el orden (y b) para definir $F(b)$.

Teorema de Representación de álgebras de Boole finitas

Teorema

Para toda álgebra de Boole finita B existe A tal que B es isomorfa a $\mathcal{P}(A)$.

¿Quién es A ?

¿Qué objetos juegan el rol de elementos de A ?

Sea B un poset finito acotado con al menos dos elementos.

Definición

$a \in B$ es un **átomo** si a cubre a 0 . $At(B)$ es el conjunto de los átomos de B .

Sea B un poset finito acotado con al menos dos elementos.

Definición

$a \in B$ es un **átomo** si a cubre a 0 . $At(B)$ es el conjunto de los átomos de B .

Ejercicios

- Supongamos $a \in At(B)$. ¿Cuántos valores posibles puede dar $b \wedge a$?
 - Encontrar el conjunto de átomos de D_n .
 - Sea $a \leq b$. Entonces a es átomo de $B \iff a$ es átomo del subposet $b \downarrow$.
- ↘ Actividad en Aula virtual!