Consulta IntroLóp

22/10/2021

(Lógica Proposicional).

$\boxed{\text{P5 E8}}$ $\Gamma_0 = \{p_0, \neg(p_1 \to p_2), p_3 \vee p_2\}$

$\to$ Necesitamos que Γ_0 sea consistente.

Como Γ_0 es consistente, $\exists \Gamma \supseteq \Gamma_0$ consistente maximal.

Idea: Tomar dos extensiones de Γ_0 "incompatibles" y luego agrandarlas a sendos maximales.

$\Gamma_1 := \Gamma_0 \cup \{p_4\}$ $\qquad$ $\Gamma_2 := \Gamma_0 \cup \{\neg p_4\}$

Sea v asignación que valide Γ_0.

Notar:

$$v_i(p) := \begin{cases} v(p) & \text{si } p \neq p_4 \\ 2-i & \text{si } p = p_4 \end{cases} \qquad v_i : V \to \{0,1\}$$

cumple que v_i valida Γ_i $(i=1,2)$.

Luego, por Lema de consistencia, Γ_i es consist.

Hay $\Gamma_i^* \supseteq \Gamma_i \supseteq \Gamma_0$ consist. maximal. $(i=1,2)$.

Basta ver que $\Gamma_1^* \neq \Gamma_2^*$. Si no,

$\Gamma_1^* \supseteq \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \supseteq \{p_4, \neg p_4\} \vdash \bot \Rightarrow \Gamma_1^*$ inconsist, absurdo. Luego deben ser distintos.

Otra forma de remontarlo:

Recordar: Si v es asignación,

$\boxed{Th(v) = \{\varphi \in PROP : [\![\varphi]\!]_v = 1\} \text{ es consistente maximal.}}$

$Th(v_1)$ y $Th(v_2)$ son consist. max. que incluyen a Γ_0 (puesto que lo validan) y son distintos porque $p_4 \in Th(v_1) \setminus Th(v_2)$.

$\boxed{P5\ E7}$ $\Gamma_0 = \{p_0, \neg(p_1 \to p_2), p_3 \vee p_2\} \subseteq \Gamma$ que es consis. max.

¿$\neg p_1 \vee p_2 \in \Gamma$?

Argumento 1: "Toda asignación v que valida Γ_0 cumple que $[\![\neg p_1 \vee p_2]\!]_v = 0$. Entonces $\neg p_1 \vee p_2$ no puede estar en Γ"

Manera de justificar

Como Γ es consist. maximal, existe v tq $\Gamma = Th(v)$. Como $\Gamma \supseteq \Gamma_0$, v valida Γ_0. Por el Argumento 1, $[\![\neg p_1 \vee p_2]\!]_v \neq 1$, y luego $\neg p_1 \vee p_2 \notin \Gamma$ ✓.

Argumento 2: "Como Γ es consistente, hay v que la valida. Luego verifico que esa v cumple que $[\![\neg p_1 \vee p_2]\!]_v = 0$. Entonces $\neg p_1 \vee p_2 \notin \Gamma$.

Justificación: Observar que no sólo v valida Γ

$$(\text{valida}) \quad \varphi \in \Gamma \implies [\![\varphi]\!]_v = 1$$

sino, más fuertemente,

$$(\Gamma = Th(v)) \quad \varphi \in \Gamma \iff [\![\varphi]\!]_v = 1$$

porque Γ es maximal.

Ejercicio: Γ es consistente maximal y v valida Γ, entonces $\Gamma = Th(v)$.

$\boxed{\text{P4E6}}$ Hacer caso del T. de Corrección para $\vee E$

"Para todo Γ, $\Gamma \supseteq Hip(D)$, entonces $\Gamma \models Cond(D)$"

por inducción en D.

$$D \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vdots\, D_1 & \vdots\, D_2 & \vdots\, D_3 \\ \varphi\vee\psi & \chi & \chi \end{array} \\ \hline \chi \end{array} \right. \vee E$$

HI: "Para todo Γ, $\Gamma \supseteq Hip(D_i)$, entonces $\Gamma \models Cond(D_i)$" $(i=1,2,3)$

Es decir,

1) Para todo Γ, $\Gamma \supseteq Hip(D_1)$, entonces $\Gamma \models \varphi\vee\psi$

2) Para todo Γ, $\Gamma \supseteq Hip(D_2)$, entonces $\Gamma \models \chi$

3) Para todo Γ, $\Gamma \supseteq Hip(D_3)$, entonces $\Gamma \models \chi$

Quiero ver

Para todo Γ, $\Gamma \supseteq Hip(D)$, entonces $\Gamma \models \chi$

$$D\left\{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\, D_1 & \vdots\, D_2 & \vdots\, D_3\\ \varphi\vee\psi & \chi & \chi\end{matrix}}{\chi}\,\vee E\right.$$

Sup. $\Gamma \supseteq Hip(D) = Hip(D_1) \cup \left(Hip(D_2)\setminus\{\varphi\}\right) \cup \left(Hip(D_3)\setminus\{\psi\}\right)$.

Por HI 1 $\quad \Gamma \models \varphi\vee\psi$.

2 $\quad \Gamma\cup\{\varphi\}\models\chi$

3 $\quad \Gamma\cup\{\psi\}\models\chi$.

Quiero ver que $\Gamma\models\chi$. Tomo v que valide Γ.

Quiero ver que $[\![\chi]\!]_v = 1$.

1 $\Rightarrow$ $[\![\varphi\vee\psi]\!]_v = 1 = \max\{[\![\varphi]\!]_v, [\![\psi]\!]_v\}$ → alguno es 1

$\boxed{\text{Caso: } [\![\varphi]\!]_v = 1}$. Pero entonces v valida $\Gamma\cup\{\varphi\}$

entonces por 2, $[\![\chi]\!]_v = 1$ ✓

$\boxed{\text{Caso: } [\![\psi]\!]_v = 1}$ Igual, usando 3. ✓

P1E5 Definir el conjunto $S(\varphi)$ de subfórmulas de φ. (luego "ψ es subfórmula de φ" se definirá como "$\psi \in S(\varphi)$").

$$S(p) := \{p\} \quad \text{si} \quad p \in AT.$$

$$S((\varphi \odot \psi)) := \{(\varphi \odot \psi)\} \cup S(\varphi) \cup S(\psi).$$

$$S(p_0 \to (p_1 \vee \bot)) = \{p_0 \to (p_1 \vee \bot)\} \cup \underbrace{S(p_0)}_{=\{p_0\}} \cup S(p_1 \vee \bot)$$

$$S(p_1 \vee \bot) = \{p_1 \vee \bot\} \cup \underbrace{S(p_1)}_{=\{p_1\}} \cup \underbrace{S(\bot)}_{=\{\bot\}} = \{p_1 \vee \bot, p_1, \bot\}$$

$$S(p_0 \to (p_1 \vee \bot)) = \{p_0 \to (p_1 \vee \bot), p_0, p_1 \vee \bot, p_1, \bot\}.$$

P1E4: $\mathrm{ocur}(k, \varphi) = |\varphi|_{p_k}$

$$\mathrm{ocur}(k, p) := \begin{cases} 1 & \text{si } p = p_k \\ 0 & \text{si } p \neq p_k \end{cases}$$

$$\mathrm{ocur}(k, (\varphi \odot \psi)) := \mathrm{ocur}(k, \varphi) + \mathrm{ocur}(k, \psi)$$