

Una aplicación de selectores definibles a los procesos de decisión de Markov

Pedro Sánchez Terraf*

30 de octubre de 2024

Resumen

En este trabajo pasamos revista al uso, en Ciencias de la Computación, de los procesos de decisión de Markov sobre espacios de Borel estándares (i.e., que provienen de espacios separables y completamente metrizable). Mostramos cómo el Teorema de Selección de Kuratowski y Ryll-Nardzewski se utiliza para demostrar la existencia de “planificadores” (*schedulers*) medibles Borel. Estos permiten dar una representación determinista de sistemas que admiten comportamientos probabilistas diversos para cada estado en el que se encuentran.

1. Introducción

Existen diversos tópicos en Ciencias de la Computación que inspiran honestos problemas matemáticos. En nuestro caso, pasaremos revista a un rincón del estudio de procesos computacionales probabilistas, y más precisamente, a los procesos de decisión de Markov sobre espacios incontables.

La principal motivación de la última calificación radica en una visión ampliada del concepto de *proceso* en la que se incluyen, por ejemplo, los componentes físicos o motores que son actuados por una computadora. Esto induce que el “espacio de estados” de tal proceso combine todas las variables involucradas en dicho marco ampliado. Idealmente, además, se desea describir el proceso en su naturaleza original, previa a cualquier discretización necesaria para un posterior cálculo.

La parte probabilista modela, en algunos casos, una “incertidumbre cuantificada”: a saber, la fiabilidad de los nombrados componentes en cuanto a que respondan a las órdenes ejercidas; asimismo, aquella también representa a cómputos aleatorizados, como una aproximación de Monte Carlo. Pero a menudo también se considera otro tipo de incertidumbre más opaca o “no determinismo

*Universidad Nacional de Córdoba. Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación.

Centro de Investigación y Estudios de Matemática (CIEM-FaMAF). Córdoba. Argentina. Financiado por proyectos Secyt-UNC 33620230100751CB y PIP 11220210100508CO.

Palabras clave: procesos de decisión de Markov, Teorema de Kuratowski y Ryll-Nardzewski. *MSC 2020:* 03E15; 68Q85, 60JXX. *ACM class:* F.4.1; F.1.2.

interno”, del cual se tiene poca o ninguna información. Éste puede representar la ignorancia de las probabilidades respectivas, o simplemente el deseo de describir una situación general que aplique a varios modelos concretos. Un tercer caso de interés y que sirvió de origen para este concepto en el seno de la *computación concurrente*, es el que viene dado por los posibles comportamientos que pueden surgir cuando un “planificador” (*scheduler*) organiza de manera sucesiva una serie de tareas que fueron solicitadas paralelamente por diferentes “núcleos” de la computadora.

En este trabajo estudiaremos procesos cuyo no determinismo interno está representado por un menú de comportamientos probabilistas distintos para cada estado, y la posibilidad de *determinizarlo* mediante una planificación “medible”. En la siguiente sección pondremos el rigor necesario a la discusión informal previa.

2. Procesos de decisión de Markov

2.1. Procesos de Markov etiquetados

En nuestro contexto, puede pensarse que las decisiones en un proceso de decisión de Markov representan la interacción de una usuaria con el sistema, y estarán *etiquetadas* por un conjunto contable L que quedará fijo de ahora en más. La noción que sigue (devida a Panangaden [1, 10], Desharnais [4], y otros) captura la idea de proceso computacional en el que toda la indeterminación viene dada por probabilidades conocidas, o “accesibles”, a dicha usuaria.

Definición 1. Un *proceso de Markov etiquetados (LMP)*¹ consta de un espacio medible (S, Σ) denominado *espacio de estados* y para cada $a \in L$, de una *subprobabilidad de transición* ó núcleo de Markov, es decir, una función $\tau_a : S \times \Sigma \rightarrow [0, 1]$ tal que $\tau_a(\cdot, Q) : S \rightarrow [0, 1]$ es un mapa medible para cada Q y para cada $s \in S$, $\tau_a(s, \cdot) : \Sigma \rightarrow [0, 1]$ es:

1. o bien una medida de probabilidad sobre (S, Σ) ; o
2. la función constantemente nula.

Se interpreta que, en cada momento, el proceso se halla en un estado $s \in S$, que no es visible a la usuaria del sistema. Ella sólo puede observar el conjunto de etiquetas $a \in L$ tales que $\tau_a(s, S) > 0$ (de aquí el interés en tener la opción en el Ítem 2); podemos pensar que en tal caso hay una “tecla” a habilitada para ser presionada. Al hacerlo, el proceso evoluciona a un nuevo estado s' que yacerá en $Q \subseteq S$ con probabilidad $\tau_a(s, Q)$.

Un último elemento que interviene en nuestro trabajo es la noción de “testing” como herramienta de comparación entre procesos computacionales. Estos tests representan la respuesta de estos últimos a una sucesión de interacciones

¹Usaremos las siglas en inglés para concordancia con el resto de la literatura; en este caso, corresponde a *labeled Markov process*.

con una usuaria del sistema, arrancando de un estado particular s_0 . La representación formal de dichos tests se logra mediante la *lógica modal*.

Definición 2. El conjunto de los tests o *fórmulas modales* \mathcal{L} es la menor familia de expresiones que incluye al símbolo \top , y para cada $\varphi, \psi \in \mathcal{L}$, $a \in L$ y $q \in \mathbb{Q}$, las tres expresiones

$$(\varphi \wedge \psi), \quad (\neg\varphi), \quad \langle a \rangle_{>q}\varphi$$

también pertenecen a \mathcal{L} .

Es necesario dar un significado a dichas expresiones, y como tal asignaremos a cada φ el conjunto $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathbb{S}}$ de los estados que la satisfacen (o que “pasan” el respectivo test). Queremos que \top represente el test trivial (que es pasado por todos los estados) y que \wedge represente el simultáneo éxito de dos tests.

Definición 3 (Semántica de \mathcal{L}). Fijemos un LMP $\mathbb{S} = (S, \Sigma, \{\tau_a \mid a \in L\})$. Definimos por recursión, para cada elemento de \mathcal{L} :

$$\begin{aligned} \llbracket \top \rrbracket_{\mathbb{S}} &:= S \\ \llbracket (\neg\varphi) \rrbracket_{\mathbb{S}} &:= S \setminus \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathbb{S}} \\ \llbracket (\varphi \wedge \psi) \rrbracket_{\mathbb{S}} &:= \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathbb{S}} \cap \llbracket \psi \rrbracket_{\mathbb{S}} \\ \llbracket \langle a \rangle_{>q}\varphi \rrbracket_{\mathbb{S}} &:= \{s \mid \tau_a(s, \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathbb{S}}) > q\}. \end{aligned}$$

De esta manera, s pasa $(\varphi \wedge \psi)$ si y sólo si pasa tanto φ como ψ , y pasará el test $\langle a \rangle_{>q}\varphi$ exactamente cuando la probabilidad de alcanzar un estado que pase φ , luego de elegir la acción a , supera la cota q . La buena definición de este último caso depende directamente de la medibilidad de $\tau_a(\cdot, Q)$.

Ejemplo 4. Consideremos el LMP “discreto” dado por el siguiente diagrama: El espacio medible es el conjunto $S := \{s, t, r, u\}$ donde todo subconjunto es

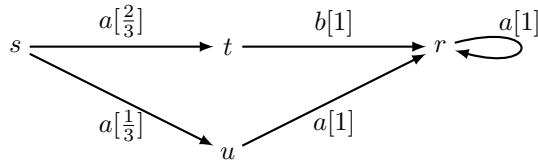


Figura 1: El LMP $(S, \text{Pow}(S), \{\tau_a, \tau_b\})$.

medible, y los núcleos vienen dados por

$$\tau_a(v, Q) := \begin{cases} \frac{2}{3}\chi_Q(t) + \frac{1}{3}\chi_Q(u) & v = s, \\ \chi_Q(r) & v \in \{u, r\}, \\ 0 & v = t. \end{cases}$$

$$\tau_b(v, Q) := \delta_t(v) \cdot \chi_Q(r).$$

El estado s satisface $(\neg\langle b \rangle_{>0}\top)$ (no puede hacer una transición etiquetada por b), pero sí puede hacer una transición a seguida de una b : $s \in \llbracket \langle a \rangle_{>0}\langle b \rangle_{>0}\top \rrbracket$. Por otro lado, u y r pasan exactamente los mismos tests.

Las fórmulas modales representan los tests a los que una usuaria podría someter un proceso, y de esa manera queda en evidencia que en este modelo, las probabilidades se consideran accesibles a ella.

2.2. No determinismo interno

Consideremos ahora el caso de procesos en los que no se conoce la distribución exacta de probabilidad para el “siguiente estado” al elegir una acción a a partir de un estado s . Una forma de capturar esta indeterminación es modificando la definición de las funciones de transición: en lugar de asignar una medida de (sub)probabilidad $s \mapsto \tau_a(s, \cdot)$, hacer corresponder un conjunto de subprobabilidades $s \mapsto T_a(s)$. De esta manera, la usuaria no sabe qué con qué distribución de probabilidad se sorteará el siguiente estado en el proceso. Para precisar lo que *sí* sabe, describiremos cómo se interpretan las fórmulas modales para estos procesos: s pasará el test $\langle a \rangle_{>q}\varphi$ si al menos uno de los comportamientos probabilistas $\mu \in T_a(s)$ asigna probabilidad mayor a q al evento de alcanzar un estado en el que se cumple φ ; es decir,

$$\llbracket \langle a \rangle_{>q}\varphi \rrbracket_s := \{s \mid T_a(s) \cap \beta(>q, \llbracket \varphi \rrbracket) \neq \emptyset\}, \quad (1)$$

donde $\beta(>q, Q)$ es el conjunto de las medidas μ de subprobabilidad sobre (S, Σ) que cumplen $\mu(Q) > q$. Como antes, cuando uno quiere expresar propiedades más complejas, como $\langle b \rangle_{>p}\langle a \rangle_{>q}\varphi$, se necesita cierta condición de medibilidad. Sin embargo, el formato de test/fórmula modal discutido hasta ahora se muestra insuficiente para capturar los comportamientos de estados de estos procesos (aún en el caso en el que $T_a(s)$ sea siempre finito, ver Celayes [2, Ejemplo 9, p.39] ó D’Argenio et al. [3, Example 5.1]). Para dar un margen más amplio al formato de fórmula elegido, la siguiente definición requiere una condición de medibilidad mucho más estricta. Recordemos que el espacio de medidas de subprobabilidad $\text{SubP}(U)$ sobre un espacio medible (U, Υ) también lo es, y su σ -álgebra está generada por los conjuntos $\beta(>q, Q)$ con $Q \in \Upsilon$.

Definición 5. Sea (S, Σ) un espacio medible y L como antes.

1. Si (U, Υ) es un segundo espacio medible, una *relación estocástica no determinista entre S y U* es una función $s \mapsto T(s)$, donde $T(s)$ es un conjunto medible de medidas de subprobabilidad sobre (U, Υ) tal que para todo $\zeta \subseteq \text{SubP}(U)$ medible, $\{s \mid T(s) \cap \zeta \neq \emptyset\} \in \Sigma$.
2. Un *núcleo no determinista sobre (S, Σ)* es una relación estocástica no determinista entre S y sí mismo.
3. [13, 3] Un proceso de Markov etiquetado *no determinista (NLMP)* es una terna $(S, \Sigma, \{T_a \mid a \in L\})$ tal que para cada $a \in L$, T_a es un núcleo no determinista sobre (S, Σ) .

Consideramos pertinente hacer cuatro observaciones sobre las definiciones anteriores

Primero, en las relación estocásticas no deterministas el dominio se separa del conjunto sobre el cual sucede el comportamiento probabilista, como es el enfoque sostenido por Doberkat [5] y que también fue de utilidad para Pachel y el autor en [9, Sect. 2]. Aquí, esto responde a una necesidad técnica que será evidente en la prueba del Teorema 13.

Segundo, nos restringiremos en este trabajo al caso donde (S, Σ) y (U, Υ) son los espacios de Borel de sendos espacios *polacos*, i.e. separables y completamente metrizable. En este caso, $\text{SubP}(U)$ (y luego $\text{SubP}(S)$ para los núcleos no deterministas) también es polaco; este resultado, que se obtiene por argumentos similares a las Proposiciones 4.10.7 y 4.10.9 de Doberkat [6] y en Kechris [8, Thm. 17.23], se puede hallar en Celayes [2, Teorema 27].

Tercero, la hipótesis de que $T(s)$ sea un conjunto medible para todo s es lo mínimo necesario para evitar diversas patologías. De hecho, el caso “simple” de $T(s)$ contable para todo s no se halla exento de complejidades [12]. El caso que nos interesa en este trabajo es el de $T(s)$ finito, conocido como “de *imagen finita*”.

Y en cuarto y último lugar, la condición de medibilidad sobre la función $s \mapsto T(s)$ es de algún modo demasiado restrictiva. Esto se aprecia al considerarla como una función medible $T : (S, \Sigma) \rightarrow (\text{Borel}(\text{SubP}(U)), \mathcal{H})$ para alguna σ -álgebra \mathcal{H} apropiada sobre la familia de subconjuntos medibles de $\text{SubP}(U)$; de hacer esto, se concluye que \mathcal{H} ni siquiera es generada por un conjunto contable. De todos modos, en este trabajo sólo utilizaremos conjuntos abiertos $\zeta \subseteq \text{SubP}(U)$ en alguna topología compatible con la estructura medible heredada. Esto se corresponde naturalmente con la estructura de Effros [8, Sect. 12.C] sobre el hiperespacio de cerrados de un espacio polaco.

3. Planificación medible

En esta sección, como anticipamos, el espacio de base S será polaco, y todos los núcleos no deterministas T en consideración serán de imagen finita.

Bajo estas hipótesis, es de interés saber si hay manera de encontrar una planificación (i.e., familia de selecciones) que recorra todos los comportamientos probabilistas de T . Esto se relaciona con el Axioma de Elección, puesto que estamos eligiendo un comportamiento $\tau(s)$ en cada una de las bolsas finitas $T(s)$. Sin embargo, es sabido que las funciones resultantes de la aplicación ciega de ese axioma pueden ser muy irregulares. Pero en casos “definibles” como el que nos compete, se pueden obtener funciones medibles. El siguiente resultado es un ejemplo clásico de resultado de selección medible.

Sean Y un espacio polaco, y $\mathcal{F}(Y)$ el hiperespacio de subconjuntos cerrados de Y con la estructura de Borel de Effros: $\zeta \subseteq \mathcal{F}(Y)$ es medible si y sólo si está en la σ -álgebra generada por los conjuntos $\{F \subseteq Y \mid F \text{ cerrado, } F \cap V \neq \emptyset\}$, con V variando entre los abiertos de Y .

Teorema 6 (Kuratowski, Ryll-Nardzewski [8, Sect. 12.F]). *Existe una familia contable de mapas medibles $d_j : \mathcal{F}(Y) \rightarrow Y$ tal que $\overline{\{d_j(F) : j \in \mathbb{N}_0\}} = F$ para todo $F \in \mathcal{F}(Y)$ no vacío.*

Se dice que los mapas medibles provistos por este teorema son una *familia de selectores densos*.

Usando el Teorema 6 (para $Y = \text{SubP}(S)$), en [7] se probó que todo núcleo de imagen finita $T(s)$ se puede escribir como

$$T(s) = \{\tau_n(s, \cdot) : n \in \mathbb{N}\},$$

donde cada τ_n es un núcleo de Markov. Tenga en cuenta que, aunque tenemos una sucesión de núcleos, para cada s tendremos conjunto finito de *medidas*.

Sin embargo, la aplicación obvia del Teorema 6 no permite bajar a una cantidad finita de núcleos de Markov, aún habiendo una cota uniforme del cardinal de $T(s)$. Ello motivó la siguiente pregunta, que fue publicada en MathOverflow [11]:

Supongamos que (S, Σ) es un espacio de Borel estándar, y para cada $s \in S$, $T(s)$ es un conjunto de dos medidas de probabilidad $\{\mu_s, \nu_s\}$ sobre S tal que para cada conjunto medible $\xi \subseteq \text{SubP}(S)$,

$$\{s : \mu_s \in \xi\} \cup \{s : \nu_s \in \xi\}$$

está en Σ . ¿Hay alguna forma de encontrar funciones de elección $s \mapsto \mu_s \in T(s)$ y $s \mapsto \nu_s \in T(s)$ de modo que ambos conjuntos que aparecen en la unión sean medibles para cada s ?

En general, si $T(s)$ tiene a lo sumo n elementos para todo $s \in S$, ¿es representable como $\{\tau_j(s, \cdot) \mid 0 \leq j < n\}$? ¿O al menos como una colección finita de núcleos?

Para mejor apreciación, un enunciado similar al citado pero más débil es el siguiente:

Proposición 7. *Si $M = \langle \mu_1, \mu_2 \rangle : S \rightarrow \text{SubP}(S)$ es tal que $(\{\mu_1 \in \zeta\} \times S) \cup (S \times \{\mu_2 \in \zeta\})$ es medible para cada Borel $\zeta \subseteq \text{SubP}(S)$, entonces cada función coordenada μ_1 y μ_2 es medible.*

La hipótesis de la Proposición es equivalente a que

$$A(\zeta) := \{(s, t) : \{\mu_1(s), \mu_2(t)\} \cap \zeta \neq \emptyset\} \quad (2)$$

sea Borel para todo Borel $\zeta \subseteq \text{SubP}(S)$, mientras que la de la pregunta se corresponde con que

$$\{s : \{\mu_1(s), \mu_2(s)\} \cap \zeta \neq \emptyset\} \quad (3)$$

sea Borel. Este último conjunto es esencialmente la intersección de $A(\zeta)$ con la diagonal; por lo tanto, la hipótesis que involucra $A(\zeta)$ es más fuerte. La diferencia radica en que en (2) ya se ha hecho una elección (entre cada par de medidas: cuál es la primera y cuál es la segunda) y el punto en cuestión es si acaso esta elección se puede hacer de manera medible.

En la siguiente sección daremos respuesta afirmativa a todas las preguntas planteadas.

3.1. Resultados técnicos y aplicaciones

De ahora en adelante, Y es polaco y fijamos una familia de selectores densos medibles $\{d_j : j \in \mathbb{N}_0\}$ sobre $\mathcal{F}(Y)$.

Lema 8. *Supongamos que $f : S \rightarrow Y$ es Borel y $H : S \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ es un mapa tal que para todo $x \in S$ $f(x) \notin H(x)$. Además, supongamos que el mapa $T : S \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ dado por $T(x) := H(x) \cup \{f(x)\}$ es medible. Entonces, H también lo es.*

Demostración. Basta ver que $H_V := \{x \in S : H(x) \cap V \neq \emptyset\}$ es Borel para cada $V \subseteq Y$ abierto. Así que fijemos tal V y definamos

$$\begin{aligned} A_{=1} &:= \{x \in S : T(x) \cap V \neq \emptyset\} \setminus f^{-1}(V) \\ Q_{n,m} &:= \{x \in S : d_n(T(x)) \neq d_m(T(x)) \ \& \ T(x) \neq \emptyset\} \\ A_{\geq 2} &:= \bigcup_{n,m} Q_{n,m} \cap (d_n \circ T)^{-1}(V) \cap (d_m \circ T)^{-1}(V). \end{aligned}$$

Mostraremos que H_V es la unión de $A_{=1}$ y $A_{\geq 2}$, los cuales son Borel ya que tanto T como los selectores d_j son medibles.

Para $H_V \subseteq A_{=1} \cup A_{\geq 2}$, sea $x \in H_V$ y dividamos en casos. Si $|T(x) \cap V| = 1$, entonces $x \in A_{=1}$ ya que el único elemento de $T(x) \cap V$ no puede ser igual a $f(x)$. De lo contrario, hay al menos dos $y_i \in T(x) \cap V$ diferentes ($i = 1, 2$). Sean $V_i \subseteq V$ abiertos y disjuntos tal que $y_i \in V_i$. Dado que los d_j son selectores densos, debe haber $j_i \in \mathbb{N}_0$ tal que $d_{j_i}(T(x)) \in V_i$, lo que demuestra que $x \in Q_{j_1, j_2} \cap (d_{j_1} \circ T)^{-1}(V) \cap (d_{j_2} \circ T)^{-1}(V)$.

La inclusión inversa sigue de manera similar. \square

Usando las mismas ideas del lema anterior, se puede recuperar el resultado clásico de que la familia

$$\mathcal{F}_{\leq k} := \{F \in \mathcal{F}(Y) \mid F \text{ tiene a lo sumo } k \text{ elementos}\}$$

es medible para cada $k \in \mathbb{N}_0$, (de hecho, si Y es compacto, resulta cerrado en la topología de Vietoris [8, Sect. 4.F, 4.30]). Se sigue que

Proposición 9. *Sea Y polaco. La familia $\mathcal{F}_{=k}$ de los subconjuntos de Y de cardinal igual a k es medible en $\mathcal{F}(Y)$.* \square

Corolario 10. *Supongamos que $T : S \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ es medible, y existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|T(x)| = n$ para todo $x \in S$. Entonces, hay mapas Borel $g_j : S \rightarrow Y$ tales que $T(x) = \{g_j(x) : 0 \leq j < n\}$ para todo $x \in S$ con $T(x) \neq \emptyset$.*

Demostración. Por inducción sobre $n \geq 1$. Defina $g_0 := d_0 \circ T$ (por lo tanto $g_0(x) \in T(x)$ para todo $x \in S$) y sea $H(x) := T(x) \setminus \{g_0(x)\}$. Aplicando el Lema 8 para g_0 y H , concluimos que H es medible, y el resultado se sigue por hipótesis inductiva. \square

Lema 11. *Sean S y U espacios polacos, Σ y Υ sus respectivas σ -álgebra de Borel y sea T una relación estocástica no determinista entre (S, Σ) y (U, Υ) tal*

que todos los conjuntos $T(s)$ tienen cardinal constante e igual a $n \in \mathbb{N}$. Entonces existen n mapas $\tau^{(j)} : S \times \Upsilon \rightarrow [0, 1]$ (con $0 \leq j < n$) tales que para todo $s \in S$,

$$T(s) = \{\tau^{(j)}(s, \cdot) \mid 0 \leq j < n\},$$

y $\tau^{(j)}(\cdot, Q) : S \rightarrow U$ es una función medible para todo $Q \in \Upsilon$.

Las $\tau^{(j)}$ de la conclusión son las llamadas *relaciones estocásticas* “a secas” (deterministas) entre S y U .

Demostración. Consideremos una topología polaca sobre $Y := \text{SubP}(U)$ de manera que su espacio de Borel coincida con el generado por los conjuntos $\beta(>q, Q)$. Ahora, T resulta ser un mapa Borel de S a $\mathcal{F}(Y)$, puesto todo conjunto finito es cerrado. Aplicando entonces el Corolario 10, obtenemos una familia de mapas Borel $\{g_j \mid 0 \leq j < n\}$ de S a $\text{SubP}(U)$. Pero entonces se puede verificar fácilmente que los mapas $\tau^{(j)}$ definidos como

$$\tau^{(j)}(s, Q) := g_j(s)(Q) \quad (0 \leq j < n)$$

satisfacen la conclusión del teorema. \square

Teorema 12. *Sea S un espacio polaco, Σ su σ -álgebra de Borel y $(S, \Sigma, \{T_a \mid a \in L\})$ un NLMP tal que para todos los conjuntos $T_a(s)$ tienen cardinal constante e igual a $n \in \mathbb{N}$. Entonces existen n LMPs*

$$\mathbb{S}^{(j)} = (S, \Sigma, \{\tau_a^{(j)} \mid a \in L\})$$

tales que para todo $s \in S$,

$$T_a(s) = \{\tau_a^{(j)}(s, \cdot) \mid 0 \leq j < n\}.$$

Demostración. Como se puede operar para cada etiqueta a independientemente, el resultado es consecuencia directa del Lema 11 para $U := S$. \square

Teorema 13. *La conclusión Teorema 12 vale aún si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que los conjuntos $T_a(s)$ son no vacíos y solamente tienen cardinal a lo sumo n .*

Demostración. De igual modo a la prueba Teorema 12, consideramos el caso de un único kernel T , y tomando $Y := \text{SubP}(S)$, $T : S \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ es medible y por ende los conjuntos $S_k := T^{-1}(\mathcal{F}_{=k})$ ($1 \leq k \leq n$) forman una partición medible de S por la Proposición 9. Podemos entonces restringir el núcleo T a cada uno de los S_k y obtenemos relaciones estocásticas no deterministas T_k entre $(S_k, \Sigma \upharpoonright S_k)$ y (S, Σ) ; además, $T_k(s)$ tiene cardinal exactamente k para todo $s \in S_k$. Notemos además que cada $(S_k, \Sigma \upharpoonright S_k)$ es estándar [8, Cor. 13.4]; podemos entonces aplicar el Lema 11 a ellos, obteniendo mapas

$$\tau_k^{(j)} : S_k \times \Sigma \rightarrow [0, 1] \quad (0 \leq j < k)$$

tales que $\tau_k^{(j)}(\cdot, Q)$ es $(\Sigma \upharpoonright S_k)$ - Σ -medible para cada j y $T_k(s) = \{\tau^{(j)}(s, \cdot) \mid 0 \leq j < n\}$ para cada $s \in S_k$. Finalmente, podemos definir los núcleos $\tau^{(j)}$ ($0 \leq j < n$) requeridos para T de la siguiente manera:

$$\tau^{(j)}(s, Q) := \tau_k^{(\min\{j, k-1\})}(s, Q) \quad \text{si } s \in S_k.$$

Al estar definida por partes mediante una familia contable de funciones medibles con dominios medibles, los $\tau^{(j)}$ resultan núcleos de Markov y tenemos la conclusión. \square

Los procesos $\mathbb{S}^{(j)}$ de los últimos dos teoremas proveen de una planificación que recorre todos los comportamientos probabilistas del NLMP dado, con el agregado de que bajo las hipótesis del Teorema 12, lo hacen “sin repetición”.

Agradecimiento Agradezco a Inés Armendáriz (Universidad de Buenos Aires) por una discusión sobre este problema que involucró la Proposición 7.

Referencias

- [1] R. BLUTE, J. DESHARNAIS, A. EDALAT, P. PANANGADEN, Bisimulation for labelled markov processes, en: Proceedings of the 12th Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science, LICS '97, IEEE Computer Society, USA (1997) 149.
- [2] P. CELAYES, “Procesos de Markov Etiquetados sobre Espacios de Borel Estándar”, Trabajo Final, FaMAF, Universidad Nacional de Córdoba (2006). Disponible en https://www.researchgate.net/publication/385242881_Trabajo_Final_Procesos_de_Markov_Etiquetados_sobre_Espacios_Borel_Estandar#fullTextFileContent.
- [3] P.R. D'ARGENIO, P. SÁNCHEZ TERRAF, N. WOLOVICK, Bisimulations for non-deterministic labelled Markov processes, *Mathematical Structures in Comp. Sci.* **22** (2012) 43–68.
- [4] J. DESHARNAIS, “Labelled Markov Processes”, Tesis doctoral, McGill University (1999).
- [5] E.E. DOBERKAT, “Stochastic Relations: Foundations for Markov Transition Systems”, Taylor & Francis (2007).
- [6] E.E. DOBERKAT, “Special Topics in Mathematics for Computer Scientists”, Springer Cham (2015).
- [7] E.E. DOBERKAT, P. SÁNCHEZ TERRAF, Stochastic nondeterminism and effectivity functions, *Journal of Logic and Computation* **27** (2017) 357–394.
- [8] A.S. KECHRIS, “Classical Descriptive Set Theory”, Graduate Texts in Mathematics **156**, Springer-Verlag (1994).
- [9] J. PACHL, P. SÁNCHEZ TERRAF, Semipullbacks of labelled Markov processes, *Logical Methods in Computer Science* **17** (2021).

- [10] P. PANANGADEN, “Labelled Markov Processes”, Imperial College Press (2009).
- [11] P. SÁNCHEZ TERRAF, Measurable selections of a finite family of measures, MathOverflow (2015). <https://mathoverflow.net/q/211943> (versión: 2015-07-24).
- [12] P. SÁNCHEZ TERRAF, Bisimilarity is not Borel, *Mathematical Structures in Computer Science* **27** (2017) 1265–1284.
- [13] N. WOLOVICK, “Continuous Probability and Nondeterminism in Labeled Transition Systems”, Tesis doctoral, Universidad Nacional de Córdoba (2012). Disponible en <https://www.famaf.unc.edu.ar/documents/1134/DComp3.pdf>.