Introducción a la Lógica y la Computación

Mariana Badano   Héctor Gramaglia
Pedro Sánchez Terraf   Mauricio Tellechea
Guido Ivetta

FaMAF, 5 de noviembre de 2021

Contenidos estimados para hoy

1. Repaso
   - Gramáticas libres de contexto
   - Ejemplo en forma Backus-Naur (BNF)
2. Lenguaje de una gramática
   - Derivación de palabras
   - Ambigüedad
3. Gramáticas regulares
   - Relación con lenguajes regulares
   - De gramáticas a autómatas
   - De autómatas a gramáticas

Gramáticas libres de contexto (CFG)

$L_{01} := \{0^n 1^n : n \in \mathbb{N}\}$ es **libre de contexto** (¡no regular!).

Gramáticas libres de contexto (CFG)

$L_{01} := \{0^n 1^n : n \in \mathbb{N}\}$ es **libre de contexto** (¡no regular!).

$G = (V, T, P, S)$

- Componentes: **variables** ("no terminales"), **alfabeto terminal**, **reglas** ("producciones") y **símbolo inicial**

Gramáticas libres de contexto (CFG)

$L_{01} := \{0^n 1^n : n \in \mathbb{N}\}$ es **libre de contexto** (¡no regular!).

$G = (V, T, P, S)$

- Componentes: **variables** ("no terminales"), **alfabeto terminal**, **reglas** ("producciones") y **símbolo inicial**
  Ejemplo:
  $G_{01} := (\{S\}, \{0, 1\}, \{S \to \epsilon;\ S \to 0\,S\,1\}, S)$.

Gramáticas libres de contexto (CFG)

$L_{01} := \{0^n 1^n : n \in \mathbb{N}\}$ es **libre de contexto** (¡no regular!).

$G = (V, T, P, S)$

- Componentes: **variables** ("no terminales"), **alfabeto terminal**, **reglas** ("producciones") y **símbolo inicial**
  Ejemplo:
  $G_{01} := (\{S\}, \{0, 1\}, \{S \to \epsilon;\ S \to 0\,S\,1\}, S)$.
  $\{\langle S, \varepsilon\rangle, \langle S, 0S1\rangle\} \subseteq V \times (V \cup T)^*$
- **Derivación** usando una CFG: $S \stackrel{*}{\Longrightarrow} 000111$

Gramáticas libres de contexto (CFG)

$L_{01} := \{0^n 1^n : n \in \mathbb{N}\}$ es **libre de contexto** (¡no regular!).

$G = (V, T, P, S)$

- Componentes: **variables** ("no terminales"), **alfabeto terminal**, **reglas** ("producciones") y **símbolo inicial**
  Ejemplo:
  $G_{01} := (\{S\}, \{0, 1\}, \{S \to \epsilon;\ S \to 0\,S\,1\}, S)$. → después.
- **Derivación** usando una CFG: $S \xrightarrow{*} 000111$ porque

$S \Longrightarrow 0\,S\,1$

Gramáticas libres de contexto (CFG)

$L_{01} := \{0^n 1^n : n \in \mathbb{N}\}$ es **libre de contexto** (¡no regular!).

$G = (V, T, P, S)$

- Componentes: **variables** (“no terminales”), **alfabeto terminal**, **reglas** (“producciones”) y **símbolo inicial**
  Ejemplo:
  $G_{01} := (\{S\}, \{0, 1\}, \{S \to \epsilon;\ S \to 0\,S\,1\}, S)$.
- **Derivación** usando una CFG: $S \overset{*}{\Longrightarrow} 000111$ porque

$$S \Longrightarrow 0\,S\,1 \Longrightarrow 0\,0\,S\,1\,1$$

Gramáticas libres de contexto (CFG)

$L_{01} := \{0^n 1^n : n \in \mathbb{N}\}$ es **libre de contexto** (¡no regular!).

$G = (V, T, P, S)$

- Componentes: **variables** ("no terminales"), **alfabeto terminal**, **reglas** ("producciones") y **símbolo inicial**
  Ejemplo:
  $G_{01} := (\{S\}, \{0, 1\}, \{S \to \epsilon;\ S \to 0\,S\,1\}, S)$.
- **Derivación** usando una CFG: $S \overset{*}{\Longrightarrow} 000111$ porque

$$S \Longrightarrow 0\,S\,1 \Longrightarrow 0\,0\,S\,1\,1 \Longrightarrow 0\,0\,0\,S\,1\,1\,1$$

Gramáticas libres de contexto (CFG)

$L_{01} := \{0^n 1^n : n \in \mathbb{N}\}$ es **libre de contexto** (¡no regular!).

$G = (V, T, P, S)$

- Componentes: **variables** ("no terminales"), **alfabeto terminal**, **reglas** ("producciones") y **símbolo inicial**
  Ejemplo:
  $G_{01} := (\{S\}, \{0, 1\}, \{S \to \epsilon;\ S \to 0\,S\,1\}, S)$.
- **Derivación** usando una CFG: $S \stackrel{*}{\Longrightarrow} 000111$ porque

$$S \Longrightarrow 0\,S\,1 \Longrightarrow 0\,0\,S\,1\,1 \Longrightarrow 0\,0\,0\,S\,1\,1\,1 \Longrightarrow 0\,0\,0\,\epsilon\,1\,1\,1 = 000111.$$

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Gramáticas libres de contexto (CFG)

$L_{01} := \{0^n 1^n : n \in \mathbb{N}\}$ es **libre de contexto** (¡no regular!).

$G = (V, T, P, S)$

- Componentes: **variables** (“no terminales”), **alfabeto terminal**, **reglas** (“producciones”) y **símbolo inicial**
  Ejemplo:
  $G_{01} := (\{S\}, \{0, 1\}, \{S \to \epsilon;\ S \to 0\,S\,1\}, S)$.
- **Derivación** usando una CFG: $S \overset{*}{\Longrightarrow} 000111$ porque

$$S \Longrightarrow 0\,S\,1 \Longrightarrow 0\,0\,S\,1\,1 \Longrightarrow 0\,0\,0\,S\,1\,1\,1 \Longrightarrow 0\,0\,0\,\epsilon\,1\,1\,1 = 000111.$$

- **Lenguaje** de una gramática: $L(G) := \{\alpha \in T^* \mid S \overset{*}{\Longrightarrow} \alpha\}$.

Gramáticas libres de contexto (CFG)

$L_{01} := \{0^n 1^n : n \in \mathbb{N}\}$ es **libre de contexto** (¡no regular!).

$G = (V, T, P, S)$

- Componentes: **variables** (“no terminales”), **alfabeto terminal**, **reglas** (“producciones”) y **símbolo inicial**
  Ejemplo:
  $G_{01} := (\{S\}, \{0, 1\}, \{S \to \epsilon;\ S \to 0\,S\,1\}, S)$.
- **Derivación** usando una CFG: $S \overset{*}{\Longrightarrow} 000111$ porque

$$S \Longrightarrow 0\,S\,1 \Longrightarrow 0\,0\,S\,1\,1 \Longrightarrow 0\,0\,0\,S\,1\,1\,1 \Longrightarrow 0\,0\,0\,\epsilon\,1\,1\,1 = 000111.$$

- **Lenguaje** de una gramática: $L(G) := \{\alpha \in T^* \mid S \overset{*}{\Longrightarrow} \alpha\}$.
  Luego $L(G_{01}) = L_{01}$.

Forma Backus-Naur (BNF)

Gramática para expresiones aritméticas

$G_{ar} = (\{E, N, D, I\}, \{a, 0, \ldots, 9, +, *, (,)\}, P_{ar}, E)$

Forma Backus-Naur (BNF)

Gramática para expresiones aritméticas

$G_{ar} = (\{E, N, D, I\}, \{a, 0, \ldots, 9, +, *, (,)\}, P_{ar}, E)$

$$
\begin{array}{rcl}
E & \longrightarrow & N \mid I \mid E + E \mid E * E \mid (E) \\
I & \longrightarrow & a \mid I0 \mid \ldots \mid I9 \\
N & \longrightarrow & 1D \mid \ldots \mid 9D \\
D & \longrightarrow & 0D \mid \ldots \mid 9D \mid \epsilon
\end{array}
$$

$E \rightarrow N \quad E \rightarrow I \quad E \rightarrow E+E \quad \ldots$

Forma Backus-Naur (BNF)

Gramática para expresiones aritméticas

$G_{ar} = (\{E, N, D, I\}, \{a, 0, \ldots, 9, +, *, (,)\}, P_{ar}, E)$

$$
\begin{array}{rcl}
E & \longrightarrow & N \mid I \mid E + E \mid E * E \mid (E) \\
I & \longrightarrow & a \mid I0 \mid \ldots \mid I9 \\
N & \longrightarrow & 1D \mid \ldots \mid 9D \\
D & \longrightarrow & 0D \mid \ldots \mid 9D \mid \epsilon
\end{array}
$$

$\langle \text{Expr} \rangle ::== \langle \text{DígNoNulo} \rangle \mid \langle \text{Identif} \rangle \mid \langle \text{Expr} \rangle + \langle \text{Expr} \rangle \ldots$

En forma BNF

$$
\begin{array}{rcl}
\langle E \rangle & ::== & \langle N \rangle \mid \langle I \rangle \mid \langle E \rangle + \langle E \rangle \mid \langle E \rangle * \langle E \rangle \mid (\langle E \rangle) \\
\langle I \rangle & ::== & a \mid \langle I \rangle 0 \mid \ldots \mid \langle I \rangle 9 \\
\langle N \rangle & ::== & 1\langle D \rangle \mid \ldots \mid 9\langle D \rangle \\
\langle D \rangle & ::== & 0\langle D \rangle \mid \ldots \mid 9\langle D \rangle \mid \epsilon
\end{array}
$$

Lenguaje de una gramática

Sean $G = (V, T, P, S)$ gramática y $\alpha, \beta \in (V \cup T)^*$.

Definición

- α **deriva** β ("$\alpha \Longrightarrow \beta$") si β se obtiene reemplazando en α una variable de V por el cuerpo de una producción $V \longrightarrow \gamma$:

$$\underbrace{\alpha' V \alpha''}_{\alpha} \Longrightarrow \underbrace{\alpha' \gamma \alpha''}_{\beta}$$

$$\overbrace{\underbrace{0}_{\alpha'}\underbrace{S}_{V}\underbrace{1}_{\alpha''}}^{\alpha} \Longrightarrow \overbrace{0\,1}^{\beta} = \alpha' \gamma \alpha''$$

porque

$V \to \gamma$

$S \to \varepsilon$

es producción.

Lenguaje de una gramática

Sean $G = (V, T, P, S)$ gramática y $\alpha, \beta \in (V \cup T)^*$.

Definición

- α **deriva** β ("$\alpha \Longrightarrow \beta$") si β se obtiene reemplazando en α una variable de V por el cuerpo de una producción $V \longrightarrow \gamma$:

$$\underbrace{\alpha' V \alpha''}_{\alpha} \Longrightarrow \underbrace{\alpha' \gamma \alpha''}_{\beta}$$

- La clausura reflexiva-transitiva de $\Longrightarrow$ es $\overset{*}{\Longrightarrow}$:
$\alpha \overset{*}{\Longrightarrow} \beta$ si $\exists n \geq 0$ tal que

$$\alpha = \alpha_0 \Longrightarrow \alpha_1 \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow \alpha_n = \beta$$

Lenguaje de una gramática

Sean $G = (V, T, P, S)$ gramática y $\alpha, \beta \in (V \cup T)^*$.

Definición

- α **deriva** β ("$\alpha \Longrightarrow \beta$") si β se obtiene reemplazando en α una variable de V por el cuerpo de una producción $V \longrightarrow \gamma$:

$$\underbrace{\alpha' V \alpha''}_{\alpha} \Longrightarrow \underbrace{\alpha' \gamma \alpha''}_{\beta}$$

- La clausura reflexiva-transitiva de $\Longrightarrow$ es $\overset{*}{\Longrightarrow}$:
$\alpha \overset{*}{\Longrightarrow} \beta$ si $\exists n \geq 0$ tal que

$\alpha \overset{*}{\Longrightarrow} \alpha \quad \forall \alpha$

$$\alpha = \alpha_0 \Longrightarrow \alpha_0 \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow \alpha_n = \beta$$

(si $n = 0$)

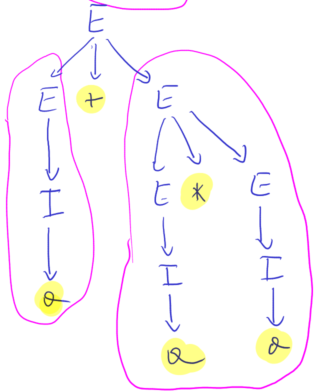
- El **lenguaje generado** por G es $\{\alpha \in T^* : S \overset{*}{\Longrightarrow} \alpha\}$.

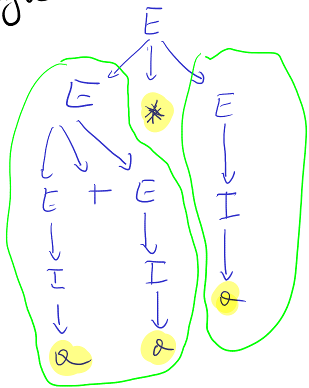
$L(G)$

Ambigüedad

$$
\begin{array}{rcl}
E & \longrightarrow & N \mid I \mid E+E \mid E*E \mid (E) \\
I & \longrightarrow & a \mid I0 \mid \ldots \mid I9 \\
N & \longrightarrow & 1D \mid \ldots \mid 9D \\
D & \longrightarrow & 0D \mid \ldots \mid 9D \mid \epsilon
\end{array}
$$

$a + a * a$ → Ambiguo ← $a + a * a$





Gramáticas regulares

Definición

$G = (V, T, P, S)$ es **regular** si todas sus producciones son de la forma

- $A \longrightarrow a\,B \quad (a \in T, B \in V)$,
- $A \longrightarrow \epsilon$.

Gramáticas regulares

Definición

$G = (V, T, P, S)$ es **regular** si todas sus producciones son de la forma

- $A \longrightarrow a\,B \quad (a \in T, B \in V)$,
- $A \longrightarrow \epsilon$.

Lema

- *Si* $X \stackrel{*}{\Longrightarrow} \beta$ *y* $\beta \in (V \cup T)^* \setminus T^*$ *entonces* $\beta = \alpha Y$ *con* $\alpha \in T^*$ *y* $Y \in V$*. Más aún, si* $\beta \in V$ *entonces* $\beta = X$.

Ejemplo: producciones de arriba más

$B \to bA$

$S \to bA$

$$\underbrace{\underset{X}{B} \Longrightarrow bA \Longrightarrow baB \Longrightarrow \underbrace{\overbrace{bab}^{\alpha}\overset{Y}{A}}_{\beta}} \Longrightarrow bab$$

$$X \stackrel{*}{\Longrightarrow} V \quad \Rightarrow \quad V = X$$

Gramáticas regulares

Definición

$G = (V, T, P, S)$ es **regular** si todas sus producciones son de la forma

- $A \longrightarrow a\,B \quad (a \in T, B \in V)$,
- $A \longrightarrow \epsilon$.

Lema

- *Si* $X \stackrel{*}{\Longrightarrow} \beta$ *y* $\beta \in (V \cup T)^* \setminus T^*$ *entonces* $\beta = \alpha Y$ *con* $\alpha \in T^*$ *y* $Y \in V$*. Más aún, si* $\beta \in V$ *entonces* $\beta = X$*.*
- *Si* $X \stackrel{*}{\Longrightarrow} \alpha$ *y* $\alpha \in T^*$ *entonces existe* $Y \in V$ *tal que* $X \stackrel{*}{\Longrightarrow} \alpha Y$ *y* $Y \longrightarrow \epsilon$ *está en* P *(y luego* $X \stackrel{*}{\Longrightarrow} \alpha Y \Longrightarrow \alpha$*).*

Gramáticas regulares

Definición

$G = (V, T, P, S)$ es **regular** si todas sus producciones son de la forma

- $A \longrightarrow a\,B \quad (a \in T, B \in V)$,
- $A \longrightarrow \epsilon$.

Lema

- *Si* $X \stackrel{*}{\Longrightarrow} \beta$ *y* $\beta \in (V \cup T)^* \setminus T^*$ *entonces* $\beta = \alpha Y$ *con* $\alpha \in T^*$ *y* $Y \in V$. *Más aún, si* $\beta \in V$ *entonces* $\beta = X$.
- *Si* $X \stackrel{*}{\Longrightarrow} \alpha$ *y* $\alpha \in T^*$ *entonces existe* $Y \in V$ *tal que* $X \stackrel{*}{\Longrightarrow} \alpha Y$ *y* $Y \longrightarrow \epsilon$ *está en* P *(y luego* $X \stackrel{*}{\Longrightarrow} \alpha Y \Longrightarrow \alpha$*).*

Teorema

L *es regular* $\iff L = L(G)$ *para alguna* G *regular.*

Repaso de NFA (sin movimientos ϵ)

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- $\delta \colon Q \times \Sigma \to \mathscr{P}(Q)$

Repaso de NFA (sin movimientos ϵ)

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- $\delta : Q \times \Sigma \to \mathscr{P}(Q)$

$q_0 \xrightarrow{a} q_0 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{b} q_2$

$q_0 \xRightarrow{aab} q_2$

Transiciones compuestas

$q_0 \xRightarrow{aa} q_1 \xrightarrow{b} q_2$

$$q \xRightarrow{\epsilon} q$$

$$q \xRightarrow{\beta x} q' \quad \text{si y sólo si} \quad \exists r : \; q \xRightarrow{\beta} r \xrightarrow{x} q'$$

Repaso de NFA (sin movimientos ϵ)

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- $\delta : Q \times \Sigma \to \mathscr{P}(Q)$

Transiciones compuestas

$$q \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q$$

$$q \overset{\beta x}{\Longrightarrow} q' \quad \text{si y sólo si} \quad \exists r : \; q \overset{\beta}{\Longrightarrow} r \overset{x}{\longrightarrow} q'$$

$$L(\mathbb{A}) := \{\alpha \mid \exists q' : \; q_0 \overset{\alpha}{\Longrightarrow} q' \in F\}.$$

Universidad Nacional de Córdoba

UNC

1613 - 2013 400 AÑOS

Repaso de NFA (sin movimientos ϵ)

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- $\delta : Q \times \Sigma \to \mathscr{P}(Q)$

Transiciones compuestas

$$q \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q$$

$$q \overset{\beta x}{\Longrightarrow} q' \quad \text{si y sólo si} \quad \exists r : \; q \overset{\beta}{\Longrightarrow} r \overset{x}{\longrightarrow} q'$$

$$L(\mathbb{A}) := \{\alpha \mid \exists q' : \; q_0 \overset{\alpha}{\Longrightarrow} q' \in F\}.$$

- Gramática regular G $\rightsquigarrow$ NFA $\mathbb{A}(G)$,
- NFA $\mathbb{A}$ $\rightsquigarrow$ gramática regular $G(\mathbb{A})$,

Repaso de NFA (sin movimientos ϵ)

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- $\delta : Q \times \Sigma \to \mathscr{P}(Q)$

Transiciones compuestas

$$q \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} q$$

$$q \overset{\beta x}{\Longrightarrow} q' \quad \text{si y sólo si} \quad \exists r : \; q \overset{\beta}{\Longrightarrow} r \overset{x}{\longrightarrow} q'$$

$$L(\mathbb{A}) := \{\alpha \mid \exists q' : \; q_0 \overset{\alpha}{\Longrightarrow} q' \in F\}.$$

- Gramática regular G $\rightsquigarrow$ NFA $\mathbb{A}(G)$,
- NFA $\mathbb{A}$ $\rightsquigarrow$ gramática regular $G(\mathbb{A})$,

de manera que $L(G) = L(\mathbb{A}(G))$ y $L(\mathbb{A}) = L(G(\mathbb{A}))$.

De gramáticas a autómatas, ejemplo

G regular

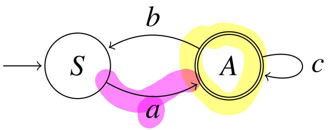
$$
\begin{array}{rcl}
S & \longrightarrow & aA \\
A & \longrightarrow & bS \mid cA \mid \epsilon
\end{array}
$$

De gramáticas a autómatas, ejemplo

G regular

$$
\begin{aligned}
S &\longrightarrow aA \\
A &\longrightarrow bS \mid cA \mid \epsilon
\end{aligned}
$$

NFA $\mathbb{A}(G)$



De gramáticas a autómatas, en general

- $G = (V, T, P, S)$ regular: $A \longrightarrow a\,B$, $A \longrightarrow \epsilon$.
- $X \stackrel{*}{\Longrightarrow} \beta \in (V \cup T)^* \setminus T^*$ implica $\beta = \alpha Y$ con $\alpha \in T^*$ y $Y \in V$.
- $X \stackrel{*}{\Longrightarrow} \alpha \in T^*$ implica $\exists Y \in V : X \stackrel{*}{\Longrightarrow} \alpha Y \Rightarrow \alpha$.
- $q \xRightarrow{\beta x} q'$ si y sólo si $\exists r :\ q \xRightarrow{\beta} r \xrightarrow{x} q'$

De gramáticas a autómatas, en general

- $G = (V, T, P, S)$ regular: $A \longrightarrow a\,B$, $A \longrightarrow \epsilon$.
- $X \overset{*}{\Longrightarrow} \beta \in (V \cup T)^* \smallsetminus T^*$ implica $\beta = \alpha Y$ con $\alpha \in T^*$ y $Y \in V$.
- $X \overset{*}{\Longrightarrow} \alpha \in T^*$ implica $\exists Y \in V : X \overset{*}{\Longrightarrow} \alpha Y \Rightarrow \alpha$.
- $q \overset{\beta x}{\Longrightarrow} q'$ si y sólo si $\exists r : q \overset{\beta}{\Longrightarrow} r \overset{x}{\longrightarrow} q'$

S,

$$\mathbb{A}(G) := (V, T, \delta_G, \{X \in V \mid (X \longrightarrow \epsilon) \in P\});$$

$$X \overset{a}{\longrightarrow} Y \quad \text{si y sólo si} \quad (X \longrightarrow aY) \in P.$$

De gramáticas a autómatas, en general

- $G = (V, T, P, S)$ regular: $A \longrightarrow a\,B$, $A \longrightarrow \epsilon$.
- $X \overset{*}{\Longrightarrow} \beta \in (V \cup T)^* \setminus T^*$ implica $\beta = \alpha Y$ con $\alpha \in T^*$ y $Y \in V$.
- $X \overset{*}{\Longrightarrow} \alpha \in T^*$ implica $\exists Y \in V : X \overset{*}{\Longrightarrow} \alpha Y \Rightarrow \alpha$.
- $q \overset{\beta x}{\Longrightarrow} q'$ si y sólo si $\exists r : q \overset{\beta}{\Longrightarrow} r \overset{x}{\longrightarrow} q'$

$$\mathbb{A}(G) := (V, T, \delta_G, \{X \in V \mid (X \longrightarrow \epsilon) \in P\});$$

$$X \overset{a}{\longrightarrow} Y \quad \text{si y sólo si} \quad (X \longrightarrow aY) \in P.$$

Sea $\alpha \in T^*$

Lema

$X \overset{*}{\Longrightarrow} \alpha Y$ *(según G)* $\iff$ $X \overset{\alpha}{\Longrightarrow} Y$ *(según $\mathbb{A}(G)$).*

De gramáticas a autómatas, en general

- $G = (V, T, P, S)$ regular: $A \longrightarrow a\,B$, $A \longrightarrow \epsilon$.
- $X \stackrel{*}{\Longrightarrow} \beta \in (V \cup T)^* \setminus T^*$ implica $\beta = \alpha Y$ con $\alpha \in T^*$ y $Y \in V$.
- $X \stackrel{*}{\Longrightarrow} \alpha \in T^*$ implica $\exists Y \in V : X \stackrel{*}{\Longrightarrow} \alpha Y \Rightarrow \alpha$.
- $q \stackrel{\beta x}{\Longrightarrow} q'$ si y sólo si $\exists r : q \stackrel{\beta}{\Longrightarrow} r \stackrel{x}{\longrightarrow} q'$

$$\mathbb{A}(G) := (V, T, \delta_G, \{X \in V \mid (X \longrightarrow \epsilon) \in P\});$$
$$X \stackrel{a}{\longrightarrow} Y \quad \text{si y sólo si} \quad (X \longrightarrow aY) \in P.$$

Sea $\alpha \in T^*$

Lema

$X \stackrel{*}{\Longrightarrow} \alpha Y$ *(según G)* $\iff$ $X \stackrel{\alpha}{\Longrightarrow} Y$ *(según $\mathbb{A}(G)$).*

Demostración.

Por inducción en α.

Por inducción en α: $\boxed{X \overset{*}{\Longrightarrow} \alpha Y \quad \text{sii} \quad X \overset{\alpha}{\Longrightarrow} Y}$

$\boxed{\alpha = \varepsilon}$ $\quad X \overset{*}{\Longrightarrow} \varepsilon Y = Y$ sii $X = Y$ sii $X \overset{\varepsilon}{\Longrightarrow} Y$

$\boxed{\alpha = \beta x}$ $\quad X \overset{*}{\Longrightarrow} \beta x Y$ sii $\exists Z \in V,\ Z \longrightarrow xY$

$X \overset{*}{\Longrightarrow} \beta Z \Longrightarrow \beta \underbrace{x Y}$

sii

$X \overset{\beta}{\Longrightarrow} Z \overset{x}{\longrightarrow} Y$

sii

$\exists Z \in V$ tq $X \overset{\beta}{\Longrightarrow} Z \overset{x}{\longrightarrow} Y$

sii

$X \overset{\beta x}{\Longrightarrow} Y$

Las gramáticas regulares definen lenguajes regulares

- $X \stackrel{*}{\Longrightarrow} \alpha \in T^*$ implica $\exists Y \in V : X \stackrel{*}{\Longrightarrow} \alpha Y$ y $Y \longrightarrow \epsilon$.
- $\mathbb{A}(G) := (V, T, \delta_G, S, F)$ con $F = \{X \in V \mid (X \longrightarrow \epsilon) \in P\}$.
- $L(\mathbb{A}(G)) = \{\alpha \mid \exists q : S \stackrel{\alpha}{\Longrightarrow} q \in F\}$.
- $X \stackrel{*}{\Longrightarrow} \alpha Y$ (según G) $\iff$ $X \stackrel{\alpha}{\Longrightarrow} Y$ (según $\mathbb{A}(G)$).

Las gramáticas regulares definen lenguajes regulares

- $X \stackrel{*}{\Longrightarrow} \alpha \in T^*$ implica $\exists Y \in V : X \stackrel{*}{\Longrightarrow} \alpha Y$ y $Y \longrightarrow \epsilon$.
- $\mathbb{A}(G) := (V, T, \delta_G, S, F)$ con $F = \{X \in V \mid (X \longrightarrow \epsilon) \in P\}$.
- $L(\mathbb{A}(G)) = \{\alpha \mid \exists q : S \stackrel{\alpha}{\Longrightarrow} q \in F\}$.
- $X \stackrel{*}{\Longrightarrow} \alpha Y$ (según G) $\iff$ $X \stackrel{\alpha}{\Longrightarrow} Y$ (según $\mathbb{A}(G)$).

$L(G) = L(\mathbb{A}(G))$

$\alpha \in L(G)$ si y sólo si

Las gramáticas regulares definen lenguajes regulares

- $X \overset{*}{\Longrightarrow} \alpha \in T^*$ implica $\exists Y \in V : X \overset{*}{\Longrightarrow} \alpha Y$ y $Y \longrightarrow \epsilon$.
- $\mathbb{A}(G) := (V, T, \delta_G, S, F)$ con $F = \{X \in V \mid (X \longrightarrow \epsilon) \in P\}$.
- $L(\mathbb{A}(G)) = \{\alpha \mid \exists q : S \overset{\alpha}{\Longrightarrow} q \in F\}$.
- $X \overset{*}{\Longrightarrow} \alpha Y$ (según G) $\iff$ $X \overset{\alpha}{\Longrightarrow} Y$ (según $\mathbb{A}(G)$).

$L(G) = L(\mathbb{A}(G))$

$\alpha \in L(G)$ si y sólo si $S \overset{*}{\Longrightarrow} \alpha$

Las gramáticas regulares definen lenguajes regulares

- $X \overset{*}{\Longrightarrow} \alpha \in T^*$ implica $\exists Y \in V : X \overset{*}{\Longrightarrow} \alpha Y$ y $Y \longrightarrow \epsilon$.
- $\mathbb{A}(G) := (V, T, \delta_G, S, F)$ con $F = \{X \in V \mid (X \longrightarrow \epsilon) \in P\}$.
- $L(\mathbb{A}(G)) = \{\alpha \mid \exists q : S \overset{\alpha}{\Longrightarrow} q \in F\}$.
- $X \overset{*}{\Longrightarrow} \alpha Y$ (según G) $\iff$ $X \overset{\alpha}{\Longrightarrow} Y$ (según $\mathbb{A}(G)$).

$L(G) = L(\mathbb{A}(G))$

$\alpha \in L(G)$ si y sólo si $S \overset{*}{\Longrightarrow} \alpha$

si y sólo si $S \overset{*}{\Longrightarrow} \alpha Y$ y $Y \longrightarrow \epsilon$

Las gramáticas regulares definen lenguajes regulares

- $X \overset{*}{\Longrightarrow} \alpha \in T^*$ implica $\exists Y \in V : X \overset{*}{\Longrightarrow} \alpha Y$ y $Y \longrightarrow \epsilon$.
- $\mathbb{A}(G) := (V, T, \delta_G, S, F)$ con $F = \{X \in V \mid (X \longrightarrow \epsilon) \in P\}$.
- $L(\mathbb{A}(G)) = \{\alpha \mid \exists q : S \overset{\alpha}{\Longrightarrow} q \in F\}$.
- $X \overset{*}{\Longrightarrow} \alpha Y$ (según G) $\iff$ $X \overset{\alpha}{\Longrightarrow} Y$ (según $\mathbb{A}(G)$).

$L(G) = L(\mathbb{A}(G))$

$\alpha \in L(G)$ si y sólo si $S \overset{*}{\Longrightarrow} \alpha$

si y sólo si $S \overset{*}{\Longrightarrow} \alpha Y$ y $Y \longrightarrow \epsilon$

si y sólo si $S \overset{\alpha}{\Longrightarrow} Y$ y $Y \in F$

Las gramáticas regulares definen lenguajes regulares

- $X \overset{*}{\Longrightarrow} \alpha \in T^*$ implica $\exists Y \in V : X \overset{*}{\Longrightarrow} \alpha Y$ y $Y \longrightarrow \epsilon$.
- $\mathbb{A}(G) := (V, T, \delta_G, S, F)$ con $F = \{X \in V \mid (X \longrightarrow \epsilon) \in P\}$.
- $L(\mathbb{A}(G)) = \{\alpha \mid \exists q : S \overset{\alpha}{\Longrightarrow} q \in F\}$.
- $X \overset{*}{\Longrightarrow} \alpha Y$ (según G) $\iff$ $X \overset{\alpha}{\Longrightarrow} Y$ (según $\mathbb{A}(G)$).

$L(G) = L(\mathbb{A}(G))$

$\alpha \in L(G)$ si y sólo si $S \overset{*}{\Longrightarrow} \alpha$
si y sólo si $S \overset{*}{\Longrightarrow} \alpha Y$ y $Y \longrightarrow \epsilon$
si y sólo si $S \overset{\alpha}{\Longrightarrow} Y$ y $Y \in F$
si y sólo si $\alpha \in L(\mathbb{A}(G))$

De autómatas a gramáticas

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

De autómatas a gramáticas

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

$$G(\mathbb{A}) := (Q, \Sigma, P_{\mathbb{A}}, q_0);$$

$$P_{\mathbb{A}} := \begin{cases} q \longrightarrow aq' & \text{sii } q \xrightarrow{a} q' \\ q \longrightarrow \epsilon & \text{sii } q \in F \end{cases}$$

De autómatas a gramáticas

- $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

$$G(\mathbb{A}) := (Q, \Sigma, P_{\mathbb{A}}, q_0);$$

$$P_{\mathbb{A}} := \begin{cases} q \longrightarrow aq' & \text{sii } q \xrightarrow{a} q' \\ q \longrightarrow \epsilon & \text{sii } q \in F \end{cases}$$

Exactamente la misma prueba de antes muestra que $L(\mathbb{A}) = L(G(\mathbb{A}))$.