Introducción a la Lógica y la Computación

Mariana Badano Héctor Gramaglia
Pedro Sánchez Terraf Mauricio Tellechea
Guido Ivetta César Vallero

FaMAF, 3 de septiembre de 2020

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Avisos

- Las clases prácticas tienen una nueva dinámica de trabajo.
- Se asientan los temas del teórico inmediato anterior.

¡Participen!

Contenidos estimados para hoy

1. Repaso
   - Representación de posets
   - Álgebras de Boole
2. Teorema de Representación de álgebras de Boole finitas
   - Átomos y resultados básicos
   - Atomicidad y Separación
   - Prueba del Teorema

Repaso: Representación de posets

Sea $(P, \leq)$ un poset, y sea $F : P \to \mathscr{P}(P)$ definida por

$$F(d) := d\!\downarrow = \{x \in P : x \leq d\}$$

Repaso: Representación de posets

$y \leq x \in D \Rightarrow y \in D$

Sea $(P, \leq)$ un poset, y sea $F : P \to \mathscr{P}(P)$ definida por

$$F(d) := d\!\downarrow = \{x \in P : x \leq d\}$$ ciertos **decrecientes**.

Repaso: Representación de posets

Sea $(P, \leq)$ un poset, y sea $F : P \to \mathscr{P}(P)$ definida por

$$F(d) := d{\downarrow} = \{x \in P : x \leq d\} \quad \text{ciertos } \textbf{decrecientes}.$$

- F es inyectiva: para todos $d, c \in P$, $d{\downarrow} = c{\downarrow} \implies d = c$

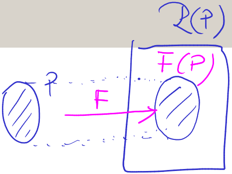
Repaso: Representación de posets

Sea $(P, \leq)$ un poset, y sea $F : P \to \mathscr{P}(P)$ definida por

$$F(d) := d{\downarrow} = \{x \in P : x \leq d\} \quad \text{ciertos } \textbf{decrecientes}.$$

- F es inyectiva: para todos $d, c \in P$, $d{\downarrow} = c{\downarrow} \implies d = c$ porque tiene inversa, $\sup$.

Repaso: Representación de posets



Sea $(P, \leq)$ un poset, y sea $F : P \to \mathscr{P}(P)$ definida por

$$F(d) := d{\downarrow} = \{x \in P : x \leq d\}$$ ciertos **decrecientes**.

- F es inyectiva: para todos $d, c \in P$, $d{\downarrow} = c{\downarrow} \implies d = c$ porque tiene inversa, $\sup$.

  casi un isomorfismo
- F preserva orden: para todos $d, c \in P$, $d \leq c \iff d{\downarrow} \subseteq c{\downarrow}$.

Repaso: Representación de posets

$\mathscr{P}(P)$

$F(P)$

Sea $(P, \leq)$ un poset, y sea $F : P \to \mathscr{P}(P)$ definida por P F

$$F(d) := d{\downarrow} = \{x \in P : x \leq d\}$$ ciertos **decrecientes**.

- F es inyectiva: para todos $d, c \in P$, $d{\downarrow} = c{\downarrow} \implies d = c$ porque tiene inversa, $\sup$.
- F preserva orden: para todos $d, c \in P$, $d \leq c \iff d{\downarrow} \subseteq c{\downarrow}$.

Teorema

- *$(P, \leq)$ es isomorfo a un subposet de $(\mathscr{P}(P), \subseteq)$.*
- *$F : P \to F(P)$ es un isomorfismo entre P y su imagen.*

Repaso: Álgebras de Boole

Un **álgebra de Boole** $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ es una estructura donde $(B, \vee, \wedge, 0, 1)$ es un retículo distributivo acotado y $\neg : B \to B$ da un complemento:

$$a \vee \neg a = 1 \qquad a \wedge \neg a = 0.$$

Repaso: Álgebras de Boole

Un **álgebra de Boole** $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ es una estructura donde $(B, \vee, \wedge, 0, 1)$ es un retículo distributivo acotado y $\neg : B \to B$ da un complemento:

$$a \vee \neg a = 1 \qquad a \wedge \neg a = 0.$$

Ejemplo

Álgebra de partes $(\mathscr{P}(A), \cup, \cap, (\cdot)^c, \varnothing, A)$, para cualquier conjunto A.

Teorema de Representación de álgebras de Boole finitas

Teorema

Para toda álgebra de Boole finita B *existe* A *tal que* B *es isomorfa a* $\mathscr{P}(A)$.

Teorema de Representación de álgebras de Boole finitas

Teorema

Para toda álgebra de Boole finita B existe A tal que B es isomorfa a $\mathscr{P}(A)$.

El conjunto A será exactamente el de los átomos de B:

Definición

$a \in B$ es un **átomo** si a cubre a 0. $At(B)$ es el conjunto de los átomos de B.

Teorema de Representación de álgebras de Boole finitas

Teorema

Para toda álgebra de Boole finita B existe A tal que B es isomorfa a $\mathscr{P}(A)$.

El conjunto A será exactamente el de los átomos de B:

Definición

$a \in B$ es un **átomo** si a cubre a 0. $At(B)$ es el conjunto de los átomos de B.

Lema

- *Si* $a, b \in At(B)$, $a \wedge b = 0$ *ó* $\boxed{a = b = a \wedge b.}$

$\forall c \in B$

$c \wedge a = \begin{cases} a \\ 0 \end{cases}$ $\quad a \wedge b = \begin{cases} b \\ 0 \end{cases}$

$\forall a \in At(B)$.

Teorema de Representación de álgebras de Boole finitas

Teorema

Para toda álgebra de Boole finita B existe A tal que B es isomorfa a $\mathscr{P}(A)$.

El conjunto A será exactamente el de los átomos de B:

Definición

$a \in B$ es un **átomo** si a cubre a 0. $At(B)$ es el conjunto de los átomos de B.

Lema

- *Si $a, b \in At(B)$, $a \wedge b = 0$ ó $a = b = a \wedge b$.*
- *Si $a, a_1, \ldots, a_n \in At(B)$, entonces*
  $a \wedge (a_1 \vee \ldots \vee a_n) =$

$a \wedge (b \vee c)$

$= (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

Teorema de Representación de álgebras de Boole finitas

Teorema

Para toda álgebra de Boole finita B existe A tal que B es isomorfa a $\mathscr{P}(A)$.

El conjunto A será exactamente el de los átomos de B:

Definición

$a \in B$ es un **átomo** si a cubre a 0. $At(B)$ es el conjunto de los átomos de B.

Lema

- *Si $a, b \in At(B)$, $a \wedge b = 0$ ó $a = b = a \wedge b$.*
- *Si $a, a_1, \ldots, a_n \in At(B)$, entonces*
  $a \wedge (a_1 \vee \ldots \vee a_n) = (a \wedge a_1) \vee \ldots \vee (a \wedge a_n)$

Teorema de Representación de álgebras de Boole finitas

Teorema

Para toda álgebra de Boole finita B existe A tal que B es isomorfa a $\mathscr{P}(A)$.

El conjunto A será exactamente el de los átomos de B:

Definición

$a \in B$ es un **átomo** si a cubre a 0. $At(B)$ es el conjunto de los átomos de B.

Lema

- *Si $a, b \in At(B)$, $a \wedge b = 0$ ó $a = b = a \wedge b$.*
- *Si $a, a_1, \ldots, a_n \in At(B)$, entonces $a \wedge (a_1 \vee \ldots \vee a_n) = (a \wedge a_1) \vee \ldots \vee (a \wedge a_n) = 0$ ó existe j tal que $a = a_j$.* $(1 \leq j \leq n)$

Teorema de Representación de álgebras de Boole finitas

Teorema

Para toda álgebra de Boole finita B existe A tal que B es isomorfa a $\mathscr{P}(A)$.

El conjunto A será exactamente el de los átomos de B:

Definición

$a \in B$ es un **átomo** si a cubre a 0. $At(B)$ es el conjunto de los átomos de B.

Lema

- *Si $a, b \in At(B)$, $a \wedge b = 0$ ó $a = b = a \wedge b$.*
- *Si $a, a_1, \ldots, a_n \in At(B)$, entonces $a \wedge (a_1 \vee \ldots \vee a_n) = (a \wedge a_1) \vee \ldots \vee (a \wedge a_n) = 0$ ó existe j tal que $a = a_j$.*

  $x \not\leq y \iff x \wedge \neg y \neq 0$
- *Para todos $x, y \in B$, $x \leq y \iff x \wedge \neg y = 0$.*

Teorema de representación de álgebras de Boole finitas

Teorema

Sea $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ *un álgebra de Boole finita. Luego*

"casi decreciente" en $(At(B), \leq)$

$$F : B \to \mathscr{P}(At(B))$$
$$x \mapsto \{a \in At(B) : a \leq x\}$$

es un isomorfismo entre $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ *y* $\left(\mathscr{P}(At(B)), \cup, \cap, (\cdot)^c, \varnothing, B\right)$*.*

Teorema de representación de álgebras de Boole finitas

Teorema

Sea $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ *un álgebra de Boole finita. Luego*

$$\begin{aligned} F : B &\to \mathscr{P}(At(B)) \\ x &\mapsto \{a \in At(B) : a \leq x\} \end{aligned}$$

es un isomorfismo entre $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ *y* $\left(\mathscr{P}(At(B)), \cup, \cap, (\cdot)^c, \varnothing, B\right)$*.*

Para probarlo, necesitamos ver que F:

Teorema de representación de álgebras de Boole finitas

Teorema

Sea $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ *un álgebra de Boole finita. Luego*

$$\begin{aligned} F : B &\to \mathscr{P}(At(B)) \\ x &\mapsto \{a \in At(B) : a \leq x\} \end{aligned}$$

es un isomorfismo entre $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ *y* $\left(\mathscr{P}(At(B)), \cup, \cap, (\cdot)^c, \varnothing, B\right)$*.*

Para probarlo, necesitamos ver que F:

- Es biyectiva.
- Preserva el orden $c \leq b \iff F(c) \subseteq F(b)$.

Teorema de representación de álgebras de Boole finitas

Teorema

Sea $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ *un álgebra de Boole finita. Luego*

$$\begin{aligned} F : B &\to \mathscr{P}(At(B)) \\ x &\mapsto \{a \in At(B) : a \leq x\} \end{aligned}$$

es un isomorfismo entre $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ *y* $\left(\mathscr{P}(At(B)), \cup, \cap, (\cdot)^c, \varnothing, B\right)$.

Para probarlo, necesitamos ver que F:

- Es biyectiva. Tiene inversa $\sup : \mathscr{P}(At(B)) \to B$. A continuación.
- Preserva el orden $c \leq b \iff F(c) \subseteq F(b)$.

Teorema de representación de álgebras de Boole finitas

Teorema

Sea $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ *un álgebra de Boole finita. Luego*

$$\begin{aligned} F : B &\to \mathscr{P}(At(B)) \\ x &\mapsto \{a \in At(B) : a \leq x\} \end{aligned}$$

es un isomorfismo entre $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ *y* $\left(\mathscr{P}(At(B)), \cup, \cap, (\cdot)^c, \varnothing, B\right)$*.*

Para probarlo, necesitamos ver que F:

- Es biyectiva. Tiene inversa $\sup : \mathscr{P}(At(B)) \to B$. A continuación.
- Preserva el orden $c \leq b \iff F(c) \subseteq F(b)$. Sale directo de:
  - $(\Rightarrow)$ la transitividad de $\leq$;

Teorema de representación de álgebras de Boole finitas

Teorema

Sea $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ *un álgebra de Boole finita. Luego*

$$\begin{aligned} F : B &\to \mathscr{P}(At(B)) \\ x &\mapsto \{a \in At(B) : a \leq x\} \end{aligned}$$

es un isomorfismo entre $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ *y* $\left(\mathscr{P}(At(B)), \cup, \cap, (\cdot)^c, \varnothing, B\right)$*.*

Para probarlo, necesitamos ver que F:

- Es biyectiva. Tiene inversa $\sup : \mathscr{P}(At(B)) \to B$. A continuación.
- Preserva el orden $c \leq b \iff F(c) \subseteq F(b)$. Sale directo de:
  - $(\Rightarrow)$ la transitividad de $\leq$;
  - $(\Leftarrow)$ $X \subseteq Y \implies \sup X \leq \sup Y$.

Teorema de representación de álgebras de Boole finitas

Teorema

Sea $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ *un álgebra de Boole finita. Luego*

$$\begin{aligned} F : B &\to \mathscr{P}(At(B)) \\ x &\mapsto \{a \in At(B) : a \leq x\} \end{aligned}$$

es un isomorfismo entre $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ *y* $\big(\mathscr{P}(At(B)), \cup, \cap, (\cdot)^c, \varnothing, B\big)$.

Para probarlo, necesitamos ver que F:

- Es biyectiva. Tiene inversa $\sup : \mathscr{P}(At(B)) \to B$. A continuación.
- Preserva el orden $c \leq b \iff F(c) \subseteq F(b)$. Sale directo de:
  - $(\Rightarrow)$ la transitividad de $\leq$;
  - $(\Leftarrow)$ $X \subseteq Y \implies \sup X \leq \sup Y$.

Nos enfocamos en el caso $|B| \geqslant 2$.

Hay suficiente cantidad de átomos

Lema (Álgebras de Boole finitas son atómicas)

Para todo $b \in B$ *distinto de* 0 *existe* $a \in At(B)$ *tal que* $a \leq b$.

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

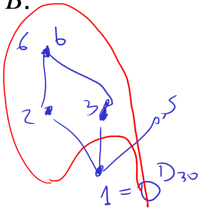
Hay suficiente cantidad de átomos

Lema (Álgebras de Boole finitas son atómicas)

Para todo $b \in B$ distinto de 0 existe $a \in At(B)$ tal que $a \leq b$.

Demostración.

Basta encontrar un minimal del subposet finito $b{\downarrow} \setminus \{0\}$ de B.



Hay suficiente cantidad de átomos

Lema (Álgebras de Boole finitas son atómicas)

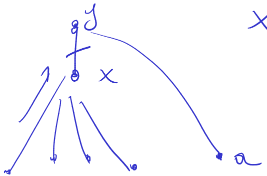
Para todo $b \in B$ *distinto de* 0 *existe* $a \in At(B)$ *tal que* $a \leq b$*.*

Demostración.

Basta encontrar un minimal del subposet finito $b{\downarrow} \setminus \{0\}$ de B.

Lema (Separación)

Para todo $x, y \in B$ *tales que* $x \not\leq y$ *existe* $a \in At(B)$ *tal que* $a \leq x$ *y* $a \not\leq y$*.*



$x \not\leq y \iff x \wedge \neg y \neq 0$

Hay suficiente cantidad de átomos

Lema (Álgebras de Boole finitas son atómicas)

Para todo $b \in B$ *distinto de* 0 *existe* $a \in At(B)$ *tal que* $a \leq b$.

Demostración.

Basta encontrar un minimal del subposet finito $b{\downarrow} \setminus \{0\}$ de B.

Lema (Separación)

Para todo $x, y \in B$ *tales que* $x \not\leq y$ *existe* $a \in At(B)$ *tal que* $a \leq x$ *y* $a \not\leq y$.

Demostración.

Porque $x \wedge \neg y \neq 0$ y hay un átomo debajo.

$a \leq x \wedge \neg y \leq x$ ✓

$\leq \neg y$.

Ver que $a \not\leq y$. Por el absurdo,

$0 \neq a \leq y \wedge \neg y = 0$ ✓

Hay suficiente cantidad de átomos

Lema (Álgebras de Boole finitas son atómicas)

Para todo $b \in B$ *distinto de* 0 *existe* $a \in At(B)$ *tal que* $a \leq b$.

Demostración.

Basta encontrar un minimal del subposet finito $b{\downarrow} \setminus \{0\}$ de B.

Lema (Separación)

Para todo $x, y \in B$ *tales que* $x \not\leq y$ *existe* $a \in At(B)$ *tal que* $a \leq x$ *y* $a \not\leq y$.

Demostración.

Porque $x \wedge \neg y \neq 0$ y hay un átomo debajo.

$\sup F(x) = x \quad \forall x \in B$

Pasamos entonces a la prueba principal, la correspondencia entre conjuntos de átomos y elementos de B.

Separación Para todo $x, y \in B$ tales que $x \not\leq y$ existe $a \in At(B)$ tal que $a \leq x$ y $a \not\leq y$.

negar $\exists a \in At(B) \quad a \leq x$ y $a \not\leq y$.

$\forall a \in At(B) \quad a \leq x \Rightarrow a \leq y$.

$F(x) \subseteq F(y)$

$\Downarrow$

$x \leq y$.

F y $\sup$ son inversas

Separación Para todo $x, y \in B$ tales que $x \not\leq y$ existe $a \in At(B)$ tal que $a \leq x$ y $a \not\leq y$.

Recordemos: $F(x) := \{a \in At(B) : a \leq x\}$.

F y $\sup$ son inversas

Separación Para todo $x, y \in B$ tales que $x \nleq y$ existe $a \in At(B)$ tal que $a \leq x$ y $a \nleq y$.

$F(x) \subseteq F(y)$ implica $x \leq y$.

Recordemos: $F(x) := \{a \in At(B) : a \leq x\}$.

F y $\sup$ son inversas

Separación Para todo $x, y \in B$ tales que $x \not\leq y$ existe $a \in At(B)$ tal que $a \leq x$ y $a \not\leq y$. $F(x) \subseteq F(y)$ implica $x \leq y$.

Recordemos: $F(x) := \{a \in At(B) : a \leq x\}$.

Prueba del Teorema de Representación.

Vemos que F y $\sup$ son inversas una de la otra.

F y $\sup$ son inversas

Separación Para todo $x, y \in B$ tales que $x \not\leq y$ existe $a \in At(B)$ tal que $a \leq x$ y $a \not\leq y$. $F(x) \subseteq F(y)$ implica $x \leq y$.

Recordemos: $F(x) := \{a \in At(B) : a \leq x\}$.

Prueba del Teorema de Representación.

Vemos que F y $\sup$ son inversas una de la otra.

- $x = \sup F(x) = \sup\{a \in At(B) : a \leq x\}$ para todo $x \in B$:

F y $\sup$ son inversas

Separación Para todo $x, y \in B$ tales que $x \not\leq y$ existe $a \in At(B)$ tal que $a \leq x$ y $a \not\leq y$.

$F(x) \subseteq F(y)$ implica $x \leq y$.

Recordemos: $F(x) := \{a \in At(B) : a \leq x\}$.

Prueba del Teorema de Representación.

Vemos que F y $\sup$ son inversas una de la otra.

- $x = \sup F(x) = \sup\{a \in At(B) : a \leq x\}$ para todo $x \in B$:
  x es claramente cota de $F(x)$. Y si y es cota, $F(x) \subseteq F(y)$, lo que implica $x \leq y$ por Separación.

$$\underbrace{\forall a \in \underset{At(B)}{\underset{\cap}{F(x)}} \quad a \leq y \rightsquigarrow a \in F(y)}_{F(x) \subseteq F(y).}$$

F y $\sup$ son inversas

Separación Para todo $x, y \in B$ tales que $x \not\leq y$ existe $a \in At(B)$ tal que $a \leq x$ y $a \not\leq y$.

$F(x) \subseteq F(y)$ implica $x \leq y$.

Recordemos: $F(x) := \{a \in At(B) : a \leq x\}$.

Prueba del Teorema de Representación.

Vemos que F y $\sup$ son inversas una de la otra.

- $x = \sup F(x) = \sup\{a \in At(B) : a \leq x\}$ para todo $x \in B$:
  x es claramente cota de $F(x)$. Y si y es cota, $F(x) \subseteq F(y)$, lo que implica $x \leq y$ por Separación.

F y $\sup$ son inversas

Separación Para todo $x, y \in B$ tales que $x \not\leq y$ existe $a \in At(B)$ tal que $a \leq x$ y $a \not\leq y$.

$F(x) \subseteq F(y)$ implica $x \leq y$.

Recordemos: $F(x) := \{a \in At(B) : a \leq x\}$.

Prueba del Teorema de Representación.

Vemos que F y $\sup$ son inversas una de la otra.

- $x = \sup F(x) = \sup\{a \in At(B) : a \leq x\}$ para todo $x \in B$:
  x es claramente cota de $F(x)$. Y si y es cota, $F(x) \subseteq F(y)$, lo que implica $x \leq y$ por Separación. $\sup \circ F = id_B$ $\quad F \circ \sup = id_{\mathcal{P}(At(B))}$
- $A = F(\sup A) = \{a \in At(B) : a \leq \sup A\}$ para todo $A \subseteq At(B)$:

F y $\sup$ son inversas

Separación Para todo $x, y \in B$ tales que $x \not\leq y$ existe $a \in At(B)$ tal que $a \leq x$ y $a \not\leq y$. $F(x) \subseteq F(y)$ implica $x \leq y$.

Recordemos: $F(x) := \{a \in At(B) : a \leq x\}$.

Prueba del Teorema de Representación.

Vemos que F y $\sup$ son inversas una de la otra.

- $x = \sup F(x) = \sup\{a \in At(B) : a \leq x\}$ para todo $x \in B$:
  x es claramente cota de $F(x)$. Y si y es cota, $F(x) \subseteq F(y)$, lo que implica $x \leq y$ por Separación.
- $A = F(\sup A) = \{a \in At(B) : a \leq \sup A\}$ para todo $A \subseteq At(B)$:
  $A \subseteq F(\sup A)$ sale directo. Y $F(\sup A) \subseteq A$ por distributividad.

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS