

Introducción a la Lógica y la Computación

Mariana Badano Héctor Gramaglia
Pedro Sánchez Terraf Mauricio Tellechea
Guido Ivetta

FaMAF, 6 de octubre de 2021



- 1 Conexiones entre lógica y álgebras de Boole
 - Relación de deducción entre proposiciones
 - Cocientes
 - Orden en \overline{PROP}
 - Ínfimos y supremos en \overline{PROP}
 - Estructura del álgebra de Boole \overline{PROP}

¿Qué tienen que ver...?

Tratemos de encontrar conexión entre esta parte y la anterior

¿Qué tienen que ver...?

Tratemos de encontrar conexión entre esta parte y la anterior... Si no, ¿por qué usaríamos los mismos símbolos para ínfimo que conjunción, etcétera?

¿Qué tienen que ver...?

Tratemos de encontrar conexión entre esta parte y la anterior... Si no, ¿por qué usaríamos los mismos símbolos para ínfimo que conjunción, etcétera?

Definamos una relación en *PROP*: $\varphi \preceq \psi : \iff \{\varphi\} \vdash \psi$.

¿Qué tienen que ver...?

Tratemos de encontrar conexión entre esta parte y la anterior... Si no, ¿por qué usaríamos los mismos símbolos para ínfimo que conjunción, etcétera?

Definamos una relación en *PROP*: $\varphi \preceq \psi : \iff \{\varphi\} \vdash \psi$.

Propiedades de \preceq

1 $\{\varphi\} \vdash \varphi$.

¿Qué tienen que ver...?

Tratemos de encontrar conexión entre esta parte y la anterior... Si no, ¿por qué usaríamos los mismos símbolos para ínfimo que conjunción, etcétera?

Definamos una relación en *PROP*: $\varphi \preceq \psi : \iff \{\varphi\} \vdash \psi$.

Propiedades de \preceq

- 1 $\{\varphi\} \vdash \varphi$.
- 2 Si $\{\varphi\} \vdash \psi$ y $\{\psi\} \vdash \chi$ entonces $\{\varphi\} \vdash \chi$.

- Si $\{\varphi\} \vdash \psi$ y $\{\psi\} \vdash \chi$ entonces $\{\varphi\} \vdash \chi$.

¿Qué tienen que ver...?

Tratemos de encontrar conexión entre esta parte y la anterior... Si no, ¿por qué usaríamos los mismos símbolos para ínfimo que conjunción, etcétera?

Definamos una relación en *PROP*: $\varphi \preceq \psi : \iff \{\varphi\} \vdash \psi$.

Propiedades de \preceq

- 1 $\{\varphi\} \vdash \varphi$.
- 2 Si $\{\varphi\} \vdash \psi$ y $\{\psi\} \vdash \chi$ entonces $\{\varphi\} \vdash \chi$.
- 3 Si $\{\varphi\} \vdash \psi$ y $\{\psi\} \vdash \varphi$ entonces $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$.

¿Qué tienen que ver...?

Tratemos de encontrar conexión entre esta parte y la anterior... Si no, ¿por qué usaríamos los mismos símbolos para ínfimo que conjunción, etcétera?

Definamos una relación en *PROP*: $\varphi \preceq \psi : \iff \{\varphi\} \vdash \psi$.

Propiedades de \preceq

- 1 $\varphi \preceq \varphi$.
- 2 Si $\{\varphi\} \vdash \psi$ y $\{\psi\} \vdash \chi$ entonces $\{\varphi\} \vdash \chi$.
- 3 Si $\{\varphi\} \vdash \psi$ y $\{\psi\} \vdash \varphi$ entonces $\varphi \leftrightarrow \psi$.

¿Qué tienen que ver...?

Tratemos de encontrar conexión entre esta parte y la anterior... Si no, ¿por qué usaríamos los mismos símbolos para ínfimo que conjunción, etcétera?

Definamos una relación en *PROP*: $\varphi \preceq \psi : \iff \{\varphi\} \vdash \psi$.

Propiedades de \preceq

- 1 $\varphi \preceq \varphi$.
- 2 Si $\varphi \preceq \psi$ y $\psi \preceq \chi$ entonces $\varphi \preceq \chi$.
- 3 Si $\{\varphi\} \vdash \psi$ y $\{\psi\} \vdash \varphi$ entonces $\varphi \leftrightarrow \psi$.

¿Qué tienen que ver...?

Tratemos de encontrar conexión entre esta parte y la anterior... Si no, ¿por qué usaríamos los mismos símbolos para ínfimo que conjunción, etcétera?

Definamos una relación en *PROP*: $\varphi \preceq \psi : \iff \{\varphi\} \vdash \psi$.

Propiedades de \preceq

- 1 $\varphi \preceq \varphi$.
- 2 Si $\varphi \preceq \psi$ y $\psi \preceq \chi$ entonces $\varphi \preceq \chi$.
- 3 Si $\varphi \preceq \psi$ y $\psi \preceq \varphi$ entonces $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$.

¿Qué tienen que ver...?

Tratemos de encontrar conexión entre esta parte y la anterior... Si no, ¿por qué usaríamos los mismos símbolos para ínfimo que conjunción, etcétera?

Definamos una relación en *PROP*: $\varphi \preceq \psi : \iff \{\varphi\} \vdash \psi$.

Propiedades de \preceq

- 1 $\varphi \preceq \varphi$.
- 2 Si $\varphi \preceq \psi$ y $\psi \preceq \chi$ entonces $\varphi \preceq \chi$.
- 3 Si $\varphi \preceq \psi$ y $\psi \preceq \varphi$ entonces $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$.

Encuesta!!!

¿Es \preceq una relación de orden?

¿Qué tienen que ver...?

Tratemos de encontrar conexión entre esta parte y la anterior... Si no, ¿por qué usaríamos los mismos símbolos para ínfimo que conjunción, etcétera?

Definamos una relación en *PROP*: $\varphi \preceq \psi : \iff \{\varphi\} \vdash \psi$.

Propiedades de \preceq

- 1 $\varphi \preceq \varphi$.
- 2 Si $\varphi \preceq \psi$ y $\psi \preceq \chi$ entonces $\varphi \preceq \chi$.
- 3 Si $\varphi \preceq \psi$ y $\psi \preceq \varphi$ entonces $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$.

Encuesta!!!

¿Es \preceq una relación de orden?

→ [Actividad en Aula virtual!](#)



UNC
Universidad
Nacional
de Córdoba



No

No. Es un preorden.

¿Qué tienen que ver...?

Tratemos de encontrar conexión entre esta parte y la anterior... Si no, ¿por qué usaríamos los mismos símbolos para ínfimo que conjunción, etcétera?

Definamos una relación en *PROP*: $\varphi \preceq \psi : \iff \{\varphi\} \vdash \psi$.

Propiedades de \preceq

- 1 $\varphi \preceq \varphi$.
- 2 Si $\varphi \preceq \psi$ y $\psi \preceq \chi$ entonces $\varphi \preceq \chi$.
- 3 Si $\varphi \preceq \psi$ y $\psi \preceq \varphi$ entonces $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$.

Encuesta!!!

¿Es \preceq una relación de orden?

→ [Actividad en Aula virtual!](#)



UNC
Universidad
Nacional
de Córdoba



¿Qué tienen que ver...?

Tratemos de encontrar conexión entre esta parte y la anterior... Si no, ¿por qué usaríamos los mismos símbolos para ínfimo que conjunción, etcétera?

Definamos una relación en *PROP*: $\varphi \preceq \psi : \iff \{\varphi\} \vdash \psi$.

Propiedades de \preceq

- 1 $\varphi \preceq \varphi$.
- 2 Si $\varphi \preceq \psi$ y $\psi \preceq \chi$ entonces $\varphi \preceq \chi$.
- 3 Si $\varphi \preceq \psi$ y $\psi \preceq \varphi$ entonces $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$, pero puede ser $\varphi \neq \psi$.

Encuesta!!!

¿Es \preceq una relación de orden?

→ [Actividad en Aula virtual!](#)

- $\varphi \Vdash \psi \iff \{\varphi\} \vdash \psi.$
- $\varphi \Vdash \psi \ \& \ \psi \Vdash \varphi \iff \vdash \varphi \leftrightarrow \psi.$

$$\blacksquare \varphi \vDash \psi \iff \{\varphi\} \vdash \psi.$$

$$\blacksquare \varphi \vDash \psi \ \& \ \psi \vDash \varphi \iff \vdash \varphi \leftrightarrow \psi.$$

Es **relación de equivalencia**.

- $\varphi \vDash \psi \iff \{\varphi\} \vdash \psi.$
- $\varphi \vDash \psi \ \& \ \psi \vDash \varphi \iff \vdash \varphi \leftrightarrow \psi.$

Es **relación de equivalencia**.

Solución: considerar las cosas equivalentes como iguales.

- $\varphi \vDash \psi \iff \{\varphi\} \vdash \psi.$
- $\varphi \vDash \psi \ \& \ \psi \vDash \varphi \iff \vdash \varphi \leftrightarrow \psi.$

Es relación de equivalencia.

Solución: considerar las cosas equivalentes como iguales.

Definición

- $\bar{\varphi} := [\varphi]_{\leftrightarrow} =$ clase de equiv. de φ

- $\varphi \vDash \psi \iff \{\varphi\} \vdash \psi.$
- $\varphi \vDash \psi \ \& \ \psi \vDash \varphi \iff \vdash \varphi \leftrightarrow \psi.$

Es relación de equivalencia.

Solución: considerar las cosas equivalentes como iguales.

Definición

- $\bar{\varphi} := [\varphi]_{\leftrightarrow} =$ clase de equiv. de $\varphi = \{\psi \in PROP : \varphi \vDash \psi \ \& \ \psi \vDash \varphi\}.$

- $\varphi \vDash \psi \iff \{\varphi\} \vdash \psi.$
- $\varphi \vDash \psi \ \& \ \psi \vDash \varphi \iff \vdash \varphi \leftrightarrow \psi.$

Es relación de equivalencia.

Solución: considerar las cosas equivalentes como iguales.

Definición

- $\overline{\varphi} := [\varphi]_{\leftrightarrow} = \text{clase de equiv. de } \varphi = \{\psi \in PROP : \varphi \vDash \psi \ \& \ \psi \vDash \varphi\}.$
- $\overline{PROP} := PROP / \leftrightarrow = \{\overline{\varphi} : \varphi \in PROP\}.$

- $\varphi \vDash \psi \iff \{\varphi\} \vdash \psi.$
- $\varphi \vDash \psi \ \& \ \psi \vDash \varphi \iff \vdash \varphi \leftrightarrow \psi.$

Es relación de equivalencia.

Solución: considerar las cosas equivalentes como iguales.

Definición

- $\overline{\varphi} := [\varphi]_{\leftrightarrow} =$ clase de equiv. de $\varphi = \{\psi \in PROP : \varphi \vDash \psi \ \& \ \psi \vDash \varphi\}.$
- $\overline{PROP} := PROP / \leftrightarrow = \{\overline{\varphi} : \varphi \in PROP\}.$

Orden en \overline{PROP}

$$\overline{\varphi} \leq \overline{\psi} \iff \varphi \vDash \psi.$$

$$\blacksquare \varphi \leq \bar{\psi} \iff \varphi \preceq \psi \iff \{\varphi\} \vdash \psi.$$

$$\blacksquare \overline{\varphi} \leq \overline{\psi} \iff \varphi \preceq \psi \iff \{\varphi\} \vdash \psi.$$

Proposición (\leq no es total en \overline{PROP})

$$n \neq m \implies \overline{p_n} \not\leq \overline{p_m} \text{ para todos } n, m \in \mathbb{N}_0.$$

$$\blacksquare \overline{\varphi} \leq \overline{\psi} \iff \varphi \preceq \psi \iff \{\varphi\} \vdash \psi.$$

Proposición (\leq no es total en \overline{PROP})

$$n \neq m \implies \overline{p_n} \not\leq \overline{p_m} \text{ para todos } n, m \in \mathbb{N}_0.$$

Necesitamos una manera de justificar que $\{p_n\} \not\vdash p_m$.

$$\blacksquare \overline{\varphi} \leq \overline{\psi} \iff \varphi \preceq \psi \iff \{\varphi\} \vdash \psi.$$

Proposición (\leq no es total en \overline{PROP})

$$n \neq m \implies \overline{p_n} \not\leq \overline{p_m} \text{ para todos } n, m \in \mathbb{N}_0.$$

Necesitamos una manera de justificar que $\{p_n\} \not\vdash p_m$. Recordemos:

Teorema (de Corrección)

Para todo $\Gamma \subseteq PROP$ y $\varphi \in PROP$, si $\Gamma \vdash \varphi$ entonces $\Gamma \models \varphi$.

$$\blacksquare \overline{\varphi} \leq \overline{\psi} \iff \varphi \preceq \psi \iff \{\varphi\} \vdash \psi.$$

Proposición (\leq no es total en \overline{PROP})

$$n \neq m \implies \overline{p_n} \not\leq \overline{p_m} \quad \text{para todos } n, m \in \mathbb{N}_0.$$

Necesitamos una manera de justificar que $\{p_n\} \not\vdash p_m$. Recordemos:

Teorema (de Corrección)

Para todo $\Gamma \subseteq PROP$ y $\varphi \in PROP$, si $\Gamma \vdash \varphi$ entonces $\Gamma \models \varphi$.

Es decir, si $\Gamma \vdash \varphi$ y $\llbracket \Gamma \rrbracket_v = 1$ entonces $\llbracket \varphi \rrbracket_v = 1$.

$$\blacksquare \overline{\varphi} \leq \overline{\psi} \iff \varphi \preceq \psi \iff \{\varphi\} \vdash \psi.$$

Proposición (\leq no es total en \overline{PROP})

$$n \neq m \implies \overline{p_n} \not\leq \overline{p_m} \quad \text{para todos } n, m \in \mathbb{N}_0.$$

Necesitamos una manera de justificar que $\{p_n\} \not\vdash p_m$. Recordemos:

Teorema (de Corrección)

Para todo $\Gamma \subseteq PROP$ y $\varphi \in PROP$, si $\Gamma \vdash \varphi$ entonces $\Gamma \models \varphi$.

Es decir, si $\Gamma \vdash \varphi$ y $\llbracket \Gamma \rrbracket_v = 1$ entonces $\llbracket \varphi \rrbracket_v = 1$.

Por la contrarrecíproca tenemos:

No derivación

Para ver que $\Gamma \not\vdash \varphi$, basta encontrar v tal que $\llbracket \Gamma \rrbracket_v = 1$ y $\llbracket \varphi \rrbracket_v = 0$.

- Para ver que $\Gamma \not\vdash \varphi$, basta encontrar ν tal que $\llbracket \Gamma \rrbracket_\nu = 1$ y $\llbracket \varphi \rrbracket_\nu = 0$.

$n \neq m \implies \overline{p_n} \not\equiv \overline{p_m}$ para todos $n, m \in \mathbb{N}_0$.

$$\blacksquare \varphi \sqsubseteq \bar{\psi} \iff \varphi \preceq \psi \iff \{\varphi\} \vdash \psi.$$

$$\blacksquare \bar{\varphi} \leq \bar{\psi} \iff \varphi \preceq \psi \iff \{\varphi\} \vdash \psi.$$

Ejercicios

- 1 $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi.$
- 2 $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \psi.$
- 3 Si $\{\chi\} \vdash \varphi$ y $\{\chi\} \vdash \psi$ entonces $\{\chi\} \vdash \varphi \wedge \psi.$

Ínfimos y supremos en \overline{PROP}

$$\blacksquare \overline{\varphi} \leq \overline{\psi} \iff \varphi \preceq \psi \iff \{\varphi\} \vdash \psi.$$

Ejercicios

- 1 $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi$. $\overline{\varphi \wedge \psi} \leq \overline{\varphi}$.
- 2 $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \psi$.
- 3 Si $\{\chi\} \vdash \varphi$ y $\{\chi\} \vdash \psi$ entonces $\{\chi\} \vdash \varphi \wedge \psi$.



Ínfimos y supremos en \overline{PROP}

$$\blacksquare \overline{\varphi} \leq \overline{\psi} \iff \varphi \preceq \psi \iff \{\varphi\} \vdash \psi.$$

Ejercicios

- 1 $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi$. $\overline{\varphi \wedge \psi} \leq \overline{\varphi}$.
- 2 $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \psi$. $\overline{\varphi \wedge \psi} \leq \overline{\psi}$.
- 3 Si $\{\chi\} \vdash \varphi$ y $\{\chi\} \vdash \psi$ entonces $\{\chi\} \vdash \varphi \wedge \psi$.



Ínfimos y supremos en \overline{PROP}

$$\blacksquare \overline{\varphi} \leq \overline{\psi} \iff \varphi \preceq \psi \iff \{\varphi\} \vdash \psi.$$

Ejercicios

- 1** $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi$. $\overline{\varphi \wedge \psi} \leq \overline{\varphi}$.
- 2** $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \psi$. $\overline{\varphi \wedge \psi} \leq \overline{\psi}$.
- 3** Si $\{\chi\} \vdash \varphi$ y $\{\chi\} \vdash \psi$ entonces $\{\chi\} \vdash \varphi \wedge \psi$.
Si $\overline{\chi} \leq \overline{\varphi}$ y $\overline{\chi} \leq \overline{\psi}$ entonces $\overline{\chi} \leq \overline{\varphi \wedge \psi}$.



Ínfimos y supremos en \overline{PROP}

$$\blacksquare \overline{\varphi} \leq \overline{\psi} \iff \varphi \preceq \psi \iff \{\varphi\} \vdash \psi.$$

Ejercicios

- $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi$. $\overline{\varphi \wedge \psi} \leq \overline{\varphi}$.
- $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \psi$. $\overline{\varphi \wedge \psi} \leq \overline{\psi}$.
- Si $\{\chi\} \vdash \varphi$ y $\{\chi\} \vdash \psi$ entonces $\{\chi\} \vdash \varphi \wedge \psi$.
Si $\overline{\chi} \leq \overline{\varphi}$ y $\overline{\chi} \leq \overline{\psi}$ entonces $\overline{\chi} \leq \overline{\varphi \wedge \psi}$.

Hay ínfimo

$\overline{\varphi} \sqcap \overline{\psi} := \overline{\varphi \wedge \psi}$ es el ínfimo de $\{\overline{\varphi}, \overline{\psi}\}$ en (\overline{PROP}, \leq) .

\overline{PROP} es un reticulado distributivo

De igual modo,

$$\overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi} := \overline{\varphi \vee \psi} = \sup\{\overline{\varphi}, \overline{\psi}\}.$$

\overline{PROP} es un reticulado distributivo

De igual modo,

$$\overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi} := \overline{\varphi \vee \psi} = \sup\{\overline{\varphi}, \overline{\psi}\}.$$

\perp es el primer elemento y $\top = \overline{\neg \perp}$ el último:

$$\{\perp\} \vdash \varphi \quad \{\varphi\} \vdash \top.$$

\overline{PROP} es un reticulado distributivo

De igual modo,

$$\overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi} := \overline{\varphi \vee \psi} = \sup\{\overline{\varphi}, \overline{\psi}\}.$$

$\overline{\perp}$ es el primer elemento y $\overline{\top} = \overline{\neg\perp}$ el último:

$$\{\perp\} \vdash \varphi \quad \{\varphi\} \vdash \top.$$

Además, $\sim \overline{\varphi} := \overline{\neg\varphi}$ resulta ser un complemento de $\overline{\varphi}$.

\overline{PROP} es un reticulado distributivo

De igual modo,

$$\overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi} := \overline{\varphi \vee \psi} = \sup\{\overline{\varphi}, \overline{\psi}\}.$$

$\overline{\perp}$ es el primer elemento y $\overline{\top} = \overline{\neg \perp}$ el último:

$$\{\perp\} \vdash \varphi \quad \{\varphi\} \vdash \top.$$

Además, $\sim \overline{\varphi} := \overline{\neg \varphi}$ resulta ser un complemento de $\overline{\varphi}$.

Ejercicio

$$\{(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta)\} \vdash \varphi \vee (\psi \wedge \theta).$$

\overline{PROP} es un reticulado distributivo

De igual modo,

$$\overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi} := \overline{\varphi \vee \psi} = \sup\{\overline{\varphi}, \overline{\psi}\}.$$

\perp es el primer elemento y $\top = \overline{\perp}$ el último:

$$\{\perp\} \vdash \varphi \quad \{\varphi\} \vdash \top.$$

Además, $\sim \overline{\varphi} := \overline{\neg \varphi}$ resulta ser un complemento de $\overline{\varphi}$.

Ejercicio

$$\{(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta)\} \vdash \varphi \vee (\psi \wedge \theta). \quad (\overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi}) \sqcap (\overline{\varphi} \sqcup \overline{\theta}) \leq \overline{\varphi} \sqcup (\overline{\psi} \sqcap \overline{\theta})$$



UNC
Universidad
Nacional
de Córdoba



\overline{PROP} es un reticulado distributivo

De igual modo,

$$\overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi} := \overline{\varphi \vee \psi} = \sup\{\overline{\varphi}, \overline{\psi}\}.$$

\perp es el primer elemento y $\top = \overline{\neg \perp}$ el último:

$$\{\perp\} \vdash \varphi \quad \{\varphi\} \vdash \top.$$

Además, $\sim \overline{\varphi} := \overline{\neg \varphi}$ resulta ser un complemento de $\overline{\varphi}$.

Ejercicio

$$\{(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta)\} \vdash \varphi \vee (\psi \wedge \theta). \quad (\overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi}) \sqcap (\overline{\varphi} \sqcup \overline{\theta}) \leq \overline{\varphi} \sqcup (\overline{\psi} \sqcap \overline{\theta})$$

Luego (\overline{PROP}, \leq) es un reticulado distributivo.

\overline{PROP} es un reticulado distributivo

De igual modo,

$$\overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi} := \overline{\varphi \vee \psi} = \sup\{\overline{\varphi}, \overline{\psi}\}.$$

\perp es el primer elemento y $\top = \overline{\perp}$ el último:

$$\{\perp\} \vdash \varphi \quad \{\varphi\} \vdash \top.$$

Además, $\sim \overline{\varphi} := \overline{\neg \varphi}$ resulta ser un complemento de $\overline{\varphi}$.

Ejercicio

$$\{(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta)\} \vdash \varphi \vee (\psi \wedge \theta). \quad (\overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi}) \sqcap (\overline{\varphi} \sqcup \overline{\theta}) \leq \overline{\varphi} \sqcup (\overline{\psi} \sqcap \overline{\theta})$$

Luego (\overline{PROP}, \leq) es un reticulado distributivo.

... wait a minute.

\overline{PROP} es un reticulado distributivo

De igual modo,

$$\overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi} := \overline{\varphi \vee \psi} = \sup\{\overline{\varphi}, \overline{\psi}\}.$$

\perp es el primer elemento y $\top = \overline{\perp}$ el último:

$$\{\perp\} \vdash \varphi \quad \{\varphi\} \vdash \top.$$

Además, $\sim \overline{\varphi} := \overline{\neg \varphi}$ resulta ser un complemento de $\overline{\varphi}$.

Ejercicio

$$\{(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta)\} \vdash \varphi \vee (\psi \wedge \theta). \quad (\overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi}) \sqcap (\overline{\varphi} \sqcup \overline{\theta}) \leq \overline{\varphi} \sqcup (\overline{\psi} \sqcap \overline{\theta})$$

Luego (\overline{PROP}, \leq) es un reticulado distributivo.

... wait a minute.

¿Distributivo?

\overline{PROP} es un reticulado distributivo. . . ¿¡Por qué!?

\sqcap es el ínfimo

- 1 $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi$.
- 2 $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \psi$.
- 3 Si $\{\chi\} \vdash \varphi$ y $\{\chi\} \vdash \psi$ entonces $\{\chi\} \vdash \varphi \wedge \psi$.

\overline{PROP} es un reticulado distributivo. . . ¿¡Por qué!?

\sqcap es el ínfimo

- $\{ \varphi \wedge \psi \} \vdash \varphi.$ $\overline{\varphi} \sqcap \overline{\psi} \leq \overline{\varphi}.$
- $\{ \varphi \wedge \psi \} \vdash \psi.$ $\overline{\varphi} \sqcap \overline{\psi} \leq \overline{\psi}.$
- Si $\{ \chi \} \vdash \varphi$ y $\{ \chi \} \vdash \psi$ entonces $\{ \chi \} \vdash \varphi \wedge \psi.$
Si $\overline{\chi} \leq \overline{\varphi}$ y $\overline{\chi} \leq \overline{\psi}$ entonces $\overline{\chi} \leq \overline{\varphi} \sqcap \overline{\psi}.$

\overline{PROP} es un reticulado distributivo. . . ¿¡Por qué!?

\sqcap es el ínfimo

- 1 $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi$. ($\wedge E$) $\overline{\varphi} \sqcap \overline{\psi} \leq \overline{\varphi}$.
- 2 $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \psi$. $\overline{\varphi} \sqcap \overline{\psi} \leq \overline{\psi}$.
- 3 Si $\{\chi\} \vdash \varphi$ y $\{\chi\} \vdash \psi$ entonces $\{\chi\} \vdash \varphi \wedge \psi$.
Si $\overline{\chi} \leq \overline{\varphi}$ y $\overline{\chi} \leq \overline{\psi}$ entonces $\overline{\chi} \leq \overline{\varphi} \sqcap \overline{\psi}$.



UNC
Universidad
Nacional
de Córdoba



\overline{PROP} es un reticulado distributivo. . . ¿¡Por qué!?

\sqcap es el ínfimo

- 1 $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi$. ($\wedge E$) $\overline{\varphi} \sqcap \overline{\psi} \leq \overline{\varphi}$.
- 2 $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \psi$. ($\wedge E$) $\overline{\varphi} \sqcap \overline{\psi} \leq \overline{\psi}$.
- 3 Si $\{\chi\} \vdash \varphi$ y $\{\chi\} \vdash \psi$ entonces $\{\chi\} \vdash \varphi \wedge \psi$.
Si $\overline{\chi} \leq \overline{\varphi}$ y $\overline{\chi} \leq \overline{\psi}$ entonces $\overline{\chi} \leq \overline{\varphi} \sqcap \overline{\psi}$.



UNC
Universidad
Nacional
de Córdoba



\overline{PROP} es un reticulado distributivo. . . ¿Por qué!?

\sqcap es el ínfimo

1 $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi. \quad (\wedge E) \quad \overline{\varphi} \sqcap \overline{\psi} \leq \overline{\varphi}.$

2 $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \psi. \quad (\wedge E) \quad \overline{\varphi} \sqcap \overline{\psi} \leq \overline{\psi}.$

3 Si $\{\chi\} \vdash \varphi$ y $\{\chi\} \vdash \psi$ entonces $\{\chi\} \vdash \varphi \wedge \psi. \quad (\wedge I)$

Si $\overline{\chi} \leq \overline{\varphi}$ y $\overline{\chi} \leq \overline{\psi}$ entonces $\overline{\chi} \leq \overline{\varphi} \sqcap \overline{\psi}.$



UNC
Universidad
Nacional
de Córdoba



\overline{PROP} es un reticulado distributivo. . . ¿¡Por qué!?

\sqcap es el ínfimo

1 $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi. \quad (\wedge E) \quad \overline{\varphi} \sqcap \overline{\psi} \leq \overline{\varphi}.$

2 $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \psi. \quad (\wedge E) \quad \overline{\varphi} \sqcap \overline{\psi} \leq \overline{\psi}.$

3 Si $\{\chi\} \vdash \varphi$ y $\{\chi\} \vdash \psi$ entonces $\{\chi\} \vdash \varphi \wedge \psi. \quad (\wedge I)$
Si $\overline{\chi} \leq \overline{\varphi}$ y $\overline{\chi} \leq \overline{\psi}$ entonces $\overline{\chi} \leq \overline{\varphi} \sqcap \overline{\psi}.$

Pareciera que sólo estamos describiendo las reglas de \wedge .

\overline{PROP} es un reticulado distributivo. . . ¿Por qué!?

\sqcup es el supremo

- $\{\varphi\} \vdash \varphi \vee \psi.$ $\overline{\varphi} \leq \overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi}.$
- $\{\psi\} \vdash \varphi \vee \psi.$ $\overline{\psi} \leq \overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi}.$
- Si $\{\varphi\} \vdash \chi$ y $\{\psi\} \vdash \chi$ entonces $\{\varphi \vee \psi\} \vdash \chi.$
Si $\overline{\varphi} \leq \overline{\chi}$ y $\overline{\psi} \leq \overline{\chi}$ entonces $\overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi} \leq \overline{\chi}.$

Pareciera que sólo estamos describiendo las reglas de \wedge .

\overline{PROP} es un reticulado distributivo. . . ¿¡Por qué!?

\sqcup es el supremo

1 $\{\varphi\} \vdash \varphi \vee \psi. \quad (\vee I) \quad \overline{\varphi} \leq \overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi}.$

2 $\{\psi\} \vdash \varphi \vee \psi. \quad (\vee I) \quad \overline{\psi} \leq \overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi}.$

3 Si $\{\varphi\} \vdash \chi$ y $\{\psi\} \vdash \chi$ entonces $\{\varphi \vee \psi\} \vdash \chi. \quad (\vee E)$
Si $\overline{\varphi} \leq \overline{\chi}$ y $\overline{\psi} \leq \overline{\chi}$ entonces $\overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi} \leq \overline{\chi}.$

Pareciera que sólo estamos describiendo las reglas de \wedge . Lo mismo con \vee .

\overline{PROP} es un reticulado distributivo. . . ¿Por qué!?

\sqcup es el supremo

1 $\{\varphi\} \vdash \varphi \vee \psi. \quad (\vee I) \quad \overline{\varphi} \leq \overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi}.$

2 $\{\psi\} \vdash \varphi \vee \psi. \quad (\vee I) \quad \overline{\psi} \leq \overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi}.$

3 Si $\{\varphi\} \vdash \chi$ y $\{\psi\} \vdash \chi$ entonces $\{\varphi \vee \psi\} \vdash \chi. \quad (\vee E)$
Si $\overline{\varphi} \leq \overline{\chi}$ y $\overline{\psi} \leq \overline{\chi}$ entonces $\overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi} \leq \overline{\chi}.$

Pareciera que sólo estamos describiendo las reglas de \wedge . Lo mismo con \vee .
Entonces, ¿de dónde sale la distributividad?



UNC
Universidad
Nacional
de Córdoba



Prueba de distributividad

$$\begin{array}{c}
 \frac{(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta)}{\varphi \vee \psi} \wedge E \quad \frac{[\varphi]_1}{\varphi \vee (\psi \wedge \theta)} \vee I \quad \frac{(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta)}{\varphi \vee \theta} \wedge E \quad \frac{[\varphi]_2}{\varphi \vee (\psi \wedge \theta)} \vee I \quad \frac{[\psi]_1 [\theta]_2}{\psi \wedge \theta} \wedge I \\
 \frac{\varphi \vee (\psi \wedge \theta) \quad \varphi \vee \theta \quad \varphi \vee (\psi \wedge \theta) \quad \varphi \vee (\psi \wedge \theta)}{\varphi \vee (\psi \wedge \theta)} \vee E_1 \quad \frac{\varphi \vee (\psi \wedge \theta) \quad \varphi \vee (\psi \wedge \theta)}{\varphi \vee (\psi \wedge \theta)} \vee E_2
 \end{array}$$

Misterio a resolver por Ustedes!

La estructura de \overline{PROP}

$(\overline{PROP}, \sqcup, \sqcap, \overline{\perp}, \overline{\top}, \sim)$ es un álgebra de Boole.

La estructura de \overline{PROP}

$(\overline{PROP}, \sqcup, \sqcap, \overline{\perp}, \overline{\top}, \sim)$ es un álgebra de Boole.

Lema

$(\overline{PROP}, \sqcup, \sqcap, \overline{\perp}, \overline{\top}, \sim)$ no tiene átomos.

La estructura de \overline{PROP}

$(\overline{PROP}, \sqcup, \sqcap, \overline{\perp}, \overline{\top}, \sim)$ es un álgebra de Boole.

Lema

$(\overline{PROP}, \sqcup, \sqcap, \overline{\perp}, \overline{\top}, \sim)$ no tiene átomos.

Recordemos:

Lema (de Coincidencia)

Si $v(p_i) = v'(p_i)$ para todos los p_i que ocurran en φ , entonces $\llbracket \varphi \rrbracket_v = \llbracket \varphi \rrbracket_{v'}$.

La estructura de \overline{PROP}

$(\overline{PROP}, \sqcup, \sqcap, \overline{\perp}, \overline{\top}, \sim)$ es un álgebra de Boole.

Lema

$(\overline{PROP}, \sqcup, \sqcap, \overline{\perp}, \overline{\top}, \sim)$ no tiene átomos.

Recordemos:

Lema (de Coincidencia)

Si $v(p_i) = v'(p_i)$ para todos los p_i que ocurran en φ , entonces $\llbracket \varphi \rrbracket_v = \llbracket \varphi \rrbracket_{v'}$.

Prueba de la Proposición.

Estrategia: Sea $\varphi \in PROP$ tal que $\overline{\perp} < \overline{\varphi}$.

Veremos que si p_n no ocurre en φ , entonces $\psi := (\varphi \wedge p_n) \in PROP$ cumple que

$$\overline{\perp} < \overline{\psi} < \overline{\varphi}.$$

- Si $v(p_i) = v'(p_i)$ para todos los p_i que ocurran en φ , entonces $\llbracket \varphi \rrbracket_v = \llbracket \varphi \rrbracket_{v'}$.
- p_n no ocurre en φ .

$$\overline{\perp} < \overline{(\varphi \wedge p_n)} < \overline{\varphi}$$

$(\overline{PROP}, \sqcup, \sqcap, \overline{\perp}, \overline{\top}, \sim)$ es un álgebra de Boole.

Lema

$(\overline{PROP}, \sqcup, \sqcap, \overline{\perp}, \overline{\top}, \sim)$ *no tiene átomos.*

La estructura de \overline{PROP}

$(\overline{PROP}, \sqcup, \sqcap, \overline{\perp}, \overline{\top}, \sim)$ es un álgebra de Boole.

Lema

$(\overline{PROP}, \sqcup, \sqcap, \overline{\perp}, \overline{\top}, \sim)$ *no tiene átomos.*

Corolario (No representación)

\overline{PROP} *no es isomorfo a $\mathcal{P}(X)$ para ningún X .*

Fin de la Segunda Parte

