Introducción a la Lógica y la Computación

Mariana Badano   Héctor Gramaglia
Pedro Sánchez Terraf   Mauricio Tellechea
Guido Ivetta

FaMAF, 8 de septiembre de 2021

Contenidos estimados para hoy

1. Repaso
   - Otra vuelta a los teoremas de representación
   - Teorema de representación de álgebras de Boole finitas
2. Teorema de representación de reticulados distributivos finitos
   - Elementos $\vee$-irreducibles
   - Conjuntos decrecientes de un poset
   - Teorema de Birkhoff
   - Caracterizaciones de distributividad
3. EXTRA: Construcciones con Estructuras
   - Productos directos de posets
   - Productos directos de retículos
   - Suma directa de posets
   - Caracterización de D_n

Otra vuelta a los teoremas de representación

Sea $(P, \leq)$ un poset, y sea $F : P \to \mathscr{P}(P)$ definida por

$$F(d) := d{\downarrow} = \{x \in P : x \leq d\}$$

Otra vuelta a los teoremas de representación

Sea $(P, \leq)$ un poset, y sea $F : P \to \mathscr{P}(P)$ definida por

$$F(d) := d\!\downarrow = \{x \in P : x \leq d\}$$

Tenemos:

- F preserva orden **en ambas direcciones**: para todos $d, c \in P$, $d \leq c \iff d\!\downarrow \subseteq c\!\downarrow$

Otra vuelta a los teoremas de representación

Sea $(P, \leq)$ un poset, y sea $F : P \to \mathscr{P}(P)$ definida por

$$F(d) := d{\downarrow} = \{x \in P : x \leq d\}$$

Tenemos:

- F preserva orden **en ambas direcciones**: para todos $d, c \in P$, $d \leq c \iff d{\downarrow} \subseteq c{\downarrow}$; esto implica que
- F es inyectiva

Otra vuelta a los teoremas de representación

$g \circ f = id$

$\Downarrow$

f 1-1

Sea $(P, \leq)$ un poset, y sea $F : P \to \mathscr{P}(P)$ definida por

$$F(d) := d{\downarrow} = \{x \in P : x \leq d\}$$

Tenemos:

- F preserva orden **en ambas direcciones**: para todos $d, c \in P$, $d \leq c \iff d{\downarrow} \subseteq c{\downarrow}$; esto implica que
- F es inyectiva (o bien, porque $\sup(F(d)) = d$ para todo $d \in P$).

Otra vuelta a los teoremas de representación

Sea $(P, \leq)$ un poset, y sea $F : P \to \mathscr{P}(P)$ definida por

$$F(d) := d{\downarrow} = \{x \in P : x \leq d\}$$

Tenemos:

- F preserva orden **en ambas direcciones**: para todos $d, c \in P$, $d \leq c \iff d{\downarrow} \subseteq c{\downarrow}$; esto implica que
- F es inyectiva (o bien, porque $\sup(F(d)) = d$ para todo $d \in P$).

Luego, $F : P \to \mathscr{P}(P)$ es un isomorfismo entre $(P, \leq)$ y el subposet $(F(P), \subseteq)$ de $(\mathscr{P}(P), \subseteq)$.

$F(P) := \{F(d) : d \in P\}$

"imagen de F"

$\cong$

$\langle P, \leq \rangle$

Otra vuelta a los teoremas de representación

Sea $(P, \leq)$ un poset, y sea $F : P \to \mathscr{P}(P)$ definida por

$$F(d) := d{\downarrow} = \{x \in P : x \leq d\}$$

Tenemos:

- F preserva orden **en ambas direcciones**: para todos $d, c \in P$, $d \leq c \iff d{\downarrow} \subseteq c{\downarrow}$; esto implica que
- F es inyectiva (o bien, porque $\sup(F(d)) = d$ para todo $d \in P$).

Luego, $F : P \to \mathscr{P}(P)$ es un isomorfismo entre $(P, \leq)$ y el subposet $(F(P), \subseteq)$ de $(\mathscr{P}(P), \subseteq)$.

Generalicemos **dónde** estamos representando.

Otra vuelta a los teoremas de representación

Sea $(P, \leq)$ un poset, y sea $F : P \to \mathscr{P}(P)$ definida por

$$F(d) := d{\downarrow} = \{x \in P : x \leq d\}$$

Tenemos:

- F preserva orden **en ambas direcciones**: para todos $d, c \in P$, $d \leq c \iff d{\downarrow} \subseteq c{\downarrow}$; esto implica que
- F es inyectiva (o bien, porque $\sup(F(d)) = d$ para todo $d \in P$).

Luego, $F : P \to \mathscr{P}(P)$ es un isomorfismo entre $(P, \leq)$ y el subposet $(F(P), \subseteq)$ de $(\mathscr{P}(P), \subseteq)$.

Generalicemos **dónde** estamos representando.

Otra vuelta a los teoremas de representación

Sea $(P, \leq)$ un poset, y sea $F : P \to \mathscr{P}(Q)$ definida por

$$F(d) := d{\downarrow} = \{x \in Q : x \leq d\}$$

Tenemos:

- F preserva orden **en ambas direcciones**: para todos $d, c \in P$, $d \leq c \iff d{\downarrow} \subseteq c{\downarrow}$; esto implica que
- F es inyectiva (o bien, porque $\sup(F(d)) = d$ para todo $d \in P$).

Luego, $F : P \to \mathscr{P}(Q)$ es un isomorfismo entre $(P, \leq)$ y el subposet $(F(P), \subseteq)$ de $(\mathscr{P}(Q), \subseteq)$.

Generalicemos **dónde** estamos representando.
Podemos tomar (un subposet de) las partes otro conjunto Q.

En nuestros ejemplos, $Q \subseteq P$

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

En la Representación de álgebras de Boole finitas

Si $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ es un álgebra de Boole finita,

$$\begin{aligned} F : B &\to \mathscr{P}(At(B)) \\ x &\mapsto \{a \in At(B) : a \leq x\} \end{aligned}$$

es un isomorfismo entre $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ y $\left(\mathscr{P}(At(B)), \cup, \cap, (\cdot)^c, \varnothing, B\right)$.

Si $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ es un álgebra de Boole finita,

$At(B) \subseteq B$

$$
\begin{aligned}
F : B &\to \mathscr{P}(At(B)) \\
x &\mapsto \{a \in At(B) : a \leq x\} = x\downarrow \cap At(B)
\end{aligned}
$$

es un isomorfismo entre $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ y $\left(\mathscr{P}(At(B)), \cup, \cap, (\cdot)^c, \varnothing, B\right)$.

En la Representación de álgebras de Boole finitas

Si $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ es un álgebra de Boole finita,

$$\begin{aligned} F : B &\to \mathscr{P}(At(B)) \\ x &\mapsto \{a \in At(B) : a \leq x\} \end{aligned}$$

es un isomorfismo entre $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ y $\left(\mathscr{P}(At(B)), \cup, \cap, (\cdot)^c, \varnothing, B\right)$.
Notemos los siguientes puntos:

- La función F se define igual que para posets y preserva inmediatamente el orden $\quad x \leq y \implies F(x) \subseteq F(y)$.

En la Representación de álgebras de Boole finitas

Si $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ es un álgebra de Boole finita,

$$\begin{aligned} F : B &\to \mathscr{P}(At(B)) \\ x &\mapsto \{a \in At(B) : a \leq x\} \end{aligned}$$

es un isomorfismo entre $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ y $\left(\mathscr{P}(At(B)), \cup, \cap, (\cdot)^c, \varnothing, B\right)$.
Notemos los siguientes puntos:

- La función F se define igual que para posets y preserva inmediatamente el orden $\quad x \leq y \implies F(x) \subseteq F(y)$.
- La propiedad de

  Separación Para todo $x, y \in B$ tales que $x \nleq y$ existe $a \in At(B)$ tal que $a \leq x$ y $a \nleq y$.

En la Representación de álgebras de Boole finitas

Si $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ es un álgebra de Boole finita,

$\langle \mathcal{P}(A), \subseteq \rangle$

$$\begin{aligned} F : B &\to \mathscr{P}(At(B)) \\ x &\mapsto \{a \in At(B) : a \leq x\} \end{aligned}$$

es un isomorfismo entre $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ y $\left(\mathscr{P}(At(B)), \cup, \cap, (\cdot)^c, \varnothing, B\right)$.
Notemos los siguientes puntos:

- La función F se define igual que para posets y preserva inmediatamente el orden $x \leq y \implies F(x) \subseteq F(y)$.
- La propiedad de

  Separación Para todo $x, y \in B$ tales que $x \nleq y$ existe $a \in At(B)$ tal que $a \leq x$ y $a \nleq y$. $F(x) \subseteq F(y) \implies x \leq y$.

En la Representación de álgebras de Boole finitas

Si $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ es un álgebra de Boole finita,

$$\begin{aligned} F : B &\to \mathscr{P}(At(B)) \\ x &\mapsto \{a \in At(B) : a \leq x\} \end{aligned}$$

es un isomorfismo entre $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ y $\left(\mathscr{P}(At(B)), \cup, \cap, (\cdot)^c, \varnothing, B\right)$.
Notemos los siguientes puntos:

- La función F se define igual que para posets y preserva inmediatamente el orden $\quad x \leq y \implies F(x) \subseteq F(y)$.
- La propiedad de

  Separación Para todo $x, y \in B$ tales que $x \nleq y$ existe $a \in At(B)$ tal que $a \leq x$ y $a \nleq y$. $\qquad F(x) \subseteq F(y) \implies x \leq y$.

  completa la prueba de 1-1 y luego de **incrustación**

En la Representación de álgebras de Boole finitas

Si $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ es un álgebra de Boole finita,

$f \circ g = id$

$\Downarrow$

f sobre

$$F : B \to \mathscr{P}(At(B))$$
$$x \mapsto \{a \in At(B) : a \leq x\}$$

es un isomorfismo entre $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ y $\left(\mathscr{P}(At(B)), \cup, \cap, (\cdot)^c, \varnothing, B\right)$.
Notemos los siguientes puntos:

- La función F se define igual que para posets y preserva inmediatamente el orden $\quad x \leq y \implies F(x) \subseteq F(y)$.
- La propiedad de

  Separación Para todo $x, y \in B$ tales que $x \nleq y$ existe $a \in At(B)$ tal que $a \leq x$ y $a \nleq y$. $\qquad F(x) \subseteq F(y) \implies x \leq y$.

  completa la prueba de 1-1 y luego de **incrustación**
- $F(\sup(A)) = A$ para todo $A \subseteq At(B)$ sale por distributividad e implica F sobre (y luego un isomorfismo).

Dónde representamos y con qué

Todo poset P se incrusta $(\mathscr{P}(Q), \subseteq)$ *para algún* Q (es isomorfo $F(P)$).

$$F : P \to F(P) \subseteq \mathscr{P}(Q)$$

Dónde representamos y con qué

Todo poset P se incrusta $(\mathscr{P}(Q), \subseteq)$ *para algún* Q (es isomorfo $F(P)$).

$$F : P \to F(P) \subseteq \mathscr{P}(Q)$$

- Tenemos libertad de elegir Q según cómo sea P ($Q := P$ siempre funciona, y para álgebras de Boole $Q := At(B)$ es mejor).

Dónde representamos y con qué

Todo poset P se incrusta $(\mathscr{P}(Q), \subseteq)$ *para algún* Q (es isomorfo $F(P)$).

$$F : P \to F(P) \subseteq \mathscr{P}(Q)$$

- Tenemos libertad de elegir Q según cómo sea P ($Q := P$ siempre funciona, y para álgebras de Boole $Q := At(B)$ es mejor).
- La representación estará completa si entendemos bien cuáles subconjuntos están en la imagen de F (ideales principales para posets generales, todos en el caso booleano).

Dónde representamos y con qué

Todo poset P se incrusta $(\mathscr{P}(Q), \subseteq)$ *para algún* Q (es isomorfo $F(P)$).

$$F : P \to F(P) \subseteq \mathscr{P}(Q)$$

- Tenemos libertad de elegir Q según cómo sea P ($Q := P$ siempre funciona, y para álgebras de Boole $Q := At(B)$ es mejor).
- La representación estará completa si entendemos bien cuáles subconjuntos están en la imagen de F (ideales principales para posets generales, todos en el caso booleano).

A continuación determinaremos, para el caso de los reticulados distributivos L:

Dónde representamos y con qué

Todo poset P se incrusta $(\mathscr{P}(Q), \subseteq)$ *para algún* Q (es isomorfo $F(P)$).

$$F : P \to F(P) \subseteq \mathscr{P}(Q)$$

- Tenemos libertad de elegir Q según cómo sea P ($Q := P$ siempre funciona, y para álgebras de Boole $Q := At(B)$ es mejor).
- La representación estará completa si entendemos bien cuáles subconjuntos están en la imagen de F (ideales principales para posets generales, todos en el caso booleano).

A continuación determinaremos, para el caso de los reticulados distributivos L:

- El conjunto Q donde representamos, $Irr(L)$, formado por los elementos *irreducibles* de L,

Dónde representamos y con qué

Todo poset P se incrusta $(\mathscr{P}(Q), \subseteq)$ *para algún* Q (es isomorfo $F(P)$).

$$F : P \to F(P) \subseteq \mathscr{P}(Q)$$

- Tenemos libertad de elegir Q según cómo sea P ($Q := P$ siempre funciona, y para álgebras de Boole $Q := At(B)$ es mejor).
- La representación estará completa si entendemos bien cuáles subconjuntos están en la imagen de F (ideales principales para posets generales, todos en el caso booleano).

A continuación determinaremos, para el caso de los reticulados distributivos L:

- El conjunto Q donde representamos, $Irr(L)$, formado por los elementos *irreducibles* de L, y
- exactamente cuáles son los subconjuntos de $Irr(L)$ que están en $F(L)$: los *decrecientes*.

Elementos $\vee$-irreducibles

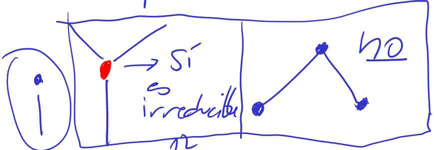
Definición

Un elemento x de un reticulado L es **$\vee$-irreducible** si "join"

1. x no es el primer elemento, y $x \neq 0^L$
2. Para todos $y, z \in L$, si $x = y \vee z$, entonces $y = x$ ó $z = x$.

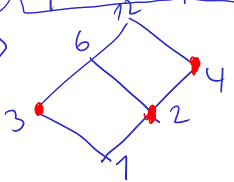
Denotaremos mediante $Irr(L)$ al conjunto de los elementos irreducibles de L.

x no se puede escribir como join de 2 cosas distintas

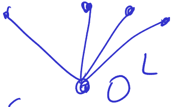


es $\vee$-irreducible!

$\langle D_{12}, | \rangle$



$Irr(D_{12}) = \{2, 4, 3\}$.



$At \subseteq Irr.$

Elementos $\vee$-irreducibles

Definición

Un elemento x de un reticulado L es $\vee$**-irreducible** si

1. x no es el primer elemento, y
2. Para todos $y, z \in L$, si $x = y \vee z$, entonces $y = x$ ó $z = x$.

Denotaremos mediante $Irr(L)$ al conjunto de los elementos irreducibles de L.

Resulta que si $x_1, \ldots, x_n$ son todos distintos de x, entonces $x \neq x_1 \vee \ldots \vee x_n$.

Elementos $\vee$-irreducibles

Definición

Un elemento x de un reticulado L es $\vee$**-irreducible** si

1. x no es el primer elemento, y
2. Para todos $y, z \in L$, si $x = y \vee z$, entonces $y = x$ ó $z = x$.

Denotaremos mediante $Irr(L)$ al conjunto de los elementos irreducibles de L.

Resulta que si $x_1, \ldots, x_n$ son todos distintos de x, entonces $x \neq x_1 \vee \ldots \vee x_n$.

Lema

Si L es finito, entonces $x \in L$ es $\vee$-irreducible $\iff$ el conjunto $\{a \in L : a < x\} = x{\downarrow} \setminus \{x\}$ tiene máximo.

Elementos $\vee$-irreducibles

Definición

Un elemento x de un reticulado L es $\vee$**-irreducible** si

1. x no es el primer elemento, y
2. Para todos $y, z \in L$, si $x = y \vee z$, entonces $y = x$ ó $z = x$.

Denotaremos mediante $Irr(L)$ al conjunto de los elementos irreducibles de L.

Resulta que si $x_1, \ldots, x_n$ son todos distintos de x, entonces $x \neq x_1 \vee \ldots \vee x_n$.

Lema

Si L es finito, entonces $x \in L$ es $\vee$-irreducible $\iff$ el conjunto $\{a \in L : a < x\} = x{\downarrow} \setminus \{x\}$ tiene máximo.

$x_1\ x_2\ x_3 \ldots x_n \neq x \Rightarrow x_1 \vee \cdots \vee x_n \neq x$

Demostración.

El supremo de dicho conjunto finito no puede ser igual a x.

$\sup\{a \in L : a < x\} = \max\{a \in L : a < x\}$.

Conjuntos decrecientes de un poset

Sea $(P, \leq)$ un poset.

Definición

Un subconjunto $D \subseteq P$ es **decreciente** si para todo $x, z \in P$ se tiene que:

$$x \in D \;\; \& \;\; z \leq x \implies z \in D.$$

Denotaremos mediante $\mathscr{D}(P)$ a la familia de todos los subconjuntos decrecientes de P.

$x \in D \Rightarrow x\!\downarrow \subseteq D.$

Conjuntos decrecientes de un poset

Sea $(P, \leq)$ un poset.

Definición

Un subconjunto $D \subseteq P$ es **decreciente** si para todo $x, z \in P$ se tiene que:

$$x \in D \ \ \& \ \ z \leq x \implies z \in D.$$

Denotaremos mediante $\mathscr{D}(P)$ a la familia de todos los subconjuntos decrecientes de P.

Ejemplo

- P es decreciente

Conjuntos decrecientes de un poset

Sea $(P, \leq)$ un poset.

Definición

Un subconjunto $D \subseteq P$ es **decreciente** si para todo $x, z \in P$ se tiene que:

P P

$$x \in D \;\;\&\;\; z \leq x \implies z \in D.$$

Denotaremos mediante $\mathscr{D}(P)$ a la familia de todos los subconjuntos decrecientes de P.

Ejemplo

- P es decreciente (consecuente trivial).

Conjuntos decrecientes de un poset

Sea $(P, \leq)$ un poset.

Definición

Un subconjunto $D \subseteq P$ es **decreciente** si para todo $x, z \in P$ se tiene que:

$$x \in D \ \ \& \ \ z \leq x \implies z \in D.$$

Denotaremos mediante $\mathscr{D}(P)$ a la familia de todos los subconjuntos decrecientes de P.

Ejemplo

- P es decreciente (consecuente trivial).
- $\varnothing$ lo es

Conjuntos decrecientes de un poset

Sea $(P, \leq)$ un poset.

Definición

Un subconjunto $D \subseteq P$ es **decreciente** si para todo $x, z \in P$ se tiene que:

$$x \in D \ \ \& \ \ z \leq x \implies z \in D.$$

Denotaremos mediante $\mathscr{D}(P)$ a la familia de todos los subconjuntos decrecientes de P.

Ejemplo

- P es decreciente (consecuente trivial).
- $\varnothing$ lo es (antecedente falso).

Conjuntos decrecientes de un poset

Sea $(P, \leq)$ un poset.

Definición

Un subconjunto $D \subseteq P$ es **decreciente** si para todo $x, z \in P$ se tiene que:

$$x \in D \;\;\&\;\; z \leq x \implies z \in D.$$

Denotaremos mediante $\mathscr{D}(P)$ a la familia de todos los subconjuntos decrecientes de P.

$x \in d\downarrow \;\&\; z \leq x \leq d$

$z \leq d$

$\downarrow$

$z \in d\downarrow$

Ejemplo

- P es decreciente (consecuente trivial).
- $\varnothing$ lo es (antecedente falso).
- $d\downarrow$ es decreciente (por transitividad).

Conjuntos decrecientes de un poset

Sea $(P, \leq)$ un poset.

Definición

Un subconjunto $D \subseteq P$ es **decreciente** si para todo $x, z \in P$ se tiene que:

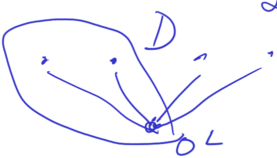
$$x \in D \;\;\&\;\; z \leq x \implies z \in D.$$

Denotaremos mediante $\mathscr{D}(P)$ a la familia de todos los subconjuntos decrecientes de P.

$P = \bullet x$

$\mathscr{D}(P) = \{\bullet x\}$

$\emptyset$



Ejemplo

- P es decreciente (consecuente trivial).
- $\emptyset$ lo es (antecedente falso).
- $d{\downarrow}$ es decreciente (por transitividad).
- Cualquier conjunto de átomos junto con el primer elemento.

Conjuntos decrecientes de un poset

D decreciente sii $\forall x\, z \in P,\ (z \leq x \in D \Rightarrow z \in D)$

Lema

Si D_1 y D_2 son decrecientes en $(P, \leq)$, entonces $D_1 \cap D_2$ y $D_1 \cup D_2$ también lo son.

$z \leq x \in D_1 \cap D_2.$

$$\left.\begin{array}{l} x \in D_1 \overset{D_1 \text{ decr}}{\Longrightarrow} z \in D_1 \\ x \in D_2 \overset{D_2 \text{ decr}}{\Longrightarrow} z \in D_2 \end{array}\right\} z \in D_1 \cap D_2$$

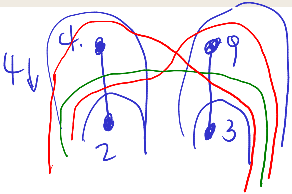
Lema

Si D_1 y D_2 son decrecientes en $(P, \leq)$, entonces $D_1 \cap D_2$ y $D_1 \cup D_2$ también lo son.

¿Es $d_1\!\downarrow \cap\, d_2\!\downarrow$ ideal principal?

Ejercicio

1. Probar la segunda afirmación.
2. ¿Valen las mismas propiedades de clausura para los ideales principales?
3. ¿Cuántos decrecientes tiene $(\{2, 4, 3, 9\}, |)$? $=: P$



$9\downarrow$ $\quad P, \emptyset, 4\downarrow, 9\downarrow = \{9, 3\}$

$\{2,3\}, 2\downarrow, 3\downarrow, 2\downarrow \cup 9\downarrow$

$\{4,2,3\}$, $2\downarrow = \{2\}$, $3\downarrow = \{3\}$

Conjuntos decrecientes de un poset

Lema

Si D_1 y D_2 son decrecientes en $(P, \leq)$, entonces $D_1 \cap D_2$ y $D_1 \cup D_2$ también lo son.

Ejercicio

1. Probar la segunda afirmación.
2. ¿Valen las mismas propiedades de clausura para los ideales principales?
3. ¿Cuántos decrecientes tiene $(\{2, 4, 3, 9\}, |)$? $\longrightarrow$ Actividad en Aula virtual!

Conjuntos decrecientes de un poset

Lema

Si D_1 y D_2 son decrecientes en $(P, \leq)$, entonces $D_1 \cap D_2$ y $D_1 \cup D_2$ también lo son.

Ejercicio

1. Probar la segunda afirmación.
2. ¿Valen las mismas propiedades de clausura para los ideales principales?
3. ¿Cuántos decrecientes tiene $(\{2, 4, 3, 9\}, |)$? $\longrightarrow$ Actividad en Aula virtual!

Corolario

$(\mathscr{D}(P), \subseteq)$ *es un subreticulado de* $(\mathscr{P}(P), \subseteq)$*, y luego es distributivo.*

Representación de reticulados distributivos finitos

Teorema (Birkhoff)

Sea L un reticulado distributivo finito. Entonces la función

$(Irr(L), \leq)$

$$\begin{aligned} F : L &\to \mathcal{D}(Irr(L)) \\ x &\mapsto \{a \in Irr(L) : a \leq x\} =: F(x) \end{aligned}$$

$F(L) = \mathcal{D}(Irr(L))$

es un isomorfismo entre $(L, \leq)$ *y* $\left(\mathcal{D}(Irr(L)), \subseteq\right)$ *con inversa* $\sup$.

Representación de reticulados distributivos finitos

Teorema (Birkhoff)

Sea L un reticulado distributivo finito. Entonces la función

$$\begin{aligned} F : L &\to \mathscr{D}(Irr(L)) \\ x &\mapsto \{a \in Irr(L) : a \leq x\} \end{aligned}$$

es un isomorfismo entre $(L, \leq)$ y $\left(\mathscr{D}(Irr(L)), \subseteq\right)$ con inversa $\sup$.

Notemos:

- $\{a \in Irr(L) : a \leq x\}$ siempre es un decreciente de $Irr(L)$ (está bien definida).

Representación de reticulados distributivos finitos

Teorema (Birkhoff)

Sea L un reticulado distributivo finito. Entonces la función

$$\begin{aligned} F : L &\to \mathcal{D}(Irr(L)) \\ x &\mapsto \{a \in Irr(L) : a \leq x\} \end{aligned}$$

es un isomorfismo entre $(L, \leq)$ y $\left(\mathcal{D}(Irr(L)), \subseteq\right)$ con inversa $\sup$.

Notemos:

- $\{a \in Irr(L) : a \leq x\}$ siempre es un decreciente de $Irr(L)$ (está bien definida). $x \leq y \implies F(x) \subseteq F(x)$
- Probaremos la propiedad de Separación usando $\vee$-irreducibles.

Representación de reticulados distributivos finitos

Teorema (Birkhoff)

Sea L un reticulado distributivo finito. Entonces la función

$$\begin{aligned} F : L &\to \mathcal{D}(Irr(L)) \\ x &\mapsto \{a \in Irr(L) : a \leq x\} \end{aligned}$$

es un isomorfismo entre $(L, \leq)$ y $\left(\mathcal{D}(Irr(L)), \subseteq\right)$ con inversa $\sup$.

Notemos:

- $\{a \in Irr(L) : a \leq x\}$ siempre es un decreciente de $Irr(L)$ (está bien definida).
- Probaremos la propiedad de Separación usando $\vee$-irreducibles. Como antes, esto nos dará que L se incrusta en $\mathcal{D}(Irr(L))$.

Representación de reticulados distributivos finitos

Teorema (Birkhoff)

Sea L un reticulado distributivo finito. Entonces la función

$$\begin{aligned} F : L &\to \mathscr{D}(Irr(L)) \\ x &\mapsto \{a \in Irr(L) : a \leq x\} \end{aligned}$$

es un isomorfismo entre $(L, \leq)$ y $\big(\mathscr{D}(Irr(L)), \subseteq\big)$ con inversa $\sup$.

Notemos:

- $\{a \in Irr(L) : a \leq x\}$ siempre es un decreciente de $Irr(L)$ (está bien definida).
- Probaremos la propiedad de Separación usando $\vee$-irreducibles. Como antes, esto nos dará que L se incrusta en $\mathscr{D}(Irr(L))$.
- La distributividad se usa solamente para ver que $F(\sup D) = D$ para todo $D \in \mathscr{D}(Irr(L))$ (luego F es sobre).

Prueba del Teorema de Birkhoff

Lema (Separación)

Sea L un reticulado (arbitrario) finito. Para todo $x, y \in L$ tales que $x \nleq y$ existe $a \in Irr(L)$ tal que $a \leq x$ y $a \nleq y$.

Lema (Separación)

Sea L un reticulado (arbitrario) finito. Para todo $x, y \in L$ tales que $x \not\leq y$ existe $a \in Irr(L)$ tal que $a \leq x$ y $a \not\leq y$.

$F(x) \subseteq F(y)$ *implica* $x \leq y$.

Subposet de L: $\{z \in L : z \leq x \ \& \ z \not\leq y\} \neq \emptyset$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \shortparallel$

Tiene minimal a $\in x{\downarrow} \setminus y{\downarrow}$.

Afirmo $a \in Irr(L)$. Sup. que no. $\Rightarrow \exists\, b, c \neq a$

tq $b \vee c = a$ $\quad b, c < a \Longrightarrow b, c \leq y \Rightarrow \underbrace{b \vee c}_{=\,a} \leq y$.

$(b, c \leq a)$

Luego a es $\vee$-irred. ✓ $\qquad$ Absurdo!!

Prueba del Teorema de Birkhoff

Lema (Separación)

Sea L un reticulado (arbitrario) finito. Para todo $x, y \in L$ tales que $x \nleq y$ existe $a \in Irr(L)$ tal que $a \leq x$ y $a \nleq y$. $F(x) \subseteq F(y)$ *implica* $x \leq y$.

Prueba del Teorema de Representación.

Prueba del Teorema de Birkhoff

Lema (Separación)

Sea L un reticulado (arbitrario) finito. Para todo $x, y \in L$ tales que $x \not\leq y$ existe $a \in Irr(L)$ tal que $a \leq x$ y $a \not\leq y$. *$F(x) \subseteq F(y)$ implica $x \leq y$.*

Prueba del Teorema de Representación.

- F preservan el orden en ambas direcciones.

Prueba del Teorema de Birkhoff

$$F(x) := \{ a \in Irr(L) : a \leq x \}$$

Lema (Separación)

Sea L un reticulado (arbitrario) finito. Para todo $x, y \in L$ tales que $x \not\leq y$ existe $a \in Irr(L)$ tal que $a \leq x$ y $a \not\leq y$.

$F(x) \subseteq F(y)$ *implica* $x \leq y$.

Prueba del Teorema de Representación.

- F preservan el orden en ambas direcciones.

Igual que antes

Prueba del Teorema de Birkhoff

Lema (Separación)

Sea L un reticulado (arbitrario) finito. Para todo $x, y \in L$ tales que $x \not\leq y$ existe $a \in Irr(L)$ tal que $a \leq x$ y $a \not\leq y$.

$F(x) \subseteq F(y)$ implica $x \leq y$.

Prueba del Teorema de Representación.

- F preservan el orden en ambas direcciones.

Igual que antes

- $D = F(\sup D) = \{a \in Irr(B) : a \leq \sup D\}$ para todo $D \in \mathcal{D}(Irr(B))$.

Prueba del Teorema de Birkhoff

$F(x) := \{a \in Irr(L) : a \leq x\}$

Lema (Separación)

Sea L un reticulado (arbitrario) finito. Para todo $x, y \in L$ tales que $x \nleq y$ existe $a \in Irr(L)$ tal que $a \leq x$ y $a \nleq y$.

$F(x) \subseteq F(y)$ *implica* $x \leq y$.

Prueba del Teorema de Representación.

- F preservan el orden en ambas direcciones.

Igual que antes

- $D = F(\sup D) = \{a \in Irr(B) : a \leq \sup D\}$ para todo $D \in \mathscr{D}(Irr(B))$.

Vemos las dos inclusiones como antes

$F(\sup D) \supseteq D$ ✓

$F(\sup D) \subseteq D$

Sup $a \leq \sup D = \sup\{a_1, \ldots, a_n\} = a_1 \vee \cdots \vee a_n$.

$a = a \wedge (a_1 \vee \cdots \vee a_n) = (a \wedge a_1) \vee \cdots \vee (a \wedge a_n)$ $\therefore a = a \wedge a_j$

$a \leq a_j \in D$

$a \in D$ ✓

Nueva caracterización de la distributividad

Vimos que

$$\begin{aligned} F : L &\to \mathscr{D}(Irr(L)) \\ x &\mapsto \{a \in Irr(L) : a \leq x\} \end{aligned}$$

incrusta L en su imagen $F(L) \subseteq \mathscr{D}(Irr(L))$ sin usar distributividad.

Nueva caracterización de la distributividad

Vimos que

$$\begin{aligned} F : L &\to \mathscr{D}(Irr(L)) \\ x &\mapsto \{a \in Irr(L) : a \leq x\} \end{aligned}$$

incrusta L en su imagen $F(L) \subseteq \mathscr{D}(Irr(L))$ sin usar distributividad. Ésta sólo se usa para ver que F es sobreyectiva. Y si acaso lo fuera, automáticamente es un isomorfismo porque preserva el orden en ambas direcciones.

Nueva caracterización de la distributividad

Vimos que

$$\begin{aligned} succ: \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ x &\longmapsto x+1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F : L &\to \mathscr{D}(Irr(L)) \\ x &\mapsto \{a \in Irr(L) : a \leq x\} \end{aligned}$$

incrusta L en su imagen $F(L) \subseteq \mathscr{D}(Irr(L))$ sin usar distributividad. Ésta sólo se usa para ver que F es sobreyectiva. Y si acaso lo fuera, automáticamente es un isomorfismo porque preserva el orden en ambas direcciones.

Para conjuntos finitos, la única manera de que una inyección no sea sobreyectiva es que el codominio tenga cardinal más grande que su dominio.

Nueva caracterización de la distributividad

Vimos que

$$\begin{aligned} F : L &\to \mathscr{D}(Irr(L)) \\ x &\mapsto \{a \in Irr(L) : a \leq x\} \end{aligned}$$

incrusta L en su imagen $F(L) \subseteq \mathscr{D}(Irr(L))$ sin usar distributividad. Ésta sólo se usa para ver que F es sobreyectiva. Y si acaso lo fuera, automáticamente es un isomorfismo porque preserva el orden en ambas direcciones.

Para conjuntos finitos, la única manera de que una inyección no sea sobreyectiva es que el codominio tenga cardinal más grande que su dominio.

Tenemos entonces:

Teorema

Sea L un reticulado finito. Si $|L| \geq |\mathscr{D}(Irr(L))|$, entonces L es distributivo.

Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Caracterizaciones de distributividad

Teorema

Sea L un reticulado finito. Son equivalentes:

- *L es distributivo;*

Caracterizaciones de distributividad

Teorema

Sea L un reticulado finito. Son equivalentes:

- L *es distributivo;*
- *(Lema 5.1 Apunte) para todos* $a, b, c \in L$*,*

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c);$$

Caracterizaciones de distributividad

Teorema

Sea L un reticulado finito. Son equivalentes:

- *L es distributivo;*
- *(Lema 5.1 Apunte) para todos $a, b, c \in L$,*

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c);$$

- *(P5E9) para todos $a, b, c \in L$,*

$$\left.\begin{array}{l} a \vee b = a \vee c \\ a \wedge b = a \wedge c \end{array}\right\} \implies b = c; \text{ y}$$

Caracterizaciones de distributividad

Teorema

Sea L un reticulado finito. Son equivalentes:

- *L es distributivo;*
- *(Lema 5.1 Apunte) para todos $a, b, c \in L$,*

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c);$$

- *(P5E9) para todos $a, b, c \in L$,*

$$\left.\begin{array}{l} a \vee b = a \vee c \\ a \wedge b = a \wedge c \end{array}\right\} \implies b = c; \text{ y}$$

- *ni M_3 ni N_5 se incrustan en L.*

Caracterizaciones de distributividad

Teorema

Sea L un reticulado finito. Son equivalentes:

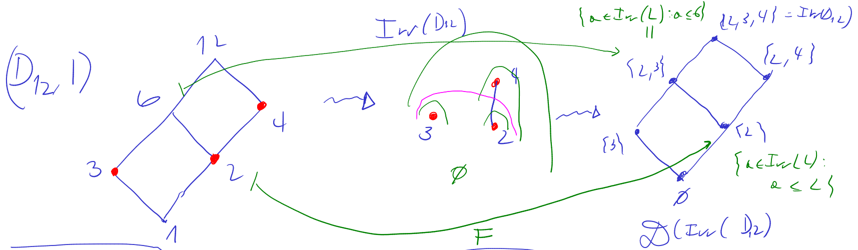
- *L es distributivo;*
- *(Lema 5.1 Apunte) para todos $a, b, c \in L$,*

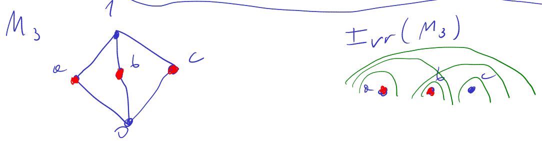
$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c);$$

- *(P5E9) para todos $a, b, c \in L$,*

$$\left.\begin{aligned} a \vee b = a \vee c \\ a \wedge b = a \wedge c \end{aligned}\right\} \implies b = c; \text{ y}$$

- *ni M_3 ni N_5 se incrustan en L.*
- *$|L| \geq |\mathcal{D}(Irr(L))|$ (y luego tienen el mismo cardinal).*





$\mathcal{D}(Irr(M_3))$

Hay $8 > 5 = |M_3|$

NO ES DISTRIBUTIVO.

Productos directos de posets

Definición

El **producto directo** $(L, \leq_L) \times (M, \leq_M)$ de $(L, \leq_L)$ y $(M, \leq_M)$ tiene como universo a $L \times M$ y como orden parcial a la relación

$$(x_1, y_1) \leq_{L\times M} (x_2, y_2) \iff x_1 \leq_L x_2 \ \& \ y_1 \leq_M y_2.$$

Definimos además $L^1 := L$ y $L^{n+1} := L \times L^n$ para todo poset L.

Productos directos de posets

Definición

El **producto directo** $(L, \leq_L) \times (M, \leq_M)$ de $(L, \leq_L)$ y $(M, \leq_M)$ tiene como universo a $L \times M$ y como orden parcial a la relación

$$(x_1, y_1) \leq_{L\times M} (x_2, y_2) \iff x_1 \leq_L x_2 \ \& \ y_1 \leq_M y_2.$$

Definimos además $L^1 := L$ y $L^{n+1} := L \times L^n$ para todo poset L. ¿L^0?

Productos directos de posets

Definición

El **producto directo** $(L, \leq_L) \times (M, \leq_M)$ de $(L, \leq_L)$ y $(M, \leq_M)$ tiene como universo a $L \times M$ y como orden parcial a la relación

$$(x_1, y_1) \leq_{L \times M} (x_2, y_2) \iff x_1 \leq_L x_2 \;\&\; y_1 \leq_M y_2.$$

Definimos además $L^1 := L$ y $L^{n+1} := L \times L^n$ para todo poset L. ¿L^0?

Diferencias y similitudes con la multiplicación

$$L \times M \neq M \times L \qquad L \times (M \times N) \neq (L \times M) \times N$$

Productos directos de posets

Definición

El **producto directo** $(L, \leq_L) \times (M, \leq_M)$ de $(L, \leq_L)$ y $(M, \leq_M)$ tiene como universo a $L \times M$ y como orden parcial a la relación

$$(x_1, y_1) \leq_{L \times M} (x_2, y_2) \iff x_1 \leq_L x_2 \ \& \ y_1 \leq_M y_2.$$

Definimos además $L^1 := L$ y $L^{n+1} := L \times L^n$ para todo poset L. ¿L^0?

Diferencias y similitudes con la multiplicación

	$L \times M \neq M \times L$	$L \times (M \times N) \neq (L \times M) \times N$	
pero sí	$L \times M \cong M \times L$	$L \times (M \times N) \cong (L \times M) \times N$	(iso).

Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Productos directos de posets

Definición

El **producto directo** $(L, \leq_L) \times (M, \leq_M)$ de $(L, \leq_L)$ y $(M, \leq_M)$ tiene como universo a $L \times M$ y como orden parcial a la relación

$$(x_1, y_1) \leq_{L\times M} (x_2, y_2) \iff x_1 \leq_L x_2 \ \& \ y_1 \leq_M y_2.$$

Definimos además $L^1 := L$ y $L^{n+1} := L \times L^n$ para todo poset L. ¿L^0?

Diferencias y similitudes con la multiplicación

	$L \times M \neq M \times L$	$L \times (M \times N) \neq (L \times M) \times N$	
pero sí	$L \times M \cong M \times L$	$L \times (M \times N) \cong (L \times M) \times N$	(iso).

Ejemplo

A las cadenas de $2, 3, 4, \ldots$ elementos las denotaremos $\mathbf{2}$, $\mathbf{3}$, $\mathbf{4}$, etc.

Productos directos de posets

Definición

El **producto directo** $(L, \leq_L) \times (M, \leq_M)$ de $(L, \leq_L)$ y $(M, \leq_M)$ tiene como universo a $L \times M$ y como orden parcial a la relación

$$(x_1, y_1) \leq_{L\times M} (x_2, y_2) \iff x_1 \leq_L x_2 \ \& \ y_1 \leq_M y_2.$$

Definimos además $L^1 := L$ y $L^{n+1} := L \times L^n$ para todo poset L. ¿L^0?

Diferencias y similitudes con la multiplicación

	$L \times M \neq M \times L$	$L \times (M \times N) \neq (L \times M) \times N$	
pero sí	$L \times M \cong M \times L$	$L \times (M \times N) \cong (L \times M) \times N$	(iso).

Ejemplo

A las cadenas de $2, 3, 4, \ldots$ elementos las denotaremos $\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}$, etc.
$\mathbf{2} \times \mathbf{2}$,

Productos directos de posets

Definición

El **producto directo** $(L, \leq_L) \times (M, \leq_M)$ de $(L, \leq_L)$ y $(M, \leq_M)$ tiene como universo a $L \times M$ y como orden parcial a la relación

$$(x_1, y_1) \leq_{L \times M} (x_2, y_2) \iff x_1 \leq_L x_2 \;\&\; y_1 \leq_M y_2.$$

Definimos además $L^1 := L$ y $L^{n+1} := L \times L^n$ para todo poset L. ¿L^0?

Diferencias y similitudes con la multiplicación

	$L \times M \neq M \times L$	$L \times (M \times N) \neq (L \times M) \times N$	
pero sí	$L \times M \cong M \times L$	$L \times (M \times N) \cong (L \times M) \times N$	(iso).

Ejemplo

A las cadenas de $2, 3, 4, \ldots$ elementos las denotaremos $\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}$, etc.

$\mathbf{2} \times \mathbf{2}, \quad \mathbf{2} \times \mathbf{3},$

Universidad Nacional de Córdoba UNC 1613 - 2013 400 AÑOS

Productos directos de posets

Definición

El **producto directo** $(L, \leq_L) \times (M, \leq_M)$ de $(L, \leq_L)$ y $(M, \leq_M)$ tiene como universo a $L \times M$ y como orden parcial a la relación

$$(x_1, y_1) \leq_{L\times M} (x_2, y_2) \iff x_1 \leq_L x_2 \ \& \ y_1 \leq_M y_2.$$

Definimos además $L^1 := L$ y $L^{n+1} := L \times L^n$ para todo poset L. ¿L^0?

Diferencias y similitudes con la multiplicación

	$L \times M \neq M \times L$	$L \times (M \times N) \neq (L \times M) \times N$	
pero sí	$L \times M \cong M \times L$	$L \times (M \times N) \cong (L \times M) \times N$	(iso).

Ejemplo

A las cadenas de $2, 3, 4, \ldots$ elementos las denotaremos $\mathbf{2}$, $\mathbf{3}$, $\mathbf{4}$, etc.

$\mathbf{2} \times \mathbf{2}$, $\mathbf{2} \times \mathbf{3}$, $\mathbf{2}^n$

Productos directos de posets

Definición

El **producto directo** $(L, \leq_L) \times (M, \leq_M)$ de $(L, \leq_L)$ y $(M, \leq_M)$ tiene como universo a $L \times M$ y como orden parcial a la relación

$$(x_1, y_1) \leq_{L\times M} (x_2, y_2) \iff x_1 \leq_L x_2 \;\&\; y_1 \leq_M y_2.$$

Definimos además $L^1 := L$ y $L^{n+1} := L \times L^n$ para todo poset L. ¿L^0?

Diferencias y similitudes con la multiplicación

$L \times M \neq M \times L$ $\qquad$ $L \times (M \times N) \neq (L \times M) \times N$

pero sí $\quad L \times M \cong M \times L$ $\qquad$ $L \times (M \times N) \cong (L \times M) \times N$ $\qquad$ (iso).

Ejemplo

A las cadenas de $2, 3, 4, \ldots$ elementos las denotaremos $\mathbf{2}$, $\mathbf{3}$, $\mathbf{4}$, etc.

$\mathbf{2} \times \mathbf{2}$, $\quad \mathbf{2} \times \mathbf{3}$, $\quad \mathbf{2}^n \cong \mathscr{P}(\{1, \ldots, n\})$ (P7E13a).

Productos directos de retículos

También se pueden hacer productos de estructuras algebraicas.

Productos directos de retículos

También se pueden hacer productos de estructuras algebraicas.

Definición

El **producto directo** $(L, \vee_L, \wedge_L) \times (M, \vee_M, \wedge_M)$ de dos retículos tiene como universo a $L \times M$ y operaciones definidas **coordenada a coordenada**:

$$(x_1, y_1) \vee_{L\times M} (x_2, y_2) := (x_1 \vee_L x_2, y_1 \vee_M y_2)$$
$$(x_1, y_1) \wedge_{L\times M} (x_2, y_2) := (x_1 \wedge_L x_2, y_1 \wedge_M y_2)$$

Productos directos de retículos

También se pueden hacer productos de estructuras algebraicas.

Definición

El **producto directo** $(L, \vee_L, \wedge_L) \times (M, \vee_M, \wedge_M)$ de dos retículos tiene como universo a $L \times M$ y operaciones definidas **coordenada a coordenada**:

$$(x_1, y_1) \vee_{L\times M} (x_2, y_2) := (x_1 \vee_L x_2, y_1 \vee_M y_2)$$
$$(x_1, y_1) \wedge_{L\times M} (x_2, y_2) := (x_1 \wedge_L x_2, y_1 \wedge_M y_2)$$

Ejercicio

1. (P7E8b) Comprobar que esta definición es coherente con la del producto como posets.

Productos directos de retículos

También se pueden hacer productos de estructuras algebraicas.

Definición

El **producto directo** $(L, \vee_L, \wedge_L) \times (M, \vee_M, \wedge_M)$ de dos retículos tiene como universo a $L \times M$ y operaciones definidas **coordenada a coordenada**:

$$(x_1, y_1) \vee_{L\times M} (x_2, y_2) := (x_1 \vee_L x_2, y_1 \vee_M y_2)$$
$$(x_1, y_1) \wedge_{L\times M} (x_2, y_2) := (x_1 \wedge_L x_2, y_1 \wedge_M y_2)$$

Ejercicio

1. (P7E8b) Comprobar que esta definición es coherente con la del producto como posets.
2. **(*)** Definir producto infinito o potencia infinita de estructuras.

Suma de posets

Si tenemos productos. . . ¿cómo no vamos a tener sumas?

Suma de posets

Si tenemos productos. . . ¿cómo no vamos a tener sumas?

Definición

La **suma directa** $(L, \leq_L) \oplus (M, \leq_M)$ de $(L, \leq_L)$ y $(M, \leq_M)$ disjuntos tiene como universo a $L \cup M$ y al orden parcial definido por casos:

$$x \leq_{L \oplus M} y \iff (x, y \in L \ \& \ x \leq_L y) \text{ ó } (x, y \in M \ \& \ x \leq_M y)$$

Suma de posets

Si tenemos productos... ¿cómo no vamos a tener sumas?

Definición

La **suma directa** $(L, \leq_L) \oplus (M, \leq_M)$ de $(L, \leq_L)$ y $(M, \leq_M)$ disjuntos tiene como universo a $L \cup M$ y al orden parcial definido por casos:

$$x \leq_{L\oplus M} y \iff (x, y \in L \ \& \ x \leq_L y) \text{ ó } (x, y \in M \ \& \ x \leq_M y)$$

(Para estructuras algebraicas es más difícil definir la suma directa).

Suma de posets

Si tenemos productos. . . ¿cómo no vamos a tener sumas?

Definición

La **suma directa** $(L, \leq_L) \oplus (M, \leq_M)$ de $(L, \leq_L)$ y $(M, \leq_M)$ disjuntos tiene como universo a $L \cup M$ y al orden parcial definido por casos:

$$x \leq_{L \oplus M} y \iff (x, y \in L \ \& \ x \leq_L y) \text{ ó } (x, y \in M \ \& \ x \leq_M y)$$

(Para estructuras algebraicas es más difícil definir la suma directa).
La suma directa de posets corresponde a poner "uno al lado del otro", sin relación entre ellos —de hecho, $(\leq_{L \oplus M}) = (\leq_L) \cup (\leq_M)$.

Caracterización de D_n

Ejercicios

- Si $D \subseteq L \cup M$ es decreciente en $L \oplus M$, entonces $D \cap L$ es decreciente en L y $D \cap M$ lo es en M.
- Si $D \subseteq L$ es decreciente en L, entonces lo es en $L \oplus M$ (ídem $D \subseteq M$).

Caracterización de D_n

Ejercicios

- Si $D \subseteq L \cup M$ es decreciente en $L \oplus M$, entonces $D \cap L$ es decreciente en L y $D \cap M$ lo es en M.
- Si $D \subseteq L$ es decreciente en L, entonces lo es en $L \oplus M$ (ídem $D \subseteq M$).

Teorema

Para todo par de posets L y M, $\mathscr{D}(L \oplus M) \cong \mathscr{D}(L) \times \mathscr{D}(M)$.

Caracterización de D_n

Ejercicios

- Si $D \subseteq L \cup M$ es decreciente en $L \oplus M$, entonces $D \cap L$ es decreciente en L y $D \cap M$ lo es en M.
- Si $D \subseteq L$ es decreciente en L, entonces lo es en $L \oplus M$ (ídem $D \subseteq M$).

Teorema

Para todo par de posets L y M, $\mathscr{D}(L \oplus M) \cong \mathscr{D}(L) \times \mathscr{D}(M)$.

Corolario (Caracterización de D_n)

Todo poset de divisores es un producto de cadenas (usa P7E4b).

Fin de la Primera Parte