Introducción a la Lógica y la Computación

Mariana Badano   Héctor Gramaglia
Pedro Sánchez Terraf   Mauricio Tellechea
Guido Ivetta

FaMAF, 6 de octubre de 2021

Contenidos estimados para hoy

1. Conexiones entre lógica y álgebras de Boole
   - Relación de deducción entre proposiciones
   - Cocientes
   - Orden en $\overline{PROP}$
   - Ínfimos y supremos en $\overline{PROP}$
   - Estructura del álgebra de Boole $\overline{PROP}$

¿Qué tienen que ver. . . ?

Tratemos de encontrar conexión entre esta parte y la anterior

¿Qué tienen que ver…?

Tratemos de encontrar conexión entre esta parte y la anterior… Si no, ¿por qué usaríamos los mismos símbolos para ínfimo que conjunción, etcétera?

¿Qué tienen que ver…?

Tratemos de encontrar conexión entre esta parte y la anterior… Si no, ¿por qué usaríamos los mismos símbolos para ínfimo que conjunción, etcétera?
Definamos una relación en $PROP$: $\varphi \preccurlyeq \psi \ :\Longleftrightarrow \ \{\varphi\} \vdash \psi$.

¿Qué tienen que ver...?

Tratemos de encontrar conexión entre esta parte y la anterior... Si no, ¿por qué usaríamos los mismos símbolos para ínfimo que conjunción, etcétera?

Definamos una relación en $PROP$: $\varphi \preccurlyeq \psi \ :\Longleftrightarrow \ \{\varphi\} \vdash \psi$.

Propiedades de $\preccurlyeq$

1. $\{\varphi\} \vdash \varphi$.

$\varphi \in \mathcal{D}$

$\mathrm{Hip}(\varphi) = \{\varphi\}$

$\mathrm{Concl}(\varphi) = \varphi$

¿Qué tienen que ver. . . ?

Tratemos de encontrar conexión entre esta parte y la anterior. . . Si no, ¿por qué usaríamos los mismos símbolos para ínfimo que conjunción, etcétera?

Definamos una relación en $PROP$: $\varphi \preccurlyeq \psi \;:\Longleftrightarrow\; \{\varphi\} \vdash \psi$.

Propiedades de $\preccurlyeq$

1. $\{\varphi\} \vdash \varphi$.
2. Si $\{\varphi\} \vdash \psi$ y $\{\psi\} \vdash \chi$ entonces $\{\varphi\} \vdash \chi$.

- Si $\{\varphi\} \vdash \psi$ y $\{\psi\} \vdash \chi$ entonces $\{\varphi\} \vdash \chi$.

$$\begin{array}{c}\varphi \\ \vdots\, D_1 \\ \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\psi \\ \vdots\, D_2 \\ \chi\end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{c}\varphi \\ \vdots\, D \\ \chi\end{array}$$

Quiero

$$\boxed{\begin{array}{l} Hip(D) \subseteq \{\varphi\} \\ Cond(D) = \chi \end{array}}$$

$Hip(D_1) \subseteq \{\varphi\}$ $\quad Hip(D_2) \subseteq \{\psi\}$

$Cond(D_1) = \psi$ $\quad Cond(D_2) = \chi$

Solución "a lo bestia"

$$D\left\{\begin{array}{ccc} \varphi & \varphi & \varphi \\ \vdots\, D_1 & \vdots\, D_1 & \vdots\, D_1 \\ \psi & \psi & \psi \\ & \vdots\, D_2 & \\ & \chi & \end{array}\right.$$

Solución Elegante

$$D\left\{\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \vdots\, D_1 & D'\left\{\begin{array}{c} \vdots\, D_2 \\ \dfrac{\chi}{\psi \to \chi} \to I \end{array}\right. \\ \psi & \end{array} \\ \hline \chi \end{array}\right. \to E$$

$Hip(D') = Hip(D_2) \setminus \{\psi\} = \emptyset$

¿Qué tienen que ver. . . ?

Tratemos de encontrar conexión entre esta parte y la anterior. . . Si no, ¿por qué usaríamos los mismos símbolos para ínfimo que conjunción, etcétera?

Definamos una relación en $PROP$: $\varphi \preccurlyeq \psi \;:\Longleftrightarrow\; \{\varphi\} \vdash \psi$.

Propiedades de $\preccurlyeq$

1. $\{\varphi\} \vdash \varphi$.
2. Si $\{\varphi\} \vdash \psi$ y $\{\psi\} \vdash \chi$ entonces $\{\varphi\} \vdash \chi$.
3. Si $\{\varphi\} \vdash \psi$ y $\{\psi\} \vdash \varphi$ entonces $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$.

¿Qué tienen que ver…?

Tratemos de encontrar conexión entre esta parte y la anterior… Si no, ¿por qué usaríamos los mismos símbolos para ínfimo que conjunción, etcétera?

Definamos una relación en $PROP$: $\varphi \preccurlyeq \psi \;:\Longleftrightarrow\; \{\varphi\} \vdash \psi$.

Propiedades de $\preccurlyeq$

1. $\varphi \preccurlyeq \varphi$.
2. Si $\{\varphi\} \vdash \psi$ y $\{\psi\} \vdash \chi$ entonces $\{\varphi\} \vdash \chi$.
3. Si $\{\varphi\} \vdash \psi$ y $\{\psi\} \vdash \varphi$ entonces $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$.

¿Qué tienen que ver. . . ?

Tratemos de encontrar conexión entre esta parte y la anterior. . . Si no, ¿por qué usaríamos los mismos símbolos para ínfimo que conjunción, etcétera?
Definamos una relación en $PROP$: $\varphi \preccurlyeq \psi \ :\Longleftrightarrow \ \{\varphi\} \vdash \psi$.

Propiedades de $\preccurlyeq$

1. $\varphi \preccurlyeq \varphi$.
2. Si $\varphi \preccurlyeq \psi$ y $\psi \preccurlyeq \chi$ entonces $\varphi \preccurlyeq \chi$.
3. Si $\{\varphi\} \vdash \psi$ y $\{\psi\} \vdash \varphi$ entonces $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$.

¿Qué tienen que ver. . . ?

Tratemos de encontrar conexión entre esta parte y la anterior. . . Si no, ¿por qué usaríamos los mismos símbolos para ínfimo que conjunción, etcétera?

Definamos una relación en $PROP$: $\varphi \preccurlyeq \psi \;:\Longleftrightarrow\; \{\varphi\} \vdash \psi$.

Propiedades de $\preccurlyeq$

1. $\varphi \preccurlyeq \varphi$.
2. Si $\varphi \preccurlyeq \psi$ y $\psi \preccurlyeq \chi$ entonces $\varphi \preccurlyeq \chi$.
3. Si $\varphi \preccurlyeq \psi$ y $\psi \preccurlyeq \varphi$ entonces $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$.

¿Qué tienen que ver. . . ?

Tratemos de encontrar conexión entre esta parte y la anterior. . . Si no, ¿por qué usaríamos los mismos símbolos para ínfimo que conjunción, etcétera? Definamos una relación en $PROP$: $\varphi \preccurlyeq \psi \;:\Longleftrightarrow\; \{\varphi\} \vdash \psi$.

Propiedades de $\preccurlyeq$

1. $\varphi \preccurlyeq \varphi$.
2. Si $\varphi \preccurlyeq \psi$ y $\psi \preccurlyeq \chi$ entonces $\varphi \preccurlyeq \chi$.
3. Si $\varphi \preccurlyeq \psi$ y $\psi \preccurlyeq \varphi$ entonces $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$.

Encuesta!!!

¿Es $\preccurlyeq$ una relación de orden?

¿Qué tienen que ver. . . ?

Tratemos de encontrar conexión entre esta parte y la anterior. . . Si no, ¿por qué usaríamos los mismos símbolos para ínfimo que conjunción, etcétera?
Definamos una relación en $PROP$: $\varphi \preccurlyeq \psi \ :\Longleftrightarrow\ \{\varphi\} \vdash \psi$.

Propiedades de $\preccurlyeq$

1. $\varphi \preccurlyeq \varphi$.
2. Si $\varphi \preccurlyeq \psi$ y $\psi \preccurlyeq \chi$ entonces $\varphi \preccurlyeq \chi$.
3. Si $\varphi \preccurlyeq \psi$ y $\psi \preccurlyeq \varphi$ entonces $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$.

Encuesta!!!

¿Es $\preccurlyeq$ una relación de orden? $\longrightarrow$ Actividad en Aula virtual!

No

reflex. y trans.

No. Es un **preorden.**

Ejercicio: Si R es un preorden, entonces

$x \sim y$ sii xRy & yRx es de equivalencia

Ejemplo: Último ejercicio del 1er práctico:

aRb = "a no es más viejo que b" $\Leftrightarrow e(a) \boxed{\leq} e(b)$.

$a \sim b$ = "son el mismo modelo" $\Leftrightarrow e(a) = e(b)$.

¿Qué tienen que ver. . . ?

Tratemos de encontrar conexión entre esta parte y la anterior. . . Si no, ¿por qué usaríamos los mismos símbolos para ínfimo que conjunción, etcétera?
Definamos una relación en $PROP$: $\varphi \preccurlyeq \psi \;:\Longleftrightarrow\; \{\varphi\} \vdash \psi$.

Propiedades de $\preccurlyeq$

1. $\varphi \preccurlyeq \varphi$.
2. Si $\varphi \preccurlyeq \psi$ y $\psi \preccurlyeq \chi$ entonces $\varphi \preccurlyeq \chi$.
3. Si $\varphi \preccurlyeq \psi$ y $\psi \preccurlyeq \varphi$ entonces $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$.

$p_0 \preccurlyeq (p_0 \wedge p_0)$
$(p_0 \wedge p_0) \preccurlyeq p_0$

$\vdash p_0 \leftrightarrow (p_0 \wedge p_0)$

Encuesta!!!

¿Es $\preccurlyeq$ una relación de orden? $\longrightarrow$ Actividad en Aula virtual!

¿Qué tienen que ver...?

Tratemos de encontrar conexión entre esta parte y la anterior... Si no, ¿por qué usaríamos los mismos símbolos para ínfimo que conjunción, etcétera?
Definamos una relación en $PROP$: $\varphi \preccurlyeq \psi \; :\Longleftrightarrow \; \{\varphi\} \vdash \psi$.

Propiedades de $\preccurlyeq$

1. $\varphi \preccurlyeq \varphi$.
2. Si $\varphi \preccurlyeq \psi$ y $\psi \preccurlyeq \chi$ entonces $\varphi \preccurlyeq \chi$.
3. Si $\varphi \preccurlyeq \psi$ y $\psi \preccurlyeq \varphi$ entonces $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$, pero puede ser $\varphi \neq \psi$.

$\dfrac{p_0 \wedge p_0}{p_0}\wedge E$

$p_0 \preccurlyeq (p_0 \wedge p_0)$ $\longrightarrow$ $\dfrac{p_0 \quad p_0}{p_0 \wedge p_0}\wedge I$

$(p_0 \wedge p_0) \preccurlyeq p_0$

$p_0 \neq (p_0 \wedge p_0)$

Encuesta!!!

¿Es $\preccurlyeq$ una relación de orden? $\longrightarrow$ Actividad en Aula virtual!

Cocientes

- $\varphi \preccurlyeq \psi \iff \{\varphi\} \vdash \psi$.
- $\varphi \preccurlyeq \psi \ \& \ \psi \preccurlyeq \varphi \iff \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$.

Cocientes

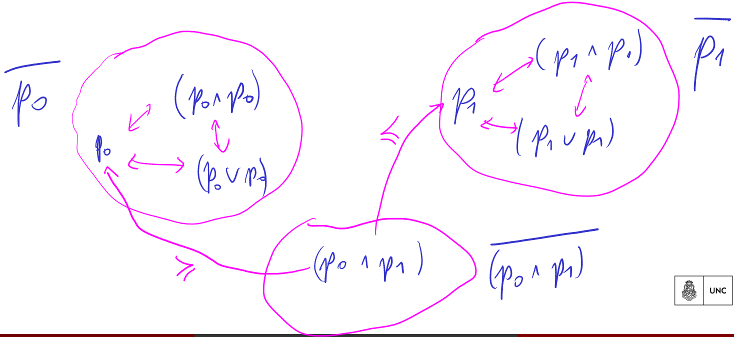
- $\varphi \preccurlyeq \psi \iff \{\varphi\} \vdash \psi$.
- $\varphi \preccurlyeq \psi \ \& \ \psi \preccurlyeq \varphi \iff \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$.

Es relación de equivalencia.

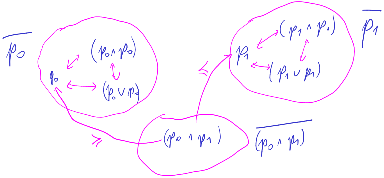
- $\varphi \preccurlyeq \psi \iff \{\varphi\} \vdash \psi$.
- $\varphi \preccurlyeq \psi \ \& \ \psi \preccurlyeq \varphi \iff \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$. → En los libros: "$\varphi \dashv\vdash \psi$"

Es relación de equivalencia.

Solución: considerar las cosas equivalentes como iguales.



Cocientes



- $\varphi \preccurlyeq \psi \iff \{\varphi\} \vdash \psi$.
- $\varphi \preccurlyeq \psi \ \& \ \psi \preccurlyeq \varphi \iff \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$.

Es relación de equivalencia.

Solución: considerar las cosas equivalentes como iguales.

Definición

- $\overline{\varphi} := [\varphi]_{\leftrightarrow} =$ clase de equiv. de φ

Cocientes

- $\varphi \preccurlyeq \psi \iff \{\varphi\} \vdash \psi$.
- $\varphi \preccurlyeq \psi \ \& \ \psi \preccurlyeq \varphi \iff \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$.

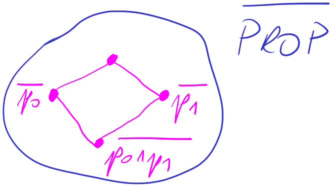
Es relación de equivalencia.

Solución: considerar las cosas equivalentes como iguales.

Definición

- $\overline{\varphi} := [\varphi]_{\leftrightarrow} =$ clase de equiv. de $\varphi = \{\psi \in PROP : \varphi \preccurlyeq \psi \ \& \ \psi \preccurlyeq \varphi\}$.

Cocientes



- $\varphi \preccurlyeq \psi \iff \{\varphi\} \vdash \psi$.
- $\varphi \preccurlyeq \psi \ \& \ \psi \preccurlyeq \varphi \iff \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$.

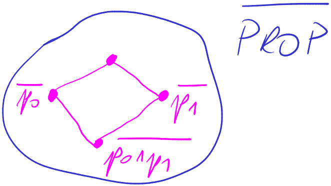
Es relación de equivalencia.

Solución: considerar las cosas equivalentes como iguales.

Definición

- $\overline{\varphi} := [\varphi]_{\leftrightarrow} =$ clase de equiv. de $\varphi = \{\psi \in PROP : \varphi \preccurlyeq \psi \ \& \ \psi \preccurlyeq \varphi\}$.
- $\overline{PROP} := PROP/\!\leftrightarrow\ = \{\overline{\varphi} : \varphi \in PROP\}$.

Cocientes



- $\varphi \preccurlyeq \psi \iff \{\varphi\} \vdash \psi$.
- $\varphi \preccurlyeq \psi \;\&\; \psi \preccurlyeq \varphi \iff \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$.

Es relación de equivalencia.

Solución: considerar las cosas equivalentes como iguales.

Definición

- $\overline{\varphi} := [\varphi]_{\leftrightarrow} =$ clase de equiv. de $\varphi = \{\psi \in PROP : \varphi \preccurlyeq \psi \;\&\; \psi \preccurlyeq \varphi\}$.
- $\overline{PROP} := PROP/\!\leftrightarrow\, = \{\overline{\varphi} : \varphi \in PROP\}$.

Orden en $\overline{PROP}$

$\overline{\varphi} \leq \overline{\psi} \iff \varphi \preccurlyeq \psi$.

$\overline{p_0} = \overline{(p_0 \wedge p_0)}$

$\overline{p_0 \wedge p_1} \leq \overline{p_0}$? Fijate si $p_0 \wedge p_1 \preccurlyeq p_0$

$\overline{p_0 \wedge p_1} \leq \overline{(p_0 \wedge p_0)}$? Fijate si $p_0 \wedge p_1 \preccurlyeq (p_0 \wedge p_0)$

Orden en $\overline{PROP}$

- $\overline{\varphi} \leq \overline{\psi} \iff \varphi \preccurlyeq \psi \iff \{\varphi\} \vdash \psi$.

Orden en $\overline{PROP}$

- $\overline{\varphi} \leq \overline{\psi} \iff \varphi \preccurlyeq \psi \iff \{\varphi\} \vdash \psi$.

Proposición ($\leq$ no es total en $\overline{PROP}$)

$n \neq m \implies \overline{p_n} \nleq \overline{p_m}$ *para todos* $n, m \in \mathbb{N}_0$.

$\{p_n\} \nvdash p_m$

$0 \neq 1 \Rightarrow \overline{p_0} \nleq \overline{p_1}$

$1 \neq 0 \Rightarrow \overline{p_1} \nleq \overline{p_0}$

Orden en $\overline{PROP}$

- $\overline{\varphi} \leq \overline{\psi} \iff \varphi \preccurlyeq \psi \iff \{\varphi\} \vdash \psi$.

Proposición ($\leq$ no es total en $\overline{PROP}$)

$n \neq m \implies \overline{p_n} \nleq \overline{p_m}$ *para todos* $n, m \in \mathbb{N}_0$.

Necesitamos una manera de justificar que $\{p_n\} \nvdash p_m$.

Orden en $\overline{PROP}$

- $\overline{\varphi} \leq \overline{\psi} \iff \varphi \preccurlyeq \psi \iff \{\varphi\} \vdash \psi$.

Proposición ($\leq$ no es total en $\overline{PROP}$)

$n \neq m \implies \overline{p_n} \nleq \overline{p_m}$ *para todos* $n, m \in \mathbb{N}_0$.

Necesitamos una manera de justificar que $\{p_n\} \nvdash p_m$. Recordemos:

Teorema (de Corrección)

Para todo $\Gamma \subseteq PROP$ *y* $\varphi \in PROP$, *si* $\Gamma \vdash \varphi$ *entonces* $\Gamma \models \varphi$.

Orden en $\overline{PROP}$

- $\overline{\varphi} \leq \overline{\psi} \iff \varphi \preccurlyeq \psi \iff \{\varphi\} \vdash \psi$.

Proposición ($\leq$ no es total en $\overline{PROP}$)

$n \neq m \implies \overline{p_n} \not\leq \overline{p_m}$ *para todos* $n, m \in \mathbb{N}_0$.

Necesitamos una manera de justificar que $\{p_n\} \nvdash p_m$. Recordemos:

Teorema (de Corrección)

Para todo $\Gamma \subseteq PROP$ *y* $\varphi \in PROP$*, si* $\Gamma \vdash \varphi$ *entonces* $\Gamma \models \varphi$*.*

$\Gamma \not\models \varphi \implies \Gamma \nvdash \varphi$

Es decir, si $\Gamma \vdash \varphi$ y $[\![\Gamma]\!]_v = 1$ entonces $[\![\varphi]\!]_v = 1$.

$v : V \longrightarrow \{0,1\}$ $\rightsquigarrow$ $[\![\cdot]\!]_v : PROP \longrightarrow \{0,1\}$.

$V = \{p_0, p_1, p_2, \ldots\}$

"asignación" "valuación"

Orden en $\overline{PROP}$

v tq $[\![p_n]\!]_v = 1$

$[\![p_m]\!]_v = 0$

- $\overline{\varphi} \leq \overline{\psi} \iff \varphi \preccurlyeq \psi \iff \{\varphi\} \vdash \psi$.

Proposición ($\leq$ no es total en $\overline{PROP}$)

$n \neq m \implies \overline{p_n} \not\leq \overline{p_m}$ *para todos* $n, m \in \mathbb{N}_0$.

Necesitamos una manera de justificar que $\{p_n\} \nvdash p_m$. Recordemos:

Teorema (de Corrección)

Para todo $\Gamma \subseteq PROP$ *y* $\varphi \in PROP$*, si* $\Gamma \vdash \varphi$ *entonces* $\Gamma \models \varphi$*.*

Es decir, si $\Gamma \vdash \varphi$ y $[\![\Gamma]\!]_v = 1$ entonces $[\![\varphi]\!]_v = 1$.
Por la contrarrecíproca tenemos:

No derivación

Para ver que $\Gamma \nvdash \varphi$, basta encontrar v tal que $[\![\Gamma]\!]_v = 1$ y $[\![\varphi]\!]_v = 0$.

- Para ver que $\Gamma \nvdash \varphi$, basta encontrar v tal que $[\![\Gamma]\!]_v = 1$ y $[\![\varphi]\!]_v = 0$.

$n \neq m \implies \overline{p_n} \nleq \overline{p_m}$ para todos $n, m \in \mathbb{N}_0$.

$\overline{p_n} \nleq \overline{p_m} \iff p_n \nleq p_m \iff \{p_n\} \nvdash p_m$.

Basta v tq $[\![p_n]\!]_v = 1$ y $[\![p_m]\!]_v = 0$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \| \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \|$

$\qquad\qquad\qquad\quad v(p_n) \qquad\qquad\qquad\qquad v(p_m)$.

Defino $v : V \longrightarrow \{0, 1\}$

$v(p_k) = 1$ sii $k = n$. ✓

Ínfimos y supremos en $\overline{PROP}$

- $\overline{\varphi} \leq \overline{\psi} \iff \varphi \preccurlyeq \psi \iff \{\varphi\} \vdash \psi$.

Ínfimos y supremos en $\overline{PROP}$

- $\overline{\varphi} \leq \overline{\psi} \iff \varphi \preceq \psi \iff \{\varphi\} \vdash \psi$.

Ejercicios

1. $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi$.
2. $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \psi$.
3. Si $\{\chi\} \vdash \varphi$ y $\{\chi\} \vdash \psi$ entonces $\{\chi\} \vdash \varphi \wedge \psi$.

Ínfimos y supremos en $\overline{PROP}$

- $\overline{\varphi} \leq \overline{\psi} \iff \varphi \preccurlyeq \psi \iff \{\varphi\} \vdash \psi$.

Ejercicios

1. $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi$. $\quad \overline{\varphi \wedge \psi} \leq \overline{\varphi}$.
2. $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \psi$.
3. Si $\{\chi\} \vdash \varphi$ y $\{\chi\} \vdash \psi$ entonces $\{\chi\} \vdash \varphi \wedge \psi$.

Ínfimos y supremos en $\overline{PROP}$

- $\overline{\varphi} \leq \overline{\psi} \iff \varphi \preccurlyeq \psi \iff \{\varphi\} \vdash \psi$.

Ejercicios

1. $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi$. $\overline{\varphi \wedge \psi} \leq \overline{\varphi}$.
2. $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \psi$. $\overline{\varphi \wedge \psi} \leq \overline{\psi}$.
3. Si $\{\chi\} \vdash \varphi$ y $\{\chi\} \vdash \psi$ entonces $\{\chi\} \vdash \varphi \wedge \psi$.

Ínfimos y supremos en $\overline{PROP}$

- $\overline{\varphi} \leq \overline{\psi} \iff \varphi \preccurlyeq \psi \iff \{\varphi\} \vdash \psi$.

Ejercicios

1. $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi$. $\quad \overline{\varphi \wedge \psi} \leq \overline{\varphi}$.
2. $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \psi$. $\quad \overline{\varphi \wedge \psi} \leq \overline{\psi}$.
3. Si $\{\chi\} \vdash \varphi$ y $\{\chi\} \vdash \psi$ entonces $\{\chi\} \vdash \varphi \wedge \psi$.
   Si $\overline{\chi} \leq \overline{\varphi}$ y $\overline{\chi} \leq \overline{\psi}$ entonces $\overline{\chi} \leq \overline{\varphi \wedge \psi}$.

Ínfimos y supremos en $\overline{PROP}$

- $\overline{\varphi} \leq \overline{\psi} \iff \varphi \preccurlyeq \psi \iff \{\varphi\} \vdash \psi$.

Ejercicios

1. $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi$. $\overline{\varphi \wedge \psi} \leq \overline{\varphi}$.
2. $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \psi$. $\overline{\varphi \wedge \psi} \leq \overline{\psi}$.
3. Si $\{\chi\} \vdash \varphi$ y $\{\chi\} \vdash \psi$ entonces $\{\chi\} \vdash \varphi \wedge \psi$.
   Si $\overline{\chi} \leq \overline{\varphi}$ y $\overline{\chi} \leq \overline{\psi}$ entonces $\overline{\chi} \leq \overline{\varphi \wedge \psi}$.

Hay ínfimo

$\overline{\varphi} \sqcap \overline{\psi} := \overline{\varphi \wedge \psi}$ es el ínfimo de $\{\overline{\varphi}, \overline{\psi}\}$ en $(\overline{PROP}, \leq)$.

$\overline{PROP}$ es un reticulado distributivo

De igual modo,

$$\overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi} := \overline{\varphi \vee \psi} = \sup\{\overline{\varphi}, \overline{\psi}\}.$$

$$\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\,\vee I$$

$$\overline{\varphi} \leq \overline{\varphi \vee \psi} \quad ? \rightsquigarrow \quad \varphi \leq \varphi \vee \psi \rightsquigarrow \{\varphi\} \vdash \varphi \vee \psi$$

$\overline{PROP}$ es un reticulado distributivo

$\top = (\bot \to \bot)$

De igual modo,

$$\overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi} := \overline{\varphi \vee \psi} = \sup\{\overline{\varphi}, \overline{\psi}\}.$$

$\overline{\bot}$ es el primer elemento y $\overline{\top} = \overline{\neg\bot}$ el último:

$$\{\bot\} \vdash \varphi \qquad \{\varphi\} \vdash \top.$$

$\overline{PROP}$ es un reticulado distributivo

De igual modo,

$$\overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi} := \overline{\varphi \vee \psi} = \sup\{\overline{\varphi}, \overline{\psi}\}.$$

$\overline{\bot}$ es el primer elemento y $\overline{\top} = \overline{\neg\bot}$ el último:

$$\{\bot\} \vdash \varphi \qquad \{\varphi\} \vdash \top.$$

Además, $\sim \overline{\varphi} := \overline{\neg\varphi}$ resulta ser un complemento de $\overline{\varphi}$.

$\overline{PROP}$ es un reticulado distributivo

De igual modo,

$$\overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi} := \overline{\varphi \vee \psi} = \sup\{\overline{\varphi}, \overline{\psi}\}.$$

$\overline{\bot}$ es el primer elemento y $\overline{\top} = \overline{\neg\bot}$ el último:

$$\{\bot\} \vdash \varphi \qquad \{\varphi\} \vdash \top.$$

Además, $\sim \overline{\varphi} := \overline{\neg\varphi}$ resulta ser un complemento de $\overline{\varphi}$.

Ejercicio

$\{(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta)\} \vdash \varphi \vee (\psi \wedge \theta)$.

$\overline{PROP}$ es un reticulado distributivo

De igual modo,

$$\overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi} := \overline{\varphi \vee \psi} = \sup\{\overline{\varphi}, \overline{\psi}\}.$$

$\overline{\bot}$ es el primer elemento y $\overline{\top} = \overline{\neg\bot}$ el último:

$$\{\bot\} \vdash \varphi \qquad \{\varphi\} \vdash \top.$$

Además, $\sim \overline{\varphi} := \overline{\neg\varphi}$ resulta ser un complemento de $\overline{\varphi}$.

Ejercicio

$\{(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta)\} \vdash \varphi \vee (\psi \wedge \theta)$. $\quad (\overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi}) \sqcap (\overline{\varphi} \sqcup \overline{\theta}) \leq \overline{\varphi} \sqcup (\overline{\psi} \sqcap \overline{\theta})$

$\geq$ siempre

$\leq$ Distributivo!!

$\overline{PROP}$ es un reticulado distributivo

De igual modo,

$$\overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi} := \overline{\varphi \vee \psi} = \sup\{\overline{\varphi}, \overline{\psi}\}.$$

$\overline{\bot}$ es el primer elemento y $\overline{\top} = \overline{\neg\bot}$ el último:

$$\{\bot\} \vdash \varphi \qquad \{\varphi\} \vdash \top.$$

Además, $\sim \overline{\varphi} := \overline{\neg\varphi}$ resulta ser un complemento de $\overline{\varphi}$.

Ejercicio

$\{(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta)\} \vdash \varphi \vee (\psi \wedge \theta)$. $\quad (\overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi}) \sqcap (\overline{\varphi} \sqcup \overline{\theta}) \leq \overline{\varphi} \sqcup (\overline{\psi} \sqcap \overline{\theta})$

Luego $(\overline{PROP}, \leq)$ es un reticulado distributivo.

$\overline{PROP}$ es un reticulado distributivo

De igual modo,

$$\overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi} := \overline{\varphi \vee \psi} = \sup\{\overline{\varphi}, \overline{\psi}\}.$$

$\overline{\bot}$ es el primer elemento y $\overline{\top} = \overline{\neg\bot}$ el último:

$$\{\bot\} \vdash \varphi \qquad \{\varphi\} \vdash \top.$$

Además, $\sim \overline{\varphi} := \overline{\neg\varphi}$ resulta ser un complemento de $\overline{\varphi}$.

Ejercicio

$\{(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta)\} \vdash \varphi \vee (\psi \wedge \theta)$. $\quad (\overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi}) \sqcap (\overline{\varphi} \sqcup \overline{\theta}) \leq \overline{\varphi} \sqcup (\overline{\psi} \sqcap \overline{\theta})$

Luego $(\overline{PROP}, \leq)$ es un reticulado distributivo.

. . . wait a minute.

$\overline{PROP}$ es un reticulado distributivo

De igual modo,

$$\overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi} := \overline{\varphi \vee \psi} = \sup\{\overline{\varphi}, \overline{\psi}\}.$$

$\overline{\bot}$ es el primer elemento y $\overline{\top} = \overline{\neg\bot}$ el último:

$$\{\bot\} \vdash \varphi \qquad \{\varphi\} \vdash \top.$$

Además, $\sim \overline{\varphi} := \overline{\neg\varphi}$ resulta ser un complemento de $\overline{\varphi}$.

Ejercicio

$\{(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta)\} \vdash \varphi \vee (\psi \wedge \theta)$. $\quad (\overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi}) \sqcap (\overline{\varphi} \sqcup \overline{\theta}) \leq \overline{\varphi} \sqcup (\overline{\psi} \sqcap \overline{\theta})$

Luego $(\overline{PROP}, \leq)$ es un reticulado distributivo.

...wait a minute.

¿Distributivo?

$\overline{PROP}$ es un reticulado distributivo... ¿¡Por qué!?

$\sqcap$ es el ínfimo

1. $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi$.
2. $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \psi$.
3. Si $\{\chi\} \vdash \varphi$ y $\{\chi\} \vdash \psi$ entonces $\{\chi\} \vdash \varphi \wedge \psi$.

$\sqcap$ es el ínfimo

1. $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi$. $\quad\quad \overline{\varphi} \sqcap \overline{\psi} \leq \overline{\varphi}$.
2. $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \psi$. $\quad\quad \overline{\varphi} \sqcap \overline{\psi} \leq \overline{\psi}$.
3. Si $\{\chi\} \vdash \varphi$ y $\{\chi\} \vdash \psi$ entonces $\{\chi\} \vdash \varphi \wedge \psi$.
   Si $\overline{\chi} \leq \overline{\varphi}$ y $\overline{\chi} \leq \overline{\psi}$ entonces $\overline{\chi} \leq \overline{\varphi} \sqcap \overline{\psi}$.

$$\dfrac{\begin{matrix} \vdots\ D_1 \\ \varphi \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \vdots\ D_2 \\ \psi \end{matrix}}{\varphi \wedge \psi} \wedge I$$

$\overline{PROP}$ es un reticulado distributivo... ¿¡Por qué!?

$\sqcap$ es el ínfimo

1. $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi.$ $(\wedge E)$ $\overline{\varphi} \sqcap \overline{\psi} \leq \overline{\varphi}.$
2. $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \psi.$ $\overline{\varphi} \sqcap \overline{\psi} \leq \overline{\psi}.$
3. Si $\{\chi\} \vdash \varphi$ y $\{\chi\} \vdash \psi$ entonces $\{\chi\} \vdash \varphi \wedge \psi.$
   Si $\overline{\chi} \leq \overline{\varphi}$ y $\overline{\chi} \leq \overline{\psi}$ entonces $\overline{\chi} \leq \overline{\varphi} \sqcap \overline{\psi}.$

$\overline{PROP}$ es un reticulado distributivo... ¿¡Por qué!?

$\sqcap$ es el ínfimo

1. $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi$. $\quad (\wedge E) \quad \overline{\varphi} \sqcap \overline{\psi} \leq \overline{\varphi}$.
2. $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \psi$. $\quad (\wedge E) \quad \overline{\varphi} \sqcap \overline{\psi} \leq \overline{\psi}$.
3. Si $\{\chi\} \vdash \varphi$ y $\{\chi\} \vdash \psi$ entonces $\{\chi\} \vdash \varphi \wedge \psi$.
   Si $\overline{\chi} \leq \overline{\varphi}$ y $\overline{\chi} \leq \overline{\psi}$ entonces $\overline{\chi} \leq \overline{\varphi} \sqcap \overline{\psi}$.

$\overline{PROP}$ es un reticulado distributivo. . . ¿¡Por qué!?

$\sqcap$ es el ínfimo

1. $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi$. $\quad (\wedge E) \quad \overline{\varphi} \sqcap \overline{\psi} \leq \overline{\varphi}$.
2. $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \psi$. $\quad (\wedge E) \quad \overline{\varphi} \sqcap \overline{\psi} \leq \overline{\psi}$.
3. Si $\{\chi\} \vdash \varphi$ y $\{\chi\} \vdash \psi$ entonces $\{\chi\} \vdash \varphi \wedge \psi$. $\quad (\wedge I)$
   Si $\overline{\chi} \leq \overline{\varphi}$ y $\overline{\chi} \leq \overline{\psi}$ entonces $\overline{\chi} \leq \overline{\varphi} \sqcap \overline{\psi}$.

$\overline{PROP}$ es un reticulado distributivo… ¿¡Por qué!?

$\sqcap$ es el ínfimo

1. $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi$. $\quad (\wedge E) \quad \overline{\varphi} \sqcap \overline{\psi} \leq \overline{\varphi}$.
2. $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \psi$. $\quad (\wedge E) \quad \overline{\varphi} \sqcap \overline{\psi} \leq \overline{\psi}$.
3. Si $\{\chi\} \vdash \varphi$ y $\{\chi\} \vdash \psi$ entonces $\{\chi\} \vdash \varphi \wedge \psi$. $\quad (\wedge I)$
   Si $\overline{\chi} \leq \overline{\varphi}$ y $\overline{\chi} \leq \overline{\psi}$ entonces $\overline{\chi} \leq \overline{\varphi} \sqcap \overline{\psi}$.

Pareciera que sólo estamos describiendo las reglas de $\wedge$.

$\overline{PROP}$ es un reticulado distributivo... ¿¡Por qué!?

$\sqcup$ es el supremo

1. $\{\varphi\} \vdash \varphi \vee \psi$. $\quad \overline{\varphi} \leq \overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi}$.
2. $\{\psi\} \vdash \varphi \vee \psi$. $\quad \overline{\psi} \leq \overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi}$.
3. Si $\{\varphi\} \vdash \chi$ y $\{\psi\} \vdash \chi$ entonces $\{\varphi \vee \psi\} \vdash \chi$.
   Si $\overline{\varphi} \leq \overline{\chi}$ y $\overline{\psi} \leq \overline{\chi}$ entonces $\overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi} \leq \overline{\chi}$.

Pareciera que sólo estamos describiendo las reglas de $\wedge$.

$\overline{PROP}$ es un reticulado distributivo… ¿¡Por qué!?

$\sqcup$ es el supremo

1. $\{\varphi\} \vdash \varphi \vee \psi.$ $\quad (\vee I) \quad \overline{\varphi} \leq \overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi}.$
2. $\{\psi\} \vdash \varphi \vee \psi.$ $\quad (\vee I) \quad \overline{\psi} \leq \overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi}.$
3. Si $\{\varphi\} \vdash \chi$ y $\{\psi\} \vdash \chi$ entonces $\{\varphi \vee \psi\} \vdash \chi.$ $\quad (\vee E)$
   Si $\overline{\varphi} \leq \overline{\chi}$ y $\overline{\psi} \leq \overline{\chi}$ entonces $\overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi} \leq \overline{\chi}.$

$$\dfrac{\varphi\vee\psi \qquad \begin{matrix}[\varphi]\\ \vdots\\ \chi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\psi]\\ \vdots\\ \chi\end{matrix}}{\chi}\ \vee E$$

Pareciera que sólo estamos describiendo las reglas de $\wedge$. Lo mismo con $\vee$.

$\overline{PROP}$ es un reticulado distributivo... ¿¡Por qué!?

$\sqcup$ es el supremo

1. $\{\varphi\} \vdash \varphi \vee \psi$. $(\vee I)$ $\overline{\varphi} \leq \overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi}$.
2. $\{\psi\} \vdash \varphi \vee \psi$. $(\vee I)$ $\overline{\psi} \leq \overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi}$.
3. Si $\{\varphi\} \vdash \chi$ y $\{\psi\} \vdash \chi$ entonces $\{\varphi \vee \psi\} \vdash \chi$. $(\vee E)$
   Si $\overline{\varphi} \leq \overline{\chi}$ y $\overline{\psi} \leq \overline{\chi}$ entonces $\overline{\varphi} \sqcup \overline{\psi} \leq \overline{\chi}$.

Pareciera que sólo estamos describiendo las reglas de $\wedge$. Lo mismo con $\vee$.
Entonces, ¿de dónde sale la distributividad?

Prueba de distributividad

$$
\dfrac{
\dfrac{(\varphi \lor \psi) \land (\varphi \lor \theta)}{\varphi \lor \psi}\,{\color{red}\land E}
\quad
\dfrac{[\varphi]_1}{\varphi \lor (\psi \land \theta)}\,{\color{red}\lor I}
\quad
\dfrac{
\dfrac{(\varphi \lor \psi) \land (\varphi \lor \theta)}{\varphi \lor \theta}\,{\color{red}\land E}
\quad
\dfrac{[\varphi]_2}{\varphi \lor (\psi \land \theta)}\,{\color{red}\lor I}
\quad
\dfrac{\dfrac{[\psi]_1 \, [\theta]_2}{\psi \land \theta}\,{\color{red}\land I}}{\varphi \lor (\psi \land \theta)}\,{\color{red}\lor I}
}{\varphi \lor (\psi \land \theta)}\,{\color{red}\lor E_2}
}{\varphi \lor (\psi \land \theta)}\,{\color{red}\lor E_1}
$$

Prueba de distributividad

$$
\dfrac{
\dfrac{(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta)}{\varphi \vee \psi}\wedge E
\qquad
\dfrac{[\varphi]_1}{\varphi \vee (\psi \wedge \theta)}\vee I
\qquad
\dfrac{
\dfrac{(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta)}{\varphi \vee \theta}\wedge E
\quad
\dfrac{[\varphi]_2}{\varphi \vee (\psi \wedge \theta)}\vee I
\quad
\dfrac{\dfrac{[\psi]_1 [\theta]_2}{\psi \wedge \theta}\wedge I}{\varphi \vee (\psi \wedge \theta)}\vee I
}{\varphi \vee (\psi \wedge \theta)}\vee E_2
}{\varphi \vee (\psi \wedge \theta)}\vee E_1
$$

Misterio a resolver por Ustedes!

La estructura de $\overline{PROP}$

$(\overline{PROP}, \sqcup, \sqcap, \overline{\bot}, \overline{\top}, \sim)$ es un álgebra de Boole.

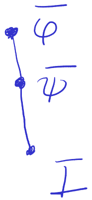
Álgebra de Lindenbaum de la lógica proposicional.

La estructura de $\overline{PROP}$

$(\overline{PROP}, \sqcup, \sqcap, \overline{\bot}, \overline{\top}, \sim)$ es un álgebra de Boole.

Lema

$(\overline{PROP}, \sqcup, \sqcap, \overline{\bot}, \overline{\top}, \sim)$ *no tiene átomos.*



La estructura de $\overline{PROP}$

$(\overline{PROP}, \sqcup, \sqcap, \overline{\bot}, \overline{\top}, \sim)$ es un álgebra de Boole.

Lema

$(\overline{PROP}, \sqcup, \sqcap, \overline{\bot}, \overline{\top}, \sim)$ *no tiene átomos.*

Recordemos:

Lema (de Coincidencia)

Si $v(p_i) = v'(p_i)$ *para todos los* p_i *que ocurran en* φ*, entonces* $[\![\varphi]\!]_v = [\![\varphi]\!]_{v'}$*.*

La estructura de $\overline{PROP}$

$(\overline{PROP}, \sqcup, \sqcap, \overline{\bot}, \overline{\top}, \sim)$ es un álgebra de Boole.

Lema

$(\overline{PROP}, \sqcup, \sqcap, \overline{\bot}, \overline{\top}, \sim)$ *no tiene átomos.*

Recordemos:

Lema (de Coincidencia)

Si $v(p_i) = v'(p_i)$ *para todos los* p_i *que ocurran en* φ*, entonces* $[\![\varphi]\!]_v = [\![\varphi]\!]_{v'}$.

Prueba de la Proposición.

Estrategia: Sea $\varphi \in PROP$ tal que $\overline{\bot} < \overline{\varphi}$.
Veremos que si p_n no ocurre en φ, entonces $\psi := (\varphi \wedge p_n) \in PROP$ cumple que

$$\overline{\bot} < \overline{\psi} < \overline{\varphi}.$$

- Si $v(p_i) = v'(p_i)$ para todos los p_i que ocurran en φ, entonces $[\![\varphi]\!]_v = [\![\varphi]\!]_{v'}$.
- p_n no ocurre en φ.

$$\overline{\bot} < \overline{(\varphi \wedge p_n)} < \overline{\varphi}$$

$\overline{\bot} \leq \overline{\varphi \wedge p_n}$ por ser 1er elemento.

$\overline{\varphi \wedge p_n} \leq \overline{\varphi}$ por ser $\overline{\varphi \wedge p_n}$ cota inf de $\overline{\varphi}$

Veo $\overline{\varphi \wedge p_n} \not\leq \overline{\bot}$ y $\overline{\varphi} \not\leq \overline{\varphi \wedge p_n}$.

completitud.

sabemos $\overline{\varphi} \not\leq \overline{\bot} \rightsquigarrow \{\varphi\} \nvdash \bot \rightsquigarrow \underline{\{\varphi\} \not\models \bot} \Rightarrow$

$\exists\, v$ asignación tq $[\![\varphi]\!]_v = 1$. Defino $u, w : V \to \{0, 1\}$

$$u(p_m) = \begin{cases} 0 & \text{si } m = n \\ v(p_m) & \text{caso contrario} \end{cases} \qquad w(p_m) = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ v(p_m) & \text{c. contrario} \end{cases}$$

- Si $v(p_i) = v'(p_i)$ para todos los p_i que ocurran en φ, entonces $[\![\varphi]\!]_v = [\![\varphi]\!]_{v'}$.
- p_n no ocurre en φ.

$$\overline{\bot} < \overline{(\varphi \wedge p_n)} < \overline{\varphi}$$

Veo $\overline{\varphi \wedge p_n} \nleq \overline{\bot}$ y $\overline{\varphi} \nleq \overline{\varphi \wedge p_n}$.

$\exists v$ asignación tq $[\![\varphi]\!]_v = 1$. Defino $u, w : V \to \{0, 1\}$

$$u(p_m) = \begin{cases} 0 & \text{si } m = n \\ v(p_m) & \text{caso contrario} \end{cases} \qquad w(p_m) = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ v(p_m) & \text{c. contrario} \end{cases}$$

$\overline{\varphi \wedge p_n} \nleq \overline{\bot} \Leftarrow \underline{[\![\varphi \wedge p_n]\!]_w = 1}$ y $[\![\bot]\!]_w = 0$ ✓

$[\![\varphi \wedge p_n]\!]_w = \min\{[\![\varphi]\!]_w, [\![p_n]\!]_w\} = \min\{\underset{\underset{[\![\varphi]\!]_v}{\|}}{[\![\varphi]\!]_w}, \underset{1}{w(p_n)}\} = \underline{[\![\varphi]\!]_v}$

1

$\overline{\varphi} \nleq \overline{\varphi \wedge p_n} \Leftarrow \underset{\underset{[\![\varphi]\!]_v}{\|}}{[\![\varphi]\!]_u} = 1$ ✓ y $[\![\varphi \wedge p_n]\!]_u = 0$

$\min\{[\![\varphi]\!]_u, u(p_n)\} = 0$

La estructura de $\overline{PROP}$

$(\overline{PROP}, \sqcup, \sqcap, \overline{\bot}, \overline{\top}, \sim)$ es un álgebra de Boole.

Lema

$(\overline{PROP}, \sqcup, \sqcap, \overline{\bot}, \overline{\top}, \sim)$ *no tiene átomos.*

La estructura de $\overline{PROP}$

$(\overline{PROP}, \sqcup, \sqcap, \overline{\bot}, \overline{\top}, \sim)$ es un álgebra de Boole.

Lema

$(\overline{PROP}, \sqcup, \sqcap, \overline{\bot}, \overline{\top}, \sim)$ no tiene átomos.

Corolario (No representación)

$\overline{PROP}$ no es isomorfo a $\mathscr{P}(X)$ para ningún X.

Fin de la Segunda Parte