Grupo de Semántica Algebraica: Álgebra Universal y Lógica

Pedro Sánchez Terraf

CIEM-FaMAF — Universidad Nacional de Córdoba

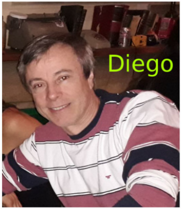
Jornada de Matemática FaMAF — UNC

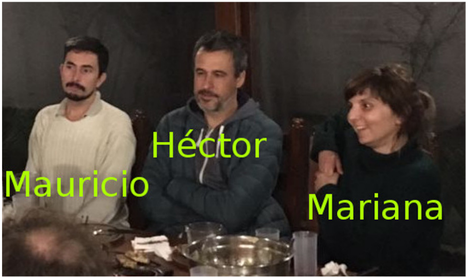
01 / 10 / 2018

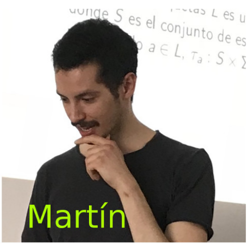
Universidad Nacional de Córdoba

1613 - 2013 400 AÑOS

La gente







UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Una dicotomía

Una dicotomía

¿Se puede? — ¿No se puede?

Una dicotomía

¿Se puede? — ¿No se puede?

La Lógica ha dado respuestas formidables del segundo tipo pero también contribuye al primero.

Una dicotomía

¿Se puede? — ¿No se puede?

La Lógica ha dado respuestas formidables del segundo tipo pero también contribuye al primero.

Las imposibilidades vienen con **ejemplos** y **construcciones**.

Ejemplos (Álgebra)

Grupos, anillos y módulos se pueden describir con ecuaciones.

Para cuerpos, es necesario usar una condición extra:

$$\color{red}{x \neq 0} \implies x \cdot x^{-1} = 1.$$

Ejemplos (Álgebra)

Grupos, anillos y módulos se pueden describir con ecuaciones.
Para cuerpos, es necesario usar una condición extra:

$$x \neq 0 \implies x \cdot x^{-1} = 1.$$

No se puede describir a los cuerpos con ecuaciones.

Ejemplos (Álgebra)

Grupos, anillos y módulos se pueden describir con ecuaciones.
Para cuerpos, es necesario usar una condición extra:

$$x \neq 0 \implies x \cdot x^{-1} = 1.$$

No se puede describir a los cuerpos con ecuaciones.

Se puede caracterizar a quienes sí se describen con ecuaciones.

Teorema (Birkhoff)

Una clase de estructuras se describe con ecuaciones si y sólo si es cerrada por homomorfismos, subestructuras y productos directos.

Ejemplos (Álgebra)

Grupos, anillos y módulos se pueden describir con ecuaciones.
Para cuerpos, es necesario usar una condición extra:

$$x \neq 0 \implies x \cdot x^{-1} = 1.$$

No se puede describir a los cuerpos con ecuaciones.

Se puede caracterizar a quienes sí se describen con ecuaciones.

Teorema (Birkhoff)

Una clase de estructuras se describe con ecuaciones si y sólo si es cerrada por homomorfismos, subestructuras y productos directos.

¡$(0,1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$!

Sabemos que un **conjunto minimal de generadores** (CMG) de un espacio vectorial de dimensión finita (= finitamente generado) es base. Luego si un CMG de un espacio vectorial es finito, todos tienen el mismo tamaño.

Ejemplos (Álgebra)

Sabemos que un **conjunto minimal de generadores** (CMG) de un espacio vectorial de dimensión finita (= finitamente generado) es base. Luego si un CMG de un espacio vectorial es finito, todos tienen el mismo tamaño.
En cambio, para grupos no es cierto: $\mathbb{Z}_6 = \langle 1 \rangle = \langle 2, 3 \rangle$. Es decir, los tamaños posibles son 1 y 2.

Ejemplos (Álgebra)

Sabemos que un **conjunto minimal de generadores** (CMG) de un espacio vectorial de dimensión finita (= finitamente generado) es base. Luego si un CMG de un espacio vectorial es finito, todos tienen el mismo tamaño.
En cambio, para grupos no es cierto: $\mathbb{Z}_6 = \langle 1 \rangle = \langle 2, 3 \rangle$. Es decir, los tamaños posibles son 1 y 2.

Se puede tener más información de los tamaños.

Ejemplos (Álgebra)

Sabemos que un **conjunto minimal de generadores** (CMG) de un espacio vectorial de dimensión finita (= finitamente generado) es base. Luego si un CMG de un espacio vectorial es finito, todos tienen el mismo tamaño.
En cambio, para grupos no es cierto: $\mathbb{Z}_6 = \langle 1 \rangle = \langle 2, 3 \rangle$. Es decir, los tamaños posibles son 1 y 2.

Se puede tener más información de los tamaños.

Teorema (Tarski)

Para una estructura con operaciones binarias o unarias, finitamente generada, los tamaños posibles de los CMG son un intervalo de los naturales.

Ejemplos (Aritmética)

Décimo problema de Hilbert: ¿hay algún algoritmo que, dado un polinomio p en varias variables a coeficientes enteros, decide si $p = 0$ tiene solución entera?

Ejemplos (Aritmética)

Décimo problema de Hilbert: ¿hay algún algoritmo que, dado un polinomio p en varias variables a coeficientes enteros, decide si $p = 0$ tiene solución entera?

Ejemplo

- $x^2 - 4y - 1 = 0$.
- $x^2 - 4y - 2 = 0$.
- $x^{2019} + y^{2019} - z^{2019} = 0$.

Ejemplos (Aritmética)

Décimo problema de Hilbert: ¿hay algún algoritmo que, dado un polinomio p en varias variables a coeficientes enteros, decide si $p = 0$ tiene solución entera?

Ejemplo

- $x^2 - 4y - 1 = 0$.
- $x^2 - 4y - 2 = 0$.
- $x^{2019} + y^{2019} - (u^2 + v^2 + w^2 + t^2 + 2)^{2019} = 0$.

Ejemplos (Aritmética)

Décimo problema de Hilbert: ¿hay algún algoritmo que, dado un polinomio p en varias variables a coeficientes enteros, decide si $p = 0$ tiene solución entera?

Ejemplo

- $x^2 - 4y - 1 = 0$.
- $x^2 - 4y - 2 = 0$.
- $x^{2019} + y^{2019} - (u^2 + v^2 + w^2 + t^2 + 2)^{2019} = 0$.

No se puede. No hay un algoritmo así.

Ejemplos (Aritmética)

Décimo problema de Hilbert: ¿hay algún algoritmo que, dado un polinomio p en varias variables a coeficientes enteros, decide si $p = 0$ tiene solución entera?

Ejemplo

- $x^2 - 4y - 1 = 0$.
- $x^2 - 4y - 2 = 0$.
- $x^{2019} + y^{2019} - (u^2 + v^2 + w^2 + t^2 + 2)^{2019} = 0$.

No se puede. No hay un algoritmo así.

Teorema (D**M**PR)

*Hay un $p(x_0, x_1, x_2, \dots, x_k)$ tal que para todo conjunto **enumerable** A hay un n con*

$$A = \{a \in \mathbb{N} : p(a, n, x_2, \dots, x_k) = 0 \text{ tiene solución entera}\}$$

Problemas de Clasificación

Se habla en general de problemas **mansos** y **salvajes**.
Si es un problema de clasificar estructuras a más de isomorfismo, será manso si tengo un conjunto de *invariantes* manejables que me caractericen completamente aquéllas.

Problemas de Clasificación

Se habla en general de problemas **mansos** y **salvajes**.
Si es un problema de clasificar estructuras a más de isomorfismo, será manso si tengo un conjunto de *invariantes* manejables que me caractericen completamente aquéllas.

Reducción

$$\mathbf{A} \cong \mathbf{B} \qquad \leftrightsquigarrow \qquad (a_1, a_2, \dots) = (b_1, b_2, \dots)$$

Ejemplo

Curvas C^∞ definidas en $[0,1]$: $\qquad a_1 :=$ longitud.

Ejemplos (Clasificación, en general)

- Superficies compactas orientables sin borde: $a_1 := \#\{\text{agujeros}\}$.

Ejemplos (Clasificación, en general)

- Superficies compactas orientables sin borde: $a_1 := \#\{\text{agujeros}\}$.
- Ídem, $\dim = 4$: **no se puede**. Obstrucción computable.

Ejemplos (Clasificación, en general)

- Superficies compactas orientables sin borde: $a_1 := \#\{\text{agujeros}\}$.
- Ídem, $\dim = 4$: **no se puede**. Obstrucción computable.
- Problema de conjuntos de unicidad (Análisis de Fourier).

Ejemplos (Clasificación, en general)

- Superficies compactas orientables sin borde: $a_1 := \#\{\text{agujeros}\}$.
- Ídem, $\dim = 4$: **no se puede**. Obstrucción computable.
- Problema de conjuntos de unicidad (Análisis de Fourier).
- Igualdad de comportamiento de sistemas discretos contables (Computación).

Ejemplos (Clasificación, en general)

- Superficies compactas orientables sin borde: $a_1 := \#\{\text{agujeros}\}$.
- Ídem, $\dim = 4$: **no se puede**. Obstrucción computable.
- Problema de conjuntos de unicidad (Análisis de Fourier).
- Igualdad de comportamiento de sistemas discretos contables (Computación).

Teoría de Conjuntos Descriptiva

Estudia la complejidad de conjuntos y relaciones (viz., isomorfismo) y prueba la existencia de jerarquías propias.

Ejemplos (Topología)

La recta es el único conjunto totalmente ordenado (**orden total**) sin extremos, que cumple con el axioma de supremo (**completo**) y que tiene un denso numerable (**separable**).

La recta es el único conjunto totalmente ordenado (**orden total**) sin extremos, que cumple con el axioma de supremo (**completo**) y que tiene un denso numerable (**separable**).
Un orden total separable cumple con la condición de cadenas contables (**ccc**): *Toda familia de intervalos abiertos disjuntos es contable.*

Ejemplos (Topología)

La recta es el único conjunto totalmente ordenado (**orden total**) sin extremos, que cumple con el axioma de supremo (**completo**) y que tiene un denso numerable (**separable**).

Un orden total separable cumple con la condición de cadenas contables (**ccc**): *Toda familia de intervalos abiertos disjuntos es contable.*

Problema (Suslin, 1917)

¿Es la recta el único orden total completo sin extremos con la ccc?

Ejemplos (Topología)

La recta es el único conjunto totalmente ordenado (**orden total**) sin extremos, que cumple con el axioma de supremo (**completo**) y que tiene un denso numerable (**separable**).

Un orden total separable cumple con la condición de cadenas contables (**ccc**): *Toda familia de intervalos abiertos disjuntos es contable.*

Problema (Suslin, 1917)

¿Es la recta el único orden total completo sin extremos con la ccc?

No se puede resolver este problema.

Ejemplos (Topología)

La recta es el único conjunto totalmente ordenado (**orden total**) sin extremos, que cumple con el axioma de supremo (**completo**) y que tiene un denso numerable (**separable**).

Un orden total separable cumple con la condición de cadenas contables (**ccc**): *Toda familia de intervalos abiertos disjuntos es contable.*

Problema (Suslin, 1917)

¿Es la recta el único orden total completo sin extremos con la ccc?

No se puede resolver este problema.

Ejemplos (Topología)

La recta es el único conjunto totalmente ordenado (**orden total**) sin extremos, que cumple con el axioma de supremo (**completo**) y que tiene un denso numerable (**separable**).
Un orden total separable cumple con la condición de cadenas contables (**ccc**): *Toda familia de intervalos abiertos disjuntos es contable.*

Problema (Suslin, 1917)

¿Es la recta el único orden total completo sin extremos con la ccc?

No se puede resolver este problema.

Forcing (Cohen, 1963)

Herramienta para la construcción de modelos de la Teoría de Conjuntos ("de la Matemática").

Cursos ofrecidos

La optativa

Lógica, compartida con la Licenciatura en Computación. Segundo cuatrimestre.

Varias especialidades no la tienen como correlativa, pero sus contenidos son requisito para cualquier trabajo serio en el grupo.

Especialidades

- **Miguel**: Complejidad Computacional (2019).
- **Diego**: A pedido (dvaggione@gmail.com).
- **PST**: T. de Conjuntos (1er C. 2019), T. de Ramsey (2020??). A pedido.

Para más información

- Nuestra web: **`ual.famaf.unc.edu.ar`**.
- Facebook: **Universal Algebra & Logic Research Group**.
- Mi nombre completo en **Google** (presentación del año pasado).

Universidad Nacional de Córdoba
1613 - 2013 400 AÑOS

Para más información

- Nuestra web: **`ual.famaf.unc.edu.ar`**.
- Facebook: **Universal Algebra & Logic Research Group**.
- Mi nombre completo en **Google** (presentación del año pasado).

¡Gracias!