Introducción a la Lógica y la Computación

Mariana Badano Héctor Gramaglia
Pedro Sánchez Terraf Mauricio Tellechea
Guido Ivetta

FaMAF, 1 de octubre de 2021

Contenidos estimados para hoy

1. Completitud de la lógica proposicional
   - Relación entre verdad y demostrabilidad
   - Estrategia de prueba de Completitud
   - Consistencia
   - Conjuntos consistentes maximales
   - Teorema de existencia de modelos

Relación entre verdad y demostrabilidad

¿Cómo se comparan las nociones semánticas con la de derivabilidad?

Relación entre verdad y demostrabilidad

¿Cómo se comparan las nociones semánticas con la de derivabilidad?

Semántica	**Cálculo**
Tautologías (valuar 1)	Teoremas (derivable)
$\models$	$\vdash$
Asignaciones (modelo)	Derivaciones (pruebas formales)

Relación entre verdad y demostrabilidad

¿Cómo se comparan las nociones semánticas con la de derivabilidad?

Semántica	**Cálculo**
Tautologías (valuar 1)	Teoremas (derivable)
$\models$	$\vdash$
Asignaciones (modelo)	Derivaciones (pruebas formales)

Completitud y Corrección de la Lógica Proposicional

Para todos $\Gamma \subseteq PROP$ y $\varphi \in PROP$, se tiene

$$\Gamma \models \varphi \iff \Gamma \vdash \varphi$$

Relación entre verdad y demostrabilidad

¿Cómo se comparan las nociones semánticas con la de derivabilidad?

Semántica	**Cálculo**
Tautologías (valuar 1)	Teoremas (derivable)
$\models$	$\vdash$
Asignaciones (modelo)	Derivaciones (pruebas formales)

Completitud y Corrección de la Lógica Proposicional

Para todos $\Gamma \subseteq PROP$ y $\varphi \in PROP$, se tiene

$$\Gamma \models \varphi \iff \Gamma \vdash \varphi$$

Hoy vamos por la implicación $(\Rightarrow)$: **Completitud**.

Estrategia para ver $\Gamma \models \varphi \implies \Gamma \vdash \varphi$

Vamos por la **contrarrecíproca**.

Estrategia para ver $\Gamma \models \varphi \implies \Gamma \vdash \varphi$

Vamos por la **contrarrecíproca**.

$$\Gamma \nvdash \varphi \implies \Gamma \not\models \varphi \tag{1}$$

Estrategia para ver $\Gamma \models \varphi \implies \Gamma \vdash \varphi$

Vamos por la **contrarrecíproca**.

$$\Gamma \nvdash \varphi \implies \Gamma \not\models \varphi \tag{1}$$

$$\Gamma \nvdash \varphi \implies \exists v : (\forall \psi \in \Gamma .\ [\![\psi]\!]_v = 1) \ \& \ [\![\varphi]\!]_v = 0 \tag{2}$$

Estrategia para ver $\Gamma \models \varphi \implies \Gamma \vdash \varphi$

Vamos por la **contrarrecíproca**.

$$\Gamma \nvdash \varphi \implies \Gamma \not\models \varphi \tag{1}$$

$$\Gamma \nvdash \varphi \implies \exists v : (\forall \psi \in \Gamma.\ [\![\psi]\!]_v = 1)\ \&\ [\![\varphi]\!]_v = 0 \tag{2}$$

$$\Gamma \nvdash \varphi \implies \exists v : [\![\Gamma]\!]_v = 1\ \&\ [\![\neg\varphi]\!]_v = 1 \tag{3}$$

Estrategia para ver $\Gamma \models \varphi \implies \Gamma \vdash \varphi$

Vamos por la **contrarrecíproca**.

$$\Gamma \nvdash \varphi \implies \Gamma \not\models \varphi \tag{1}$$

$$\Gamma \nvdash \varphi \implies \exists v : (\forall \psi \in \Gamma.\ [\![\psi]\!]_v = 1)\ \&\ [\![\varphi]\!]_v = 0 \tag{2}$$

$$\Gamma \nvdash \varphi \implies \exists v : [\![\Gamma]\!]_v = 1\ \&\ [\![\neg\varphi]\!]_v = 1 \tag{3}$$

$$\Gamma \nvdash \varphi \implies \exists v : [\![\Gamma \cup \{\neg\varphi\}]\!]_v = 1 \tag{4}$$

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Estrategia para ver $\Gamma \models \varphi \implies \Gamma \vdash \varphi$

Vamos por la **contrarrecíproca**.

$$\Gamma \nvdash \varphi \implies \Gamma \not\models \varphi \tag{1}$$

$$\Gamma \nvdash \varphi \implies \exists v : (\forall \psi \in \Gamma.\ [\![\psi]\!]_v = 1)\ \&\ [\![\varphi]\!]_v = 0 \tag{2}$$

$$\Gamma \nvdash \varphi \implies \exists v : [\![\Gamma]\!]_v = 1\ \&\ [\![\neg\varphi]\!]_v = 1 \tag{3}$$

$$\Gamma \nvdash \varphi \implies \exists v : [\![\Gamma \cup \{\neg\varphi\}]\!]_v = 1 \tag{4}$$

El foco estará en construir asignaciones ("modelos") que validen ciertos conjuntos.

Estrategia para ver $\Gamma \models \varphi \implies \Gamma \vdash \varphi$

Vamos por la **contrarrecíproca**.

$$\Gamma \nvdash \varphi \implies \Gamma \not\models \varphi \tag{1}$$

$$\Gamma \nvdash \varphi \implies \exists v : (\forall \psi \in \Gamma.\ [\![\psi]\!]_v = 1)\ \&\ [\![\varphi]\!]_v = 0 \tag{2}$$

$$\Gamma \nvdash \varphi \implies \exists v : [\![\Gamma]\!]_v = 1\ \&\ [\![\neg\varphi]\!]_v = 1 \tag{3}$$

$$\Gamma \nvdash \varphi \implies \exists v : [\![\Gamma \cup \{\neg\varphi\}]\!]_v = 1 \tag{4}$$

El foco estará en construir asignaciones (“modelos”) que validen ciertos conjuntos.

Veremos: $\Gamma \nvdash \varphi \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \nvdash \bot$.

Estrategia para ver $\Gamma \models \varphi \implies \Gamma \vdash \varphi$

Vamos por la **contrarrecíproca**.

$$\Gamma \nvdash \varphi \implies \Gamma \not\models \varphi \tag{1}$$
$$\Gamma \nvdash \varphi \implies \exists v : (\forall \psi \in \Gamma.\ [\![\psi]\!]_v = 1)\ \&\ [\![\varphi]\!]_v = 0 \tag{2}$$
$$\Gamma \nvdash \varphi \implies \exists v : [\![\Gamma]\!]_v = 1\ \&\ [\![\neg\varphi]\!]_v = 1 \tag{3}$$
$$\Gamma \nvdash \varphi \implies \exists v : [\![\Gamma \cup \{\neg\varphi\}]\!]_v = 1 \tag{4}$$

El foco estará en construir asignaciones (“modelos”) que validen ciertos conjuntos.

Veremos: $\Gamma \nvdash \varphi \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \nvdash \bot$.

$$\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \nvdash \bot \implies \exists v : [\![\Gamma \cup \{\neg\varphi\}]\!]_v = 1 \tag{5}$$

Estrategia para ver $\Gamma \models \varphi \implies \Gamma \vdash \varphi$

Vamos por la **contrarrecíproca**.

$$\Gamma \nvdash \varphi \implies \Gamma \nvDash \varphi \qquad (1)$$

$$\Gamma \nvdash \varphi \implies \exists v : (\forall \psi \in \Gamma.\ [\![\psi]\!]_v = 1)\ \&\ [\![\varphi]\!]_v = 0 \qquad (2)$$

$$\Gamma \nvdash \varphi \implies \exists v : [\![\Gamma]\!]_v = 1\ \&\ [\![\neg\varphi]\!]_v = 1 \qquad (3)$$

$$\Gamma \nvdash \varphi \implies \exists v : [\![\Gamma \cup \{\neg\varphi\}]\!]_v = 1 \qquad (4)$$

El foco estará en construir asignaciones (“modelos”) que validen ciertos conjuntos.

Veremos: $\Gamma \nvdash \varphi \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \nvdash \bot.$

$$\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \nvdash \bot \implies \exists v : [\![\Gamma \cup \{\neg\varphi\}]\!]_v = 1 \qquad (5)$$

Teorema (Existencia de modelos)

$$\Gamma' \nvdash \bot \implies \exists v : [\![\Gamma']\!]_v = 1$$

(In)Consistencia

- $\Gamma' \nvdash \bot \implies \exists v : [\![\Gamma']\!]_v = 1$

(In)Consistencia

- $\Gamma' \nvdash \bot \implies \exists v : [\![\Gamma']\!]_v = 1$

Damos nombre a la noción del antecedente.

(In)Consistencia

- $\Gamma' \nvdash \bot \implies \exists v : [\![\Gamma']\!]_v = 1$

Damos nombre a la noción del antecedente.

Definición

$\Gamma \subseteq PROP$ es **inconsistente** $\iff \Gamma \vdash \bot$.

(In)Consistencia

- $\Gamma' \nvdash \bot \implies \exists v : [\![\Gamma']\!]_v = 1$

Damos nombre a la noción del antecedente.

Definición

$\Gamma \subseteq PROP$ es **inconsistente** $\iff \Gamma \vdash \bot$.
$\Gamma \subseteq PROP$ es **consistente** $\iff \Gamma \nvdash \bot$ (¡negación de lo anterior!).

(In)Consistencia

- $\Gamma' \nvdash \bot \implies \exists v : [\![\Gamma']\!]_v = 1$

Damos nombre a la noción del antecedente.

Definición

$\Gamma \subseteq \mathit{PROP}$ es **inconsistente** $\iff \Gamma \vdash \bot$.
$\Gamma \subseteq \mathit{PROP}$ es **consistente** $\iff \Gamma \nvdash \bot$ (¡negación de lo anterior!).

Ahora veremos $\Gamma \nvdash \varphi \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \nvdash \bot$ (negando ambos lados).

(In)Consistencia

- $\Gamma' \nvdash \bot \implies \exists v : [\![\Gamma']\!]_v = 1$

Damos nombre a la noción del antecedente.

Definición

$\Gamma \subseteq PROP$ es **inconsistente** $\iff \Gamma \vdash \bot$.
$\Gamma \subseteq PROP$ es **consistente** $\iff \Gamma \nvdash \bot$ (¡negación de lo anterior!).

Ahora veremos $\Gamma \nvdash \varphi \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \nvdash \bot$ (negando ambos lados).

Lema

$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *es inconsistente.*

(In)Consistencia

- $\Gamma' \nvdash \bot \implies \exists v : [\![\Gamma']\!]_v = 1$

Damos nombre a la noción del antecedente.

Definición

$\Gamma \subseteq PROP$ es **inconsistente** $\iff \Gamma \vdash \bot$.
$\Gamma \subseteq PROP$ es **consistente** $\iff \Gamma \nvdash \bot$ (¡negación de lo anterior!).

Ahora veremos $\Gamma \nvdash \varphi \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \nvdash \bot$ (negando ambos lados).

Lema

$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *es inconsistente.*

Demostración.

Tomamos $D \in \mathscr{D}$ que atestigüe un lado y la usamos para construir $D' \in \mathscr{D}$ que atesigüe el otro.

- $\Gamma \vdash \varphi \implies \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente.

- $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente $\implies \Gamma \vdash \varphi$.

Conjuntos consistentes maximales

- $\Gamma \nvdash \bot \implies \exists v : [\![\Gamma]\!]_v = 1$

Conjuntos consistentes maximales

- $\Gamma \nvdash \perp \implies \exists v : [\![\Gamma]\!]_v = 1$

Para construir una asignación v, pensemos cómo son los conjuntos validados por alguna v.

Conjuntos consistentes maximales

- $\Gamma \nvdash \perp \implies \exists v : [\![\Gamma]\!]_v = 1$

Para construir una asignación v, pensemos cómo son los conjuntos validados por alguna v.

Lema (Criterio de Consistencia)

Si existe v que valide Γ, entonces Γ es consistente.

Conjuntos consistentes maximales

- $\Gamma \nvdash \bot \implies \exists v : [\![\Gamma]\!]_v = 1$

Para construir una asignación v, pensemos cómo son los conjuntos validados por alguna v.

Lema (Criterio de Consistencia)

Si existe v que valide Γ, entonces Γ es consistente.

Ejemplo

Sea v asignación y $\mathrm{Th}(v) := \{\varphi \in PROP : [\![\varphi]\!]_v = 1\}$.

Conjuntos consistentes maximales

- $\Gamma \nvdash \bot \implies \exists v : [\![\Gamma]\!]_v = 1$

Para construir una asignación v, pensemos cómo son los conjuntos validados por alguna v.

Lema (Criterio de Consistencia)

Si existe v que valide Γ, entonces Γ es consistente.

Ejemplo

Sea v asignación y $\mathrm{Th}(v) := \{\varphi \in PROP : [\![\varphi]\!]_v = 1\}$. Por el Criterio de Consistencia, $\mathrm{Th}(v)$ es consistente.

Conjuntos consistentes maximales

- $\Gamma \nvdash \bot \implies \exists v : [\![\Gamma]\!]_v = 1$

Para construir una asignación v, pensemos cómo son los conjuntos validados por alguna v.

Lema (Criterio de Consistencia)

Si existe v que valide Γ, entonces Γ es consistente.

Ejemplo

Sea v asignación y $\mathrm{Th}(v) := \{\varphi \in PROP : [\![\varphi]\!]_v = 1\}$. Por el Criterio de Consistencia, $\mathrm{Th}(v)$ es consistente. Pero además no hay conjunto más grande que aún sea consistente.

- $\Gamma \nvdash \bot \implies \exists v : [\![\Gamma]\!]_v = 1$

Para construir una asignación v, pensemos cómo son los conjuntos validados por alguna v.

Lema (Criterio de Consistencia)

Si existe v que valide Γ, entonces Γ es consistente.

Ejemplo

Sea v asignación y $\mathrm{Th}(v) := \{\varphi \in PROP : [\![\varphi]\!]_v = 1\}$. Por el Criterio de Consistencia, $\mathrm{Th}(v)$ es consistente. Pero además no hay conjunto más grande que aún sea consistente.

Definición

Γ es **consistente maximal** si es consistente y $\Gamma \subsetneq \Delta \subseteq PROP$ implica que Δ no lo es.

Construcción de conjuntos consistentes maximales

- Γ es **consistente maximal** si es maximal en el poset (Conjuntos consistentes, $\subseteq$).

Construcción de conjuntos consistentes maximales

- Γ es **consistente maximal** si es maximal en el poset (Conjuntos consistentes, $\subseteq$).

Teorema

Γ *consistente* $\implies$ *existe* Γ^* *consistente maximal tal que* $\Gamma \subseteq \Gamma^*$*.*

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Construcción de conjuntos consistentes maximales

- Γ es **consistente maximal** si es maximal en el poset (Conjuntos consistentes, $\subseteq$).

Teorema

Γ *consistente* $\implies$ *existe* Γ^* *consistente maximal tal que* $\Gamma \subseteq \Gamma^*$*.*

Demostración.

- El conjunto de **todas** las proposiciones se puede enumerar: $PROP = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$.

Construcción de conjuntos consistentes maximales

- Γ es **consistente maximal** si es maximal en el poset (Conjuntos consistentes, $\subseteq$).

Teorema

Γ consistente $\implies$ existe Γ^* consistente maximal tal que $\Gamma \subseteq \Gamma^*$.

Demostración.

- El conjunto de **todas** las proposiciones se puede enumerar: $PROP = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots\}$.
- Empezando con Γ, vamos agregándole proposiciones de una cuidando que no se vuelva inconsistente.

- El conjunto de **todas** las proposiciones se puede enumerar: $PROP = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots\}$.

- Γ consistente $\implies$ existe Γ^* consistente maximal tal que $\Gamma \subseteq \Gamma^*$.

Empezando con Γ, vamos agregándole proposiciones de una cuidando que no se vuelva inconsistente.

$$\Gamma_0 := \Gamma \qquad \Gamma_{n+1} := \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} & \text{si cons.} \\ \Gamma_n & \text{si no.} \end{cases}$$

$$\Gamma^* := \bigcup_{n \geq 0} \Gamma_n.$$

Γ_n es consistente $\forall n \geq 0$. $\quad \Gamma = \Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \subseteq \cdots \subseteq \Gamma^*$

Γ^* es consistente: Supongamos que no, $\Gamma^* \vdash \bot$

$\exists D$ tq $\underbrace{Hip(D)}_{\text{Finito!!}} \subseteq \Gamma^*$, $Cond(D) = \bot$

$\{\psi_1, \ldots, \psi_l\}$ $\qquad Hip(D) \subseteq \Gamma_m$ donde

$m_n := \min\{k : \psi_n \in \Gamma_k\}$

$m := \max\{m_n : 1 \leq n \leq l\}$

$\Gamma_m \vdash \bot$

absurdo.

- Γ consistente $\implies$ existe Γ^* consistente maximal tal que $\Gamma \subseteq \Gamma^*$.

Empezando con Γ, vamos agregándole proposiciones de una cuidando que no se vuelva inconsistente.

Γ^* es maximal : Sup. $\psi \notin \Gamma^*$

Veamos que $\Gamma^* \cup \{\psi\} \vdash \bot$.

$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} & \rightarrow \text{si hubiera sido consistente.} \\ \Gamma_n & \end{cases}$$

(con $\varphi_n = \psi$)

Como $\psi \notin \Gamma^* \supseteq \Gamma_{n+1} \Rightarrow \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} \vdash \bot$

$\Gamma_n \subseteq \Gamma^*$ $\quad \Gamma^* \cup \{\psi\} \vdash \bot$ ✓

Realización de conectivos

Lema (Consistentes maximales son cerrado por derivaciones)

Γ *consistente maximal y* $\Gamma \vdash \varphi$ *implica* $\varphi \in \Gamma$.

Realización de conectivos

Lema (Consistentes maximales son cerrado por derivaciones)

Γ *consistente maximal y* $\Gamma \vdash \varphi$ *implica* $\varphi \in \Gamma$. $\longrightarrow$ *en el apunte*

Realización de conectivos

Lema (Consistentes maximales son cerrado por derivaciones)

Γ *consistente maximal y* $\Gamma \vdash \varphi$ *implica* $\varphi \in \Gamma$. $\longrightarrow$ *en el apunte*

Lema (Consistentes maximales realizan conectivos)

Sea Γ *consistente maximal. Para todas* $\varphi, \psi \in PROP$*,*

1. $\neg\varphi \in \Gamma \iff$ [*no* $\varphi \in \Gamma$].
2. $(\varphi \to \psi) \in \Gamma \iff$ [$\varphi \in \Gamma$ *implica* $\psi \in \Gamma$].

- Γ consistente maximal y $\Gamma \vdash \varphi$ implica $\varphi \in \Gamma$.
- $\neg\varphi \in \Gamma \iff$ [no $\varphi \in \Gamma$].

$(\Rightarrow)$ $\neg\varphi \in \Gamma$. Si $\varphi \in \Gamma \Rightarrow D := \dfrac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot} \rightarrow E$

Hip $(D) \subseteq \Gamma \Rightarrow \Gamma \vdash \bot$ ✗ Γ es consistente!

$(\Leftarrow)$ Sup. $\underbrace{\varphi \notin \Gamma}$. Quiero ver que $\neg\varphi \in \Gamma$.

$\downarrow$ max

Ejercicio $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \bot \Rightarrow \Gamma \vdash \neg\varphi$

$\Rightarrow \neg\varphi \in \Gamma$ por Lema

- Γ consistente maximal y $\Gamma \vdash \varphi$ implica $\varphi \in \Gamma$.
- $\neg\varphi \in \Gamma \iff$ [no $\varphi \in \Gamma$].
- $(\varphi \to \psi) \in \Gamma \iff$ [$\varphi \in \Gamma$ implica $\psi \in \Gamma$].

$(\Rightarrow)$ $(\varphi \to \psi) \in \Gamma$. Sup. $\varphi \in \Gamma$. $D := \dfrac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi} \to E$

Hip $(D) \subseteq \Gamma \Rightarrow \Gamma \vdash \psi$. Por lem, $\psi \in \Gamma$.

$(\Leftarrow)$ Sup. [$\varphi \in \Gamma$ implica $\psi \in \Gamma$].

Caso a $\boxed{\varphi \in \Gamma}$: Si $\varphi \in \Gamma$, por hip, $\psi \in \Gamma$. $D := \dfrac{\psi}{\varphi \to \psi} \to I$; Hip $(D) \subseteq \{\psi\} \subseteq \Gamma$ $\therefore \Gamma \vdash \varphi \to \psi$ $\therefore \varphi \to \psi \in \Gamma$

Si $\varphi \notin \Gamma$, $\neg\varphi \in \Gamma$. $D' = \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi]_1 \quad \neg\varphi}{\bot}}{\psi}}{\varphi \to \psi} \to I_1$

Hip $(D') = \{\neg\varphi\} \subseteq \Gamma \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi \to \psi$

Teorema de existencia de modelos

Lema (Consistentes maximales realizan conectivos)

Sea Γ *consistente maximal. Para todas* $\varphi, \psi \in PROP$,

1. $\neg\varphi \in \Gamma \iff$ [*no* $\varphi \in \Gamma$].
2. $(\varphi \to \psi) \in \Gamma \iff$ [$\varphi \in \Gamma$ *implica* $\psi \in \Gamma$].

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Teorema de existencia de modelos

Lema (Consistentes maximales realizan conectivos)

Sea Γ *consistente maximal. Para todas* $\varphi, \psi \in PROP$,

1. $\neg\varphi \in \Gamma \iff [$*no* $\varphi \in \Gamma]$.
2. $(\varphi \to \psi) \in \Gamma \iff [\varphi \in \Gamma$ *implica* $\psi \in \Gamma]$.

Teorema (Existencia de modelos)

Γ *es consistente* $\implies$ *existe asignación* v *que valida* Γ.

Teorema de existencia de modelos

Lema (Consistentes maximales realizan conectivos)

Sea Γ *consistente maximal. Para todas* $\varphi, \psi \in PROP$*,*

1. $\neg\varphi \in \Gamma \iff$ [*no* $\varphi \in \Gamma$].
2. $(\varphi \to \psi) \in \Gamma \iff$ [$\varphi \in \Gamma$ *implica* $\psi \in \Gamma$].

Teorema (Existencia de modelos)

Γ *es consistente* $\implies$ *existe asignación* v *que valida* Γ.

Demostración.

Sea $\Gamma^* \supseteq \Gamma$ consistente maximal.

Teorema de existencia de modelos

Lema (Consistentes maximales realizan conectivos)

Sea Γ *consistente maximal. Para todas* $\varphi, \psi \in PROP$*,*

1. $\neg\varphi \in \Gamma \iff$ [*no* $\varphi \in \Gamma$].
2. $(\varphi \to \psi) \in \Gamma \iff$ [$\varphi \in \Gamma$ *implica* $\psi \in \Gamma$].

Teorema (Existencia de modelos)

Γ *es consistente* $\implies$ *existe asignación* v *que valida* Γ.

Demostración.

Sea $\Gamma^* \supseteq \Gamma$ consistente maximal. Definimos asignación:
$v(p_n) := 1 \iff p_n \in \Gamma^*$.

Teorema de existencia de modelos

Lema (Consistentes maximales realizan conectivos)

Sea Γ *consistente maximal. Para todas* $\varphi, \psi \in PROP$,

1. $\neg\varphi \in \Gamma \iff$ [*no* $\varphi \in \Gamma$].
2. $(\varphi \to \psi) \in \Gamma \iff$ [$\varphi \in \Gamma$ *implica* $\psi \in \Gamma$].

Teorema (Existencia de modelos)

Γ *es consistente* $\implies$ *existe asignación* v *que valida* Γ.

Demostración.

Sea $\Gamma^* \supseteq \Gamma$ consistente maximal. Definimos asignación:
$v(p_n) := 1 \iff p_n \in \Gamma^*$.
Probaremos por inducción en φ que $\varphi \in \Gamma^* \iff [\![\varphi]\!]_v = 1$.

Teorema de existencia de modelos

Lema (Consistentes maximales realizan conectivos)

Sea Γ consistente maximal. Para todas $\varphi, \psi \in PROP$,

1. $\neg\varphi \in \Gamma \iff$ [*no* $\varphi \in \Gamma$].
2. $(\varphi \to \psi) \in \Gamma \iff$ [$\varphi \in \Gamma$ *implica* $\psi \in \Gamma$].

Teorema (Existencia de modelos)

Γ *es consistente* $\implies$ *existe asignación* v *que valida* Γ.

Demostración.

Sea $\Gamma^* \supseteq \Gamma$ consistente maximal. Definimos asignación:
$v(p_n) := 1 \iff p_n \in \Gamma^*$.
Probaremos por inducción en φ que $\varphi \in \Gamma^* \iff [\![\varphi]\!]_v = 1$.
En particular, v valida a Γ.

- $\Gamma^* \supseteq \Gamma$ consistente maximal.
- Hemos definido $v(p_n) := 1 \iff p_n \in \Gamma^*$.
- $\neg\varphi \in \Gamma* \iff$ [no $\varphi \in \Gamma^*$].
- $(\varphi \to \psi) \in \Gamma \iff [\varphi \in \Gamma^*$ implica $\psi \in \Gamma^*]$.

$$\varphi \in \Gamma^* \iff [\![\varphi]\!]_v = 1$$

$\boxed{\varphi \in At}$

$[\![\bot]\!]_v = 0 \iff [\![\bot]\!]_v \neq 1 \iff \bot \notin \Gamma^*$

Verdadero! def valuación

Verdadero! Γ^* consistente

$[\![p_n]\!]_v = 1 \iff v(p_n) = 1 \iff p_n \in \Gamma^*$ ✓

- $\Gamma^* \supseteq \Gamma$ consistente maximal.
- Hemos definido $v(p_n) := 1 \iff p_n \in \Gamma^*$.
- $\neg\varphi \in \Gamma* \iff$ [no $\varphi \in \Gamma^*$].
- $(\varphi \to \psi) \in \Gamma \iff [\varphi \in \Gamma^*$ implica $\psi \in \Gamma^*]$.

$$\text{HI}\begin{cases} \varphi \in \Gamma^* \iff [\![\varphi]\!]_v = 1 \\ \psi \in \Gamma^* \iff [\![\psi]\!]_v = 1 \end{cases}$$

$\boxed{(\varphi \to \psi)}$

$[\![\varphi \to \psi]\!]_v = 1$ sii $\left[[\![\varphi]\!]_v = 1 \text{ implica } [\![\psi]\!]_v = 1 \right]$

sii $\left[\varphi \in \Gamma^* \text{ implica } \psi \in \Gamma^* \right]$

sii $(\varphi \longrightarrow \psi) \in \Gamma^*$

- Los otros conectivos también son realizados por los consistentes maximales.