Conjunteoría en Córdoba

P. Sánchez Terraf[1]

CIEM-FaMAF — Universidad Nacional de Córdoba

40 Aniversario del CIEM
Academia Nacional de Ciencias, 30 / 06 / 2023

[1]Con apoyo de CONICET y SeCyT-UNC

¿"Conjunteoría"?

¿"Conjunteoría"?

- Mengenlehre ✓

¿“Conjunteoría”?

- Mengenlehre ✓
- Set theory ✓

¿"Conjunteoría"?

- Mengenlehre ✓
- Set theory ✓
- Teoría de (los) conjuntos ?w?t?

¿“Conjunteoría”?

- Mengenlehre ✓
- Set theory ✓
- Teoría de (los) conjuntos ?w?t?

Advertencia

Daré una perspectiva modernizada de los primeros conceptos y resultados

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

¿“Conjunteoría”?

- Mengenlehre ✓
- Set theory ✓
- Teoría de (los) conjuntos ?w?t?

Advertencia

Daré una perspectiva modernizada de los primeros conceptos y resultados (Dicho sin eufemismos: no tendré ningún respeto con la historia).

La manzana en el Jardín

El **Problema del Continuo** consiste en ubicar $|\mathbb{R}|$ entre los cardinales infinitos.

La manzana en el Jardín

El **Problema del Continuo** consiste en ubicar $|\mathbb{R}|$ entre los cardinales infinitos.

Hipótesis del Continuo CH

- $|\mathbb{R}|$ es el primer cardinal incontable ($\aleph_1$).
- No existe $X \subseteq \mathbb{R}$ tal que $|\mathbb{N}| < |X| < |\mathbb{R}|$.
- Si $X \subseteq \mathbb{R}$ es incontable, existe $f : \mathbb{R} \xhookrightarrow{\text{1-1}} X$.

La manzana en el Jardín

El **Problema del Continuo** consiste en ubicar $|\mathbb{R}|$ entre los cardinales infinitos.

Hipótesis del Continuo CH

- $|\mathbb{R}|$ es el primer cardinal incontable ($\aleph_1$).
- No existe $X \subseteq \mathbb{R}$ tal que $|\mathbb{N}| < |X| < |\mathbb{R}|$.
- Si $X \subseteq \mathbb{R}$ es incontable, existe $f : \mathbb{R} \xhookrightarrow{\text{1-1}} X$.

Estrategia

- Elegir algún $\mathcal{C}$ versátil tal que $\mathbb{R} \xhookrightarrow[\text{sobre}]{\text{1-1}} \mathcal{C} \xhookrightarrow{\text{1-1}} X$.

Universidad Nacional de Córdoba UNC 1613 - 2013 400 AÑOS

La manzana en el Jardín

El **Problema del Continuo** consiste en ubicar $|\mathbb{R}|$ entre los cardinales infinitos.

Hipótesis del Continuo CH

- $|\mathbb{R}|$ es el primer cardinal incontable ($\aleph_1$).
- No existe $X \subseteq \mathbb{R}$ tal que $|\mathbb{N}| < |X| < |\mathbb{R}|$.
- Si $X \subseteq \mathbb{R}$ es incontable, existe $f : \mathbb{R} \xhookrightarrow{\text{1-1}} X$.

Estrategia

I. Elegir algún $\mathcal{C}$ versátil tal que $\mathbb{R} \xrightarrow[\text{sobre}]{\text{1-1}} \mathcal{C} \xhookrightarrow{\text{1-1}} X$.
II. Considerar X en grado creciente de "complejidad topológica".

Cerrados satisfacen CH

- Elegir algún $\mathcal{C}$ versátil tal que $\mathbb{R} \xrightarrow[\text{sobre}]{\text{1-1}} \mathcal{C} \xhookrightarrow{\text{1-1}} X$.

Cerrados satisfacen CH

- Elegir algún $\mathcal{C}$ versátil tal que $\mathbb{R} \xhookrightarrow[\text{sobre}]{\text{1-1}} \mathcal{C} \xhookrightarrow{\text{1-1}} X$.

$P \subseteq \mathbb{R}$ es **perfecto** $\iff P = P' := \{$ puntos de acumulación de $P\}$.

Cerrados satisfacen CH

- Elegir algún $\mathcal{C}$ versátil tal que $\mathbb{R} \underset{\text{sobre}}{\overset{\text{1-1}}{\hookrightarrow\!\!\!\!\twoheadrightarrow}} \mathcal{C} \overset{\text{1-1}}{\hookrightarrow} X$.

$P \subseteq \mathbb{R}$ es **perfecto** $\iff P = P' := \{$ puntos de acumulación de P $\}$.

Teorema

1. *Si $P \subseteq \mathbb{R}$ es perfecto, $|P| = |\mathbb{R}|$.*
2. *Todo cerrado incontable incluye un conjunto perfecto.*

Cerrados satisfacen CH

- Elegir algún $\mathcal{C}$ versátil tal que $\mathbb{R} \xhookrightarrow[\text{sobre}]{\text{1-1}} \mathcal{C} \xhookrightarrow{\text{1-1}} X$.

$P \subseteq \mathbb{R}$ es **perfecto** $\iff P = P' := \{$ puntos de acumulación de P $\}$.

Teorema

1. *Si $P \subseteq \mathbb{R}$ es perfecto, $|P| = |\mathbb{R}|$.*
2. *Todo cerrado incontable incluye un conjunto perfecto.*

Corolario

No hay contraejemplo cerrado a la Hipótesis del Continuo.

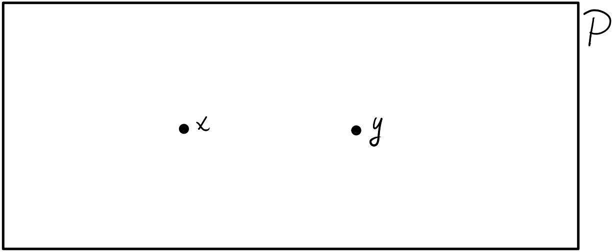
Corolario (Ejercicio)

Todo conjunto de medida interior de Lebesgue positiva tiene cardinal $|\mathbb{R}|$.

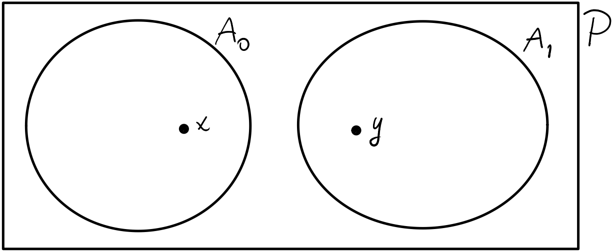
Perfectos tienen el cardinal del continuo

P

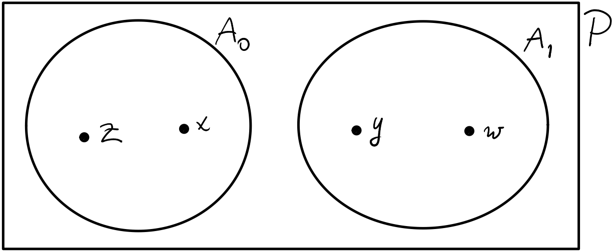
Perfectos tienen el cardinal del continuo



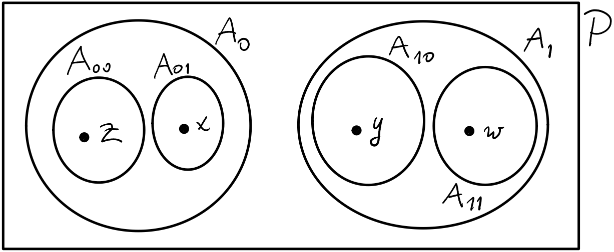
Perfectos tienen el cardinal del continuo



Perfectos tienen el cardinal del continuo



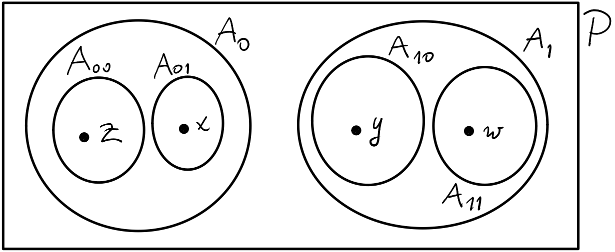
Perfectos tienen el cardinal del continuo



Esquema de Cantor

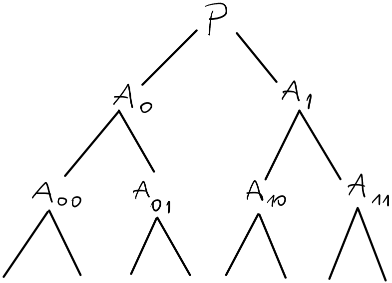
- $A_0 \cap A_1 = \varnothing$;
- $\overline{A_{00}}, \overline{A_{01}} \subseteq A_0$;
- diám $A_{b_1 b_2 \dots b_n} < \frac{1}{2^n}$.

Perfectos tienen el cardinal del continuo

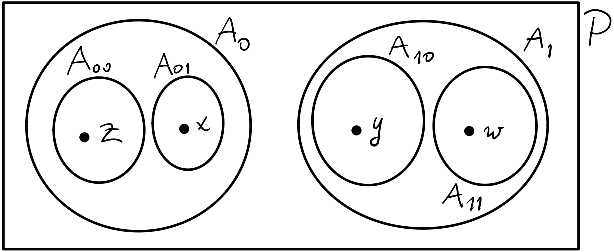


Esquema de Cantor

- $A_0 \cap A_1 = \varnothing$;
- $\overline{A_{00}}, \overline{A_{01}} \subseteq A_0$;
- diám $A_{b_1 b_2 \dots b_n} < \frac{1}{2^n}$.

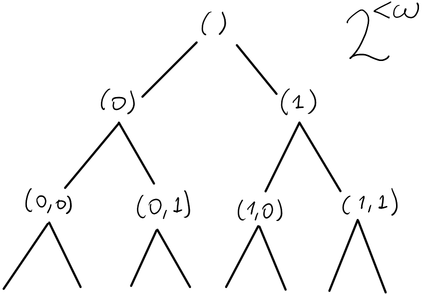


Perfectos tienen el cardinal del continuo

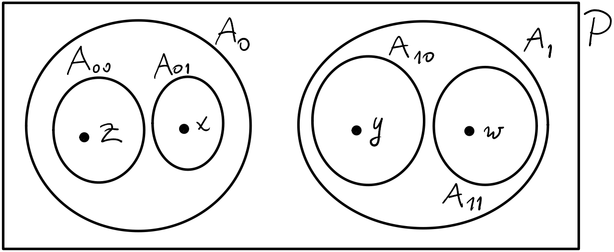


Esquema de Cantor

- $A_0 \cap A_1 = \varnothing$;
- $\overline{A_{00}}, \overline{A_{01}} \subseteq A_0$;
- diám $A_{b_1 b_2 \ldots b_n} < \frac{1}{2^n}$.

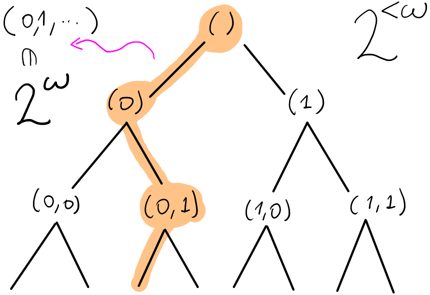


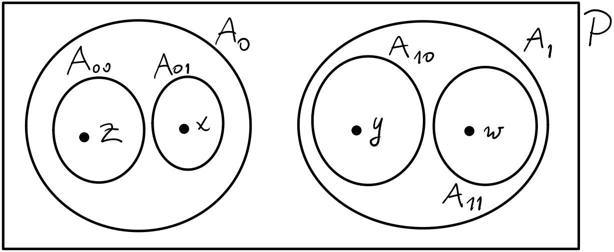
Perfectos tienen el cardinal del continuo



Esquema de Cantor

- $A_0 \cap A_1 = \varnothing$;
- $\overline{A_{00}}, \overline{A_{01}} \subseteq A_0$;
- $\text{diám}\, A_{b_1 b_2 \ldots b_n} < \frac{1}{2^n}$.

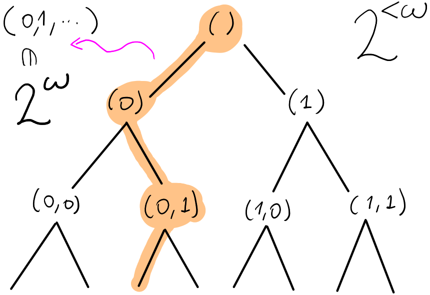




Esquema de Cantor

- $A_0 \cap A_1 = \varnothing$;
- $\overline{A_{00}}, \overline{A_{01}} \subseteq A_0$;
- diám $A_{b_1 b_2 \dots b_n} < \frac{1}{2^n}$.

$$e : 2^\omega \longrightarrow P$$
$$x \longmapsto \bigcap_n A_{x \restriction n} \qquad \text{continua!}$$



Ubicuidad de $\mathcal{C} := 2^\omega$

Esta elección de $\mathcal{C}$ es muy eficiente: sirve incluso para todo boreliano de $\mathbb{R}$:

Teorema (Alexandroff, Hausdorff)

Si $B \subseteq \mathbb{R}$ es incontable y Borel entonces $\mathcal{C} \xhookrightarrow{\text{cont.}} B$.

Ubicuidad de $\mathcal{C} := 2^\omega$

Esta elección de $\mathcal{C}$ es muy eficiente: sirve incluso para todo boreliano de $\mathbb{R}$:

Teorema (Alexandroff, Hausdorff)

Si $B \subseteq \mathbb{R}$ es incontable y Borel entonces $\mathcal{C} \xhookrightarrow{\text{cont.}} B$.

Sin embargo,

Conjunto de Bernstein

Es incontable y no incluye a ningún conjunto perfecto.

Su construcción requiere AC de manera esencial.

En busca de la perfección

2. Todo cerrado incontable incluye un conjunto perfecto.

En busca de la perfección

2. Todo cerrado incontable incluye un conjunto perfecto.

Sea C cerrado incontable.

En busca de la perfección

2. Todo cerrado incontable incluye un conjunto perfecto.

Sea C cerrado incontable.

$$C \longmapsto C'$$

En busca de la perfección

2. Todo cerrado incontable incluye un conjunto perfecto.

Sea C cerrado incontable.

$$C \longmapsto C' \longmapsto C''$$

En busca de la perfección

2 Todo cerrado incontable incluye un conjunto perfecto.

Sea C cerrado incontable.

$$C \longmapsto C' \longmapsto C'' \longmapsto C''' \longmapsto \cdots$$

En busca de la perfección

2. Todo cerrado incontable incluye un conjunto perfecto.

Sea C cerrado incontable.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
C & \longmapsto & C' & \longmapsto & C'' & \longmapsto & C''' & \longmapsto & \cdots & \longmapsto & \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} C^{(n)} \\
C^{(0)} & & C^{(1)} & & C^{(2)} & & C^{(3)} & & \cdots & &
\end{array}
$$

En busca de la perfección

2. Todo cerrado incontable incluye un conjunto perfecto.

Sea C cerrado incontable.

$$C \longmapsto C' \longmapsto C'' \longmapsto C''' \longmapsto \cdots \longmapsto \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} C^{(n)}$$

$$C^{(0)} \qquad C^{(1)} \qquad C^{(2)} \qquad C^{(3)} \qquad \cdots \qquad C^{(\infty)}$$

- ¿Es $C^{(\infty)}$ perfecto?

En busca de la perfección

2 Todo cerrado incontable incluye un conjunto perfecto.

Sea C cerrado incontable.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
C & \longmapsto & C' & \longmapsto & C'' & \longmapsto & C''' & \longmapsto & \cdots & \longmapsto & \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} C^{(n)} \\
C^{(0)} & & C^{(1)} & & C^{(2)} & & C^{(3)} & & \cdots & & C^{(\infty)}
\end{array}
$$

- ¿Es $C^{(\infty)}$ perfecto? No necesariamente.

2. Todo cerrado incontable incluye un conjunto perfecto.

Sea C cerrado incontable.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
C & \longmapsto & C' & \longmapsto & C'' & \longmapsto & C''' & \longmapsto & \cdots & \longmapsto & \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} C^{(n)} & \color{red}{\longmapsto} & \color{red}{\left(C^{(\infty)}\right)'} & \color{red}{\longmapsto} & \color{red}{\cdots} \\
C^{(0)} & & C^{(1)} & & C^{(2)} & & C^{(3)} & & \cdots & & C^{(\infty)} & & & &
\end{array}
$$

- ¿Es $C^{(\infty)}$ perfecto? No necesariamente.
- ¿Cuántas veces más hay que iterar la operación?

En busca de la perfección

2. Todo cerrado incontable incluye un conjunto perfecto.

Sea C cerrado incontable.

$$\begin{array}{ccccccccccccc} C & \longmapsto & C' & \longmapsto & C'' & \longmapsto & C''' & \longmapsto & \cdots & \longmapsto & \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} C^{(n)} & \longmapsto & \left(C^{(\infty)}\right)' \longmapsto \cdots \\ C^{(0)} & & C^{(1)} & & C^{(2)} & & C^{(3)} & & \cdots & & C^{(\infty)} & & \end{array}$$

- ¿Es $C^{(\infty)}$ perfecto? No necesariamente.
- ¿Cuántas veces más hay que iterar la operación? Contables.

En busca de la perfección

2 Todo cerrado incontable incluye un conjunto perfecto.

Sea C cerrado incontable.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
C & \longmapsto & C' & \longmapsto & C'' & \longmapsto & C''' & \longmapsto & \cdots & \longmapsto & \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} C^{(n)} & \longmapsto & \left(C^{(\infty)}\right)' & \longmapsto & \cdots \\
C^{(0)} & & C^{(1)} & & C^{(2)} & & C^{(3)} & & \cdots & & C^{(\infty)} & & C^{(\infty+1)} & & \cdots
\end{array}
$$

- ¿Es $C^{(\infty)}$ perfecto? No necesariamente.
- ¿Cuántas veces más hay que iterar la operación? Contables.
- ¿Los índices de la construcción?

2 Todo cerrado incontable incluye un conjunto perfecto.

Sea C cerrado incontable.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} C & \longmapsto & C' & \longmapsto & C'' & \longmapsto & C''' & \longmapsto & \cdots & \longmapsto & \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} C^{(n)} & \longmapsto & \left(C^{(\infty)}\right)' & \longmapsto & \cdots \\ C^{(0)} & & C^{(1)} & & C^{(2)} & & C^{(3)} & & \cdots & & C^{(\infty)} & & C^{(\infty+1)} & & \cdots \end{array}$$

- ¿Es $C^{(\infty)}$ perfecto? No necesariamente.
- ¿Cuántas veces más hay que iterar la operación? Contables.
- ¿Los índices de la construcción? **Un conjunto bien ordenado**.

Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Buenos órdenes…

Todo subconjunto no vacío tiene elemento mínimo.

Ejemplo

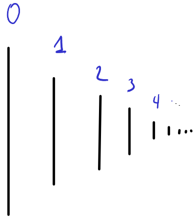
- $\omega := \langle \mathbb{N}_0, < \rangle$.

Buenos órdenes...

Todo subconjunto no vacío tiene elemento mínimo.

Ejemplo

- $\omega := \langle \mathbb{N}_0, < \rangle$.

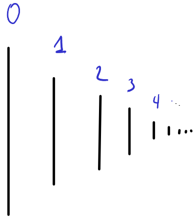


Buenos órdenes…

Todo subconjunto no vacío tiene elemento mínimo.

Ejemplo

- $\omega := \langle \mathbb{N}_0, < \rangle$.
- $\omega + 1 := \langle \mathbb{N}_0, < \rangle \oplus \{\infty\}$
  $:= \langle \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}, <' \rangle$.

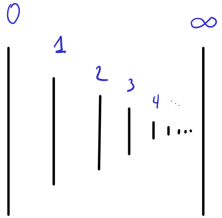


Buenos órdenes. . .

Todo subconjunto no vacío tiene elemento mínimo.

Ejemplo

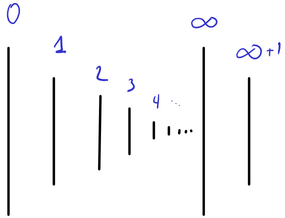
- $\omega := \langle \mathbb{N}_0, < \rangle$.
- $\omega + 1 := \langle \mathbb{N}_0, < \rangle \oplus \{\infty\}$
  $:= \langle \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}, <' \rangle$.



Todo subconjunto no vacío tiene elemento mínimo.

Ejemplo

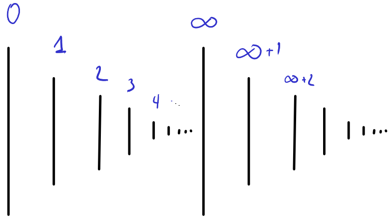
- $\omega := \langle \mathbb{N}_0, < \rangle$.
- $\omega + 1 := \langle \mathbb{N}_0, < \rangle \oplus \{\infty\}$
  $:= \langle \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}, <' \rangle$.
- $\omega + 2 := \langle \mathbb{N}_0, < \rangle \oplus \{\infty, \infty + 1\}$.
- . . .



Todo subconjunto no vacío tiene elemento mínimo.

Ejemplo

- $\omega := \langle \mathbb{N}_0, < \rangle$.
- $\omega + 1 := \langle \mathbb{N}_0, < \rangle \oplus \{\infty\}$
  $:= \langle \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}, <' \rangle$.
- $\omega + 2 := \langle \mathbb{N}_0, < \rangle \oplus \{\infty, \infty + 1\}$.
- $\dots$
- $\omega + \omega := \langle \mathbb{N}_0, < \rangle \oplus \langle \mathbb{N}_0, < \rangle$.
- $\dots$

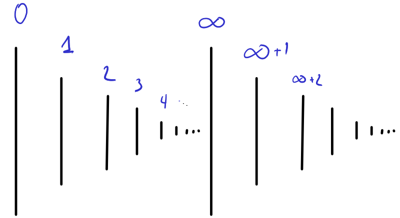


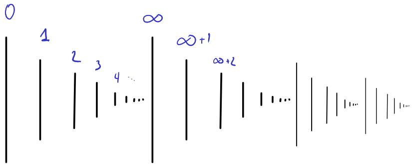
Buenos órdenes…

Todo subconjunto no vacío tiene elemento mínimo.

Ejemplo

- $\omega := \langle \mathbb{N}_0, < \rangle$.
- $\omega + 1 := \langle \mathbb{N}_0, < \rangle \oplus \{\infty\}$
  $:= \langle \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}, <' \rangle$.
- $\omega + 2 := \langle \mathbb{N}_0, < \rangle \oplus \{\infty, \infty + 1\}$.
- …
- $\omega + \omega := \langle \mathbb{N}_0, < \rangle \oplus \langle \mathbb{N}_0, < \rangle$.
- …
- $\omega_1 :=$ menor buen orden incontable.





. . . y buen fundamento

Buen orden $\Longrightarrow$ Inducción & Recursión

. . . y buen fundamento

Buen orden $\implies$ Inducción & Recursión

Buena fundación

No hay sucesiones infinitas decrecientes.

. . . y buen fundamento

Buen orden $\implies$ Inducción & Recursión

Buena fundación

No hay sucesiones infinitas decrecientes.

- WO $:=$ clase de todos los buenos órdenes.
  $\preceq$ $:=$ relación de incrustación entre posets.

. . . y buen fundamento

Buen orden $\implies$ Inducción & Recursión

Buena fundación

No hay sucesiones infinitas decrecientes.

- WO $:=$ clase de todos los buenos órdenes.
  $\preceq$ $:=$ relación de incrustación entre posets.

  WO está bien ordenado (mód iso) por $\preceq$.

. . . y buen fundamento

Buen orden $\implies$ Inducción & Recursión

Buena fundación

No hay sucesiones infinitas decrecientes.

- WO $:=$ clase de todos los buenos órdenes.
  $\preceq$ $:=$ relación de incrustación entre posets.

  WO está bien ordenado (mód iso) por $\preceq$.
- Conj. (Fraïssé [1948]). $\langle$Órdenes totales contables, $\preceq\rangle$ es bien fundado.

Buen orden $\Longrightarrow$ Inducción & Recursión

Buena fundación

No hay sucesiones infinitas decrecientes.

- WO := clase de todos los buenos órdenes.
  $\preceq$:= relación de incrustación entre posets.

  WO está bien ordenado (mód iso) por $\preceq$.
- Conj. (Fraïssé [1948]). $\langle$Órdenes totales contables, $\preceq\rangle$ es bien fundado.
  Teorema (Laver [1971]). $\langle$Órdenes σ-dispersos, $\preceq\rangle$ es bien fundado.

. . . y buen fundamento

Buen orden $\Longrightarrow$ Inducción & Recursión

Buena fundación

No hay sucesiones infinitas decrecientes.

- WO $:=$ clase de todos los buenos órdenes.
  $\preceq$ $:=$ relación de incrustación entre posets.

  WO está bien ordenado (mód iso) por $\preceq$.
- Conj. (Fraïssé [1948]). $\langle$Órdenes totales contables, $\preceq\rangle$ es bien fundado.
  Teorema (Laver [1971]). $\langle$Órdenes σ-dispersos, $\preceq\rangle$ es bien fundado.
- **Teorema** (Moore [2006]). PFA implica que $\langle$Órdenes incontables, $\preceq\rangle$ tiene 5 elementos minimales (mód $\preceq \cap \succeq$): $\boxed{\omega_1, \omega_1, B, C, C^*}$.

. . . y buen fundamento

$$\text{Buen orden} \implies \text{Inducción \& Recursión}$$

Buena fundación

No hay sucesiones infinitas decrecientes.

- WO := clase de todos los buenos órdenes.
  $\preceq$:= relación de incrustación entre posets.

  WO está bien ordenado (mód iso) por $\preceq$.
- Conj. (Fraïssé [1948]). $\langle$Órdenes totales contables, $\preceq\rangle$ es bien fundado.
  Teorema (Laver [1971]). $\langle$Órdenes σ-dispersos, $\preceq\rangle$ es bien fundado.
- **Teorema** (Moore [2006]). PFA implica que $\langle$Órdenes incontables, $\preceq\rangle$ tiene 5 elementos minimales (mód $\preceq \cap \succeq$): $\boxed{\omega_1, \omega_1, B, C, C^*}$.

G. Figueroa (EVC 2022–2023): Estudio de árboles de Aronszajn y aplicaciones a κ-compacidad (Marun [2023]).

Conjunteoría descriptiva: clasificar conjuntos

(CH) Si $X \subseteq \mathbb{R}$ es incontable, existe $f : \mathbb{R} \xhookrightarrow{\text{1-1}} X$.

- II Considerar X en grado creciente de "complejidad topológica".

Conjunteoría descriptiva: clasificar conjuntos

(CH) Si $X \subseteq \mathbb{R}$ es incontable, existe $f : \mathbb{R} \xhookrightarrow{\text{1-1}} X$.

- Considerar X en grado creciente de "complejidad topológica".

Sean X, Y espacios topológicos, $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$.

Reducción continua

$A \leqslant_W B \iff$ existe $f : X \to Y$ continua tal que $A = f^{-1}(B)$.

Conjunteoría descriptiva: clasificar conjuntos

(CH) Si $X \subseteq \mathbb{R}$ es incontable, existe $f : \mathbb{R} \xhookrightarrow{\text{1-1}} X$.

- Considerar X en grado creciente de "complejidad topológica".

Sean X, Y espacios topológicos, $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$.

Reducción continua

$A \leqslant_W B \iff$ existe $f : X \to Y$ continua tal que $A = f^{-1}(B)$.

Motivación:

$$B \text{ simple} \implies f^{-1}(B) \text{ simple}$$

Conjunteoría descriptiva: clasificar conjuntos

(CH) Si $X \subseteq \mathbb{R}$ es incontable, existe $f : \mathbb{R} \xhookrightarrow{\text{1-1}} X$.

- II Considerar X en grado creciente de "complejidad topológica".

Sean X, Y espacios topológicos, $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$.

Reducción continua

$A \leqslant_W B \iff$ existe $f : X \to Y$ continua tal que $A = f^{-1}(B)$.

Motivación:

$$B \text{ simple} \implies f^{-1}(B) \text{ simple}$$

Teorema

- (Wadge, Martin) $\leqslant_W$ es bien fundada en espacios N_2 de dimensión 0.
- (Pequignot [2015]) Adaptación para subconjuntos Borel de un espacio polaco ($\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^\omega$,...).

Clasificando problemas de clasificación

Grupos abelianos contables

$\mathrm{AB}_{\mathbb{N}} :=$ grupos abelianos sobre $\mathbb{N}$.

Clasificando problemas de clasificación

Grupos abelianos contables

$\mathsf{AB}_{\mathbb{N}} :=$ grupos abelianos sobre $\mathbb{N}$.

Forman un espacio N_2 0-dimensional.

Clasificando problemas de clasificación

Grupos abelianos contables

$\mathsf{AB}_{\mathbb{N}} :=$ grupos abelianos sobre $\mathbb{N}$.

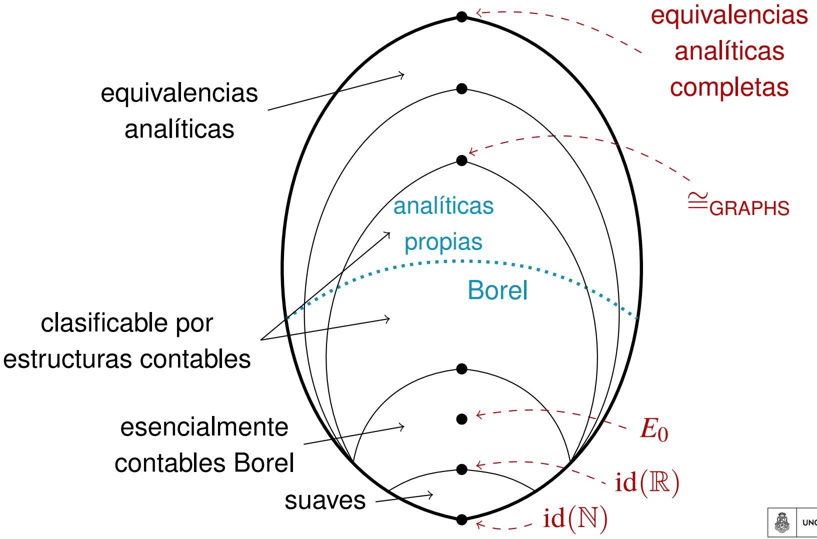
Forman un espacio N_2 0-dimensional.

Problema de clasificación

$(\cong) \subseteq \mathsf{AB}_{\mathbb{N}} \times \mathsf{AB}_{\mathbb{N}}$.

Clasificando problemas de clasificación

(De Motto Ros [2021])



Clasificando problemas de clasificación

Grupos abelianos contables

$\mathrm{AB}_{\mathbb{N}} :=$ grupos abelianos sobre $\mathbb{N}$.

Forman un espacio N_2 0-dimensional.

Problema de clasificación

$(\cong) \subseteq \mathrm{AB}_{\mathbb{N}} \times \mathrm{AB}_{\mathbb{N}}$.

Teorema (Paolini y Shelah [2023])

El problema de clasificación de los grupos abelianos sin torsión $\mathrm{TFAB}_{\mathbb{N}}$ tiene complejidad máxima.

Árboles y buena fundación

Sea L un orden total.

$T_L := \langle$Sucesiones decrecientes en $L, \sqsubset\rangle$

Sea L un orden total.
$T_L := \langle$Sucesiones decrecientes en $L, \sqsubset\rangle$

Ejemplo

Sea $\mathbf{3} = \langle\{0,1,2\}, <\rangle$. Entonces
$T_{\mathbf{3}}$ viene dado por:

$$
\begin{tikzcd}
 & (\,) \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[drr] & & \\
(0) & (1) \arrow[d] & & (2) \arrow[dl] \arrow[d] \\
 & (1,0) & (2,0) & (2,1) \arrow[d] \\
 & & & (2,1,0)
\end{tikzcd}
$$

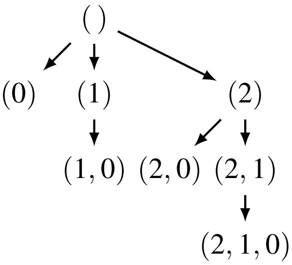
Árboles y buena fundación

Sea L un orden total.

$T_L := \langle$Sucesiones decrecientes en $L, \sqsubset\rangle$

Ejemplo

Sea $\mathbf{3} = \langle\{0, 1, 2\}, <\rangle$. Entonces $T_{\mathbf{3}}$ viene dado por:



Ramas finitas, pero…

Si W es un buen orden, entonces T_W es bien fundado.

Árboles y buena fundación

Sea L un orden total.

$T_L := \langle \text{Sucesiones decrecientes en } L, \sqsubset \rangle$

Ejemplo

Sea $\mathbf{3} = \langle \{0, 1, 2\}, < \rangle$. Entonces $T_{\mathbf{3}}$ viene dado por:

$$
\begin{tikzcd}
 & () \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[rrd] & & \\
(0) & (1) \arrow[d] & & (2) \arrow[dl] \arrow[d] \\
 & (1,0) & (2,0) & (2,1) \arrow[d] \\
 & & & (2,1,0)
\end{tikzcd}
$$

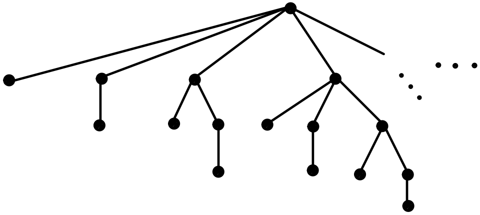
Ramas finitas, pero...

Si W es un buen orden, entonces T_W es bien fundado.

Pero puede tener **rango** transfinito.

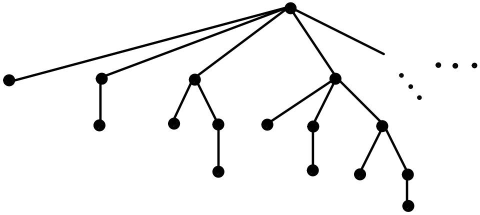
Árboles y buena fundación

T_ω:

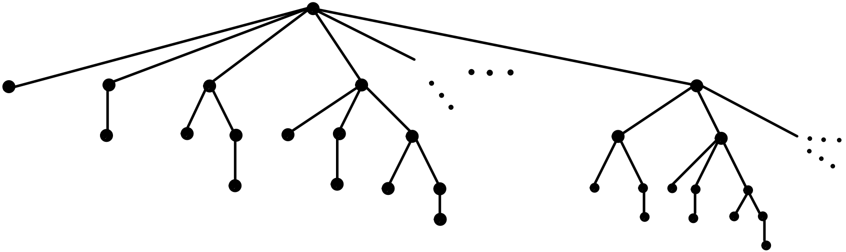


Árboles y buena fundación

T_ω:

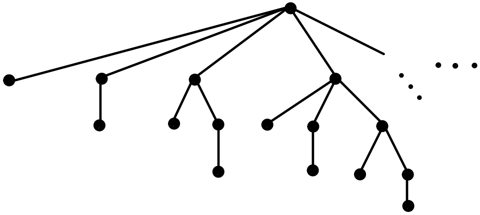


$T_{\omega+1}$:

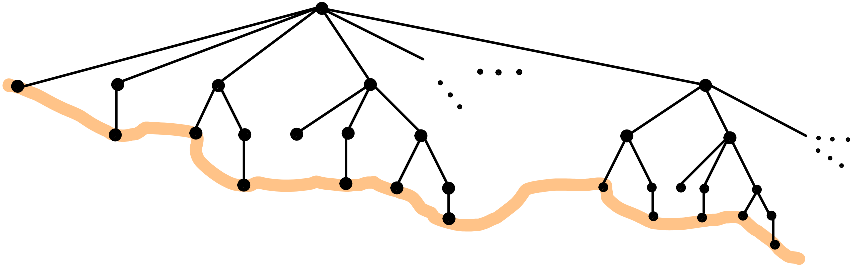


Árboles y buena fundación

T_ω:

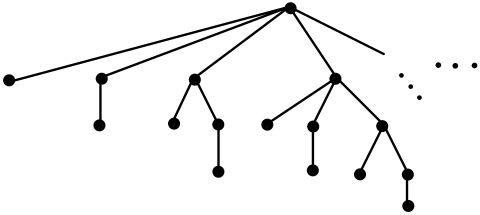


$T_{\omega+1}$:

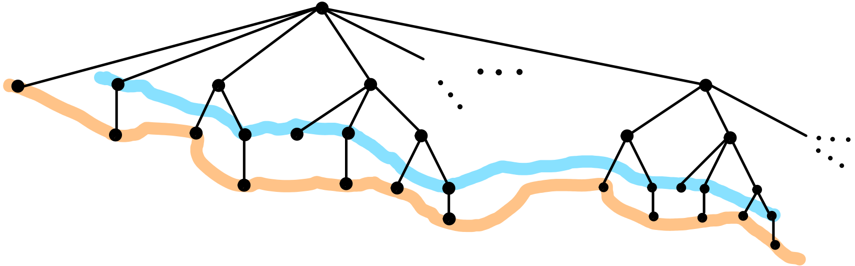


Árboles y buena fundación

T_ω:

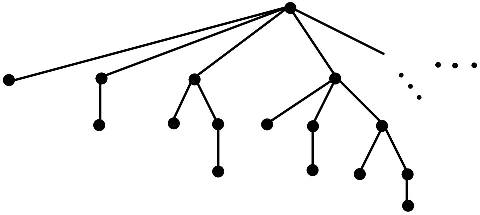


$T_{\omega+1}$:

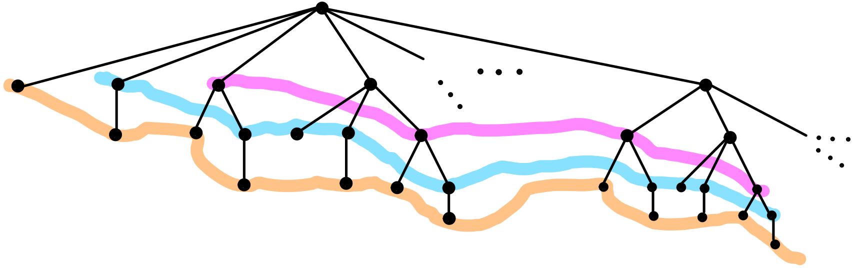


Árboles y buena fundación

T_ω:



$T_{\omega+1}$:



Aplicación: calibrar la bisimilitud

Sistemas de transiciones

Multigrafo dirigido etiquetado punteado (fuaaa!)

$$\mathbf{S}, s := \langle S, s, \{R_a\}_{a \in L} \rangle$$

tal que $s \in S$ y $R_a \subseteq S \times S$ para cada $a \in L$.

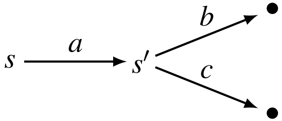
$$\begin{tikzcd} & & \bullet \\ s \arrow[r, "a"] & s' \arrow[ur, "b"] \arrow[dr, "c"] & \\ & & \bullet \end{tikzcd}$$

Aplicación: calibrar la bisimilitud

Sistemas de transiciones

Multigrafo dirigido etiquetado punteado (fuaaa!)

$$\mathbf{S}, s := \langle S, s, \{R_a\}_{a \in L} \rangle$$



tal que $s \in S$ y $R_a \subseteq S \times S$ para cada $a \in L$.

Bisimulación B entre $\mathbf{S}, s$ y $\mathbf{T}, t$

$B \subseteq S \times T$ tal que $s\ B\ t$ y

- $s_1 \xrightarrow{a} s_2$ & $s_1\ B\ t_1 \implies$ hay t_2 tal que $t_1 \xrightarrow{a} t_2$ & $s_2\ B\ t_2$
- $t_1 \xrightarrow{a} t_2$ & $s_1\ B\ t_1 \implies$ hay s_2 tal que $s_1 \xrightarrow{a} s_2$ & $s_2\ B\ t_2$

Aplicación: calibrar la bisimilitud

Sistemas de transiciones

Multigrafo dirigido etiquetado punteado (fuaaa!)

$$\mathbf{S}, s := \langle S, s, \{R_a\}_{a \in L} \rangle$$

$$\begin{tikzcd} & & \bullet \\ s \arrow[r, "a"] & s' \arrow[ur, "b"] \arrow[dr, "c"] & \\ & & \bullet \end{tikzcd}$$

tal que $s \in S$ y $R_a \subseteq S \times S$ para cada $a \in L$.

Bisimulación B entre $\mathbf{S}, s$ y $\mathbf{T}, t$

$B \subseteq S \times T$ tal que $s \; B \; t$ y

- $s_1 \xrightarrow{a} s_2$ & $s_1 \; B \; t_1 \implies$ hay t_2 tal que $t_1 \xrightarrow{a} t_2$ & $s_2 \; B \; t_2$
- $t_1 \xrightarrow{a} t_2$ & $s_1 \; B \; t_1 \implies$ hay s_2 tal que $s_1 \xrightarrow{a} s_2$ & $s_2 \; B \; t_2$

$$\begin{tikzcd} s \arrow[loop right, "a"] \end{tikzcd} \qquad\qquad s_1 \xrightarrow{a} s_2 \xrightarrow{a} s_3 \xrightarrow{a} s_4 \xrightarrow{a} \cdots$$

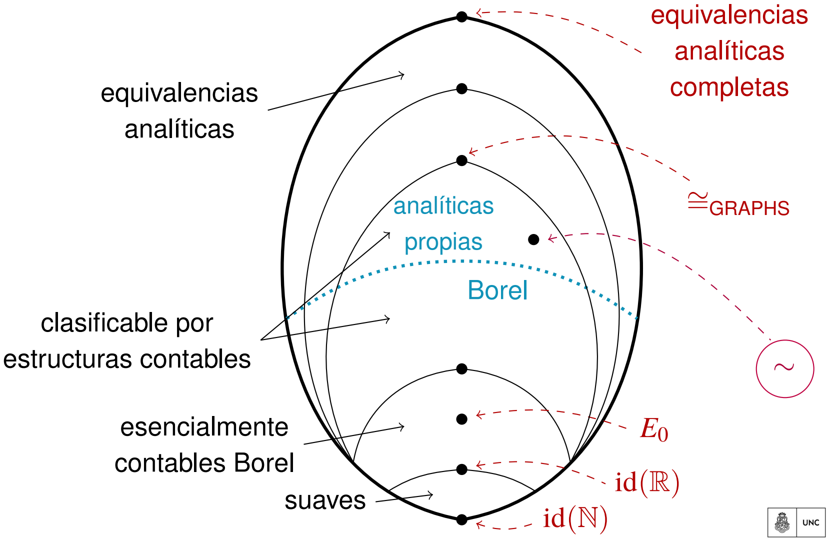
Aplicación: calibrar la bisimilitud

Teorema (PST [2017])

$(\sim) \subseteq \mathrm{LTS} \times \mathrm{LTS}$ *no es Borel.*

Clasificando problemas de clasificación

(De Motto Ros [2021])



Aplicación: calibrar la bisimilitud

Teorema (PST [2017])

$(\sim) \subseteq$ LTS $\times$ LTS *no es Borel.*

Demostración.

- $\mathsf{LO}_{\mathbb{N}}$ es espacio N_2 0-dimensional, y $\mathsf{WO}_{\mathbb{N}} \subseteq \mathsf{LO}_{\mathbb{N}}$ no es Borel.
- $L \mapsto (T_L, T_{L\oplus L})$ atestigua

$$\mathsf{LO}_{\mathbb{N}} \smallsetminus \mathsf{WO}_{\mathbb{N}} \leqslant_W (\sim).$$

Aplicación: calibrar la bisimilitud

Teorema (PST [2017])

$(\sim) \subseteq \mathsf{LTS} \times \mathsf{LTS}$ no es Borel.

Demostración.

- $\mathsf{LO}_{\mathbb{N}}$ es espacio N_2 0-dimensional, y $\mathsf{WO}_{\mathbb{N}} \subseteq \mathsf{LO}_{\mathbb{N}}$ no es Borel.
- $L \mapsto (T_L, T_{L \oplus L})$ atestigua

$$\mathsf{LO}_{\mathbb{N}} \smallsetminus \mathsf{WO}_{\mathbb{N}} \leqslant_W (\sim).$$

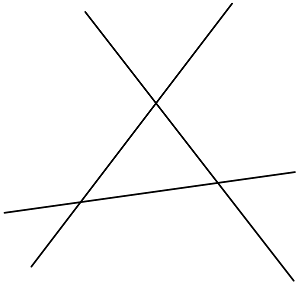
M. Moroni (PhD 2022): Aún en procesos de rango $\omega + 1$, $\sim$ no es suave, y mucho más (e.g. [2023]).

Now, for something completely different

J. Kuperman (en progreso):
Arreglos de hiperplanos en $\mathbb{R}^n$ (¡!).

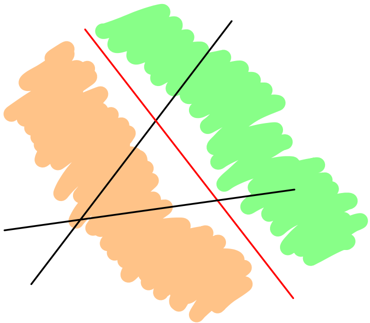
Now, for something completely different

J. Kuperman (en progreso):
Arreglos de hiperplanos en $\mathbb{R}^n$ (¡!).



J. Kuperman (en progreso):
Arreglos de hiperplanos en $\mathbb{R}^n$ (¡!).

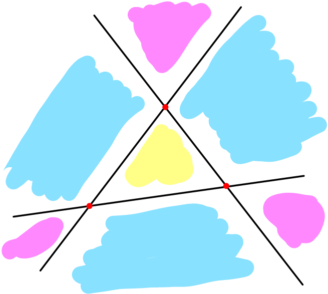
Facetas: intersecciones no vacías de alguna de las tres regiones determinadas por cada uno de los hiperplanos.



Now, for something completely different

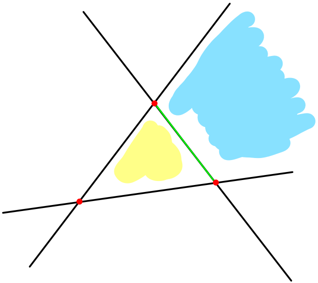
J. Kuperman (en progreso):
Arreglos de hiperplanos en $\mathbb{R}^n$ (¡!).

Facetas: intersecciones no vacías de alguna de las tres regiones determinadas por cada uno de los hiperplanos.



J. Kuperman (en progreso):
Arreglos de hiperplanos en $\mathbb{R}^n$ (¡!).

Facetas: intersecciones no vacías de alguna de las tres regiones determinadas por cada uno de los hiperplanos.



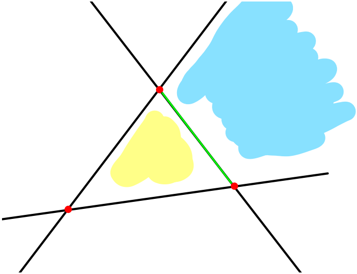
Orden de facetas

$$F \leqslant G \iff \overline{F} \subseteq \overline{G}$$

Bandas regulares a izquierda (LRB)

Semigrupo de facetas (Brown [2000])

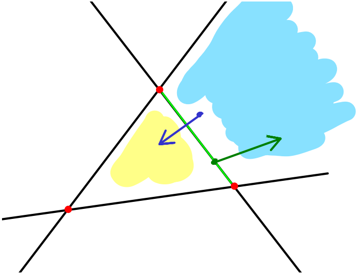
$F \cdot G :=$ faceta-entorno del comienzo de un segmento genérico desde F hacia G.



Bandas regulares a izquierda (LRB)

Semigrupo de facetas (Brown [2000])

$F \cdot G :=$ faceta-entorno del comienzo de un segmento genérico desde F hacia G.

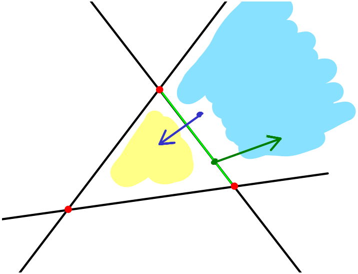


Bandas regulares a izquierda (LRB)

Semigrupo de facetas (Brown [2000])

$F \cdot G :=$ faceta-entorno del comienzo de un segmento genérico desde F hacia G.

$$F \cdot G = G \iff F \leqslant G$$



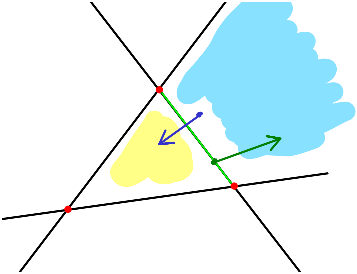
Resulta (obviamente) idempotente y los maximales forman un ideal bilátero.

Bandas regulares a izquierda (LRB)

Semigrupo de facetas (Brown [2000])

$F \cdot G :=$ faceta-entorno del comienzo de un segmento genérico desde F hacia G.

$$F \cdot G = G \iff F \leqslant G$$



Resulta (obviamente) idempotente y los maximales forman un ideal bilátero.
Se puede comparar con la $\cup$ en $\mathcal{P}(X)$:

$$F \cup G = G \iff F \subseteq G,$$

Los semigrupos de facetas no son conmutativos, pero son **LRB**:

$$F \cdot G \cdot F = F \cdot G.$$

Posets asociativos

$\mathbf{A} := \langle A, \leqslant \rangle$ es un **poset asociativo** si hay estructura de LRB $\langle A, \cdot \rangle$ tal que

$$\forall a, b \in A, \quad a \cdot b = b \iff a \leqslant b.$$

Problema de caracterización

Dar condiciones estructurales sobre un poset $\mathbf{A}$ para decidir si es asociativo.

Posets asociativos

$\mathbf{A} := \langle A, \leqslant \rangle$ es un **poset asociativo** si hay estructura de LRB $\langle A, \cdot \rangle$ tal que

$$\forall a, b \in A, \quad a \cdot b = b \iff a \leqslant b.$$

Problema de caracterización

Dar condiciones estructurales sobre un poset $\mathbf{A}$ para decidir si es asociativo.

Si pedimos asociativo y conmutativo, es muy simple: basta que existan todos los supremos de pares de elementos.

Posets asociativos

$\mathbf{A} := \langle A, \leqslant \rangle$ es un **poset asociativo** si hay estructura de LRB $\langle A, \cdot \rangle$ tal que

$$\forall a, b \in A, \quad a \cdot b = b \iff a \leqslant b.$$

Problema de caracterización

Dar condiciones estructurales sobre un poset $\mathbf{A}$ para decidir si es asociativo.

Si pedimos asociativo y conmutativo, es muy simple: basta que existan todos los supremos de pares de elementos.
El caso general parece complicado, pero... ¡podemos intentar con árboles!

Árboles, de regreso

Teorema (Kuperman, Petrovich, PST)

Son equivalentes:

Árboles, de regreso

Teorema (Kuperman, Petrovich, PST)

Son equivalentes:

1. *Todo árbol bien fundado es asociativo.*

Árboles, de regreso

Teorema (Kuperman, Petrovich, PST)

Son equivalentes:

1. *Todo árbol bien fundado es asociativo.*
2. *Todo árbol de tres niveles es asociativo.*

Árboles, de regreso

Teorema (Kuperman, Petrovich, PST)

Son equivalentes:

1. *Todo árbol bien fundado es asociativo.*
2. *Todo árbol de tres niveles es asociativo.*
3. *El Axioma de Elección.*

Árboles, de regreso

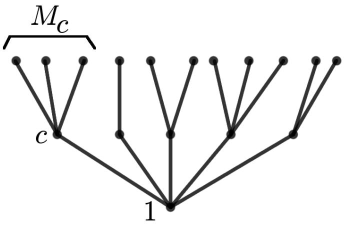
Teorema (Kuperman, Petrovich, PST)

Son equivalentes:

1. *Todo árbol bien fundado es asociativo.*
2. *Todo árbol de tres niveles es asociativo.*
3. *El Axioma de Elección.*

Demostración.

(2⇒3)



Árboles, de regreso

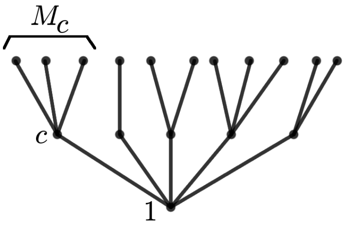
Teorema (Kuperman, Petrovich, PST)

Son equivalentes:

1. *Todo árbol bien fundado es asociativo.*
2. *Todo árbol de tres niveles es asociativo.*
3. *El Axioma de Elección.*

Demostración.

(2⇒3)



(3⇒1) Trabajo Final de Joel Kuperman.

Árboles, de regreso

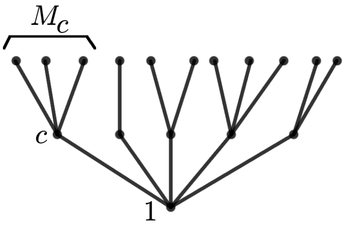
Teorema (Kuperman, Petrovich, PST)

Son equivalentes:

1. *Todo árbol bien fundado es asociativo.*
2. *Todo árbol de tres niveles es asociativo.*
3. *El Axioma de Elección.*

Demostración.

(2⇒3)



(3⇒1) Trabajo Final de Joel Kuperman.
Combinatorialmente más complicado.
Más aún lo generaliza para árboles **foliados**

Hablando de axiomas… ZFC (Zermelo, Fraenkel, *Choice*)

Pares	Existe $\{x, y\}$.
Unión	Existe $\bigcup x$.
Infinito	Existe $\omega = \mathbb{N}_0$.
Partes	Existe $\mathcal{P}(x)$.
Separación	Existe $\{x \in y : Q(x)\}$ (Q definible).
Reemplazo	Existe $\{F(x) : x \in y\}$ (F definible).
Elección	(AC) Existe $f : A \to \bigcup A$ tal que $\varnothing \neq x \in A$ implica $f(x) \in x$.
Fundación	$\in$ es bien fundada.

Hablando de axiomas… ZFC (Zermelo, Fraenkel, *Choice*)

Pares	Existe $\{x, y\}$.
Unión	Existe $\bigcup x$.
Infinito	Existe $\omega = \mathbb{N}_0$.
Partes	Existe $\mathcal{P}(x)$.
Separación	Existe $\{x \in y : Q(x)\}$ (Q definible).
Reemplazo	Existe $\{F(x) : x \in y\}$ (F definible).
Elección	(AC) Existe $f : A \to \bigcup A$ tal que $\varnothing \neq x \in A$ implica $f(x) \in x$.
Fundación	$\in$ es bien fundada.

Hito epistemológico del Siglo XX

- 99.99 % de los objetos matemáticos se representan como conjuntos.
- Los razonamientos matemáticos válidos sobre ellos coinciden con pruebas en lógica de primer orden + ZFC.

Cohen [1963]: Independencia de CH de ZFC.

Hablando de axiomas. . . y lo que no deciden

Cohen [1963]: Independencia de CH de ZFC.

En colaboración con **E. Gunther** (posdoc 2019–2020), M. Pagano y M. Steinberg [2022],

Verificación formal de **forcing**

Mediante el uso del *asistente de prueba* Isabelle, chequeando que la demostración es correcta al máximo nivel de detalle.

Hablando de axiomas. . . y lo que no deciden

Cohen [1963]: Independencia de CH de ZFC.

En colaboración con **E. Gunther** (posdoc 2019–2020), M. Pagano y M. Steinberg [2022],

Verificación formal de **forcing**

Mediante el uso del *asistente de prueba* Isabelle, chequeando que la demostración es correcta al máximo nivel de detalle.

```
theorem ctm_of_not_CH:
  assumes
    "M ≈ ω" "Transset(M)" "M ⊨ ZFC"
  shows
    "∃N.
      M ⊆ N ∧ N ≈ ω ∧ Transset(N) ∧ N ⊨ ZFC ∪ {·¬·CH··} ∧
      (∀α. Ord(α) ⟶ (α ∈ M ⟷ α ∈ N))"
```

Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

La filmina extra

- Más ejemplos de buena fundación:
  1. El logaritmo no se puede iterar.
  2. Cómo romper un orden total.
  3. Construcción de conjuntos Borel.
  4. Familias precompactas de conjuntos finitos (Ramsey).

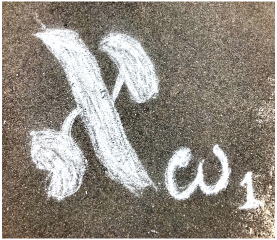
La filmina extra

- Más ejemplos de buena fundación:
  1. El logaritmo no se puede iterar.
  2. Cómo romper un orden total.
  3. Construcción de conjuntos Borel.
  4. Familias precompactas de conjuntos finitos (Ramsey).
- Más ejemplos de árboles:
  1. Suslin.
  2. Kurepa.
  3. Estrategias en juegos infinitos.

La filmina extra

- Más ejemplos de buena fundación:
  1. El logaritmo no se puede iterar.
  2. Cómo romper un orden total.
  3. Construcción de conjuntos Borel.
  4. Familias precompactas de conjuntos finitos (Ramsey).
- Más ejemplos de árboles:
  1. Suslin.
  2. Kurepa.
  3. Estrategias en juegos infinitos.
- Más conjunteoría, curso, etc.: ¡chusmear mi página web!.

¡Gracias!



Bibliografía I

K.S. BROWN, Semigroups, rings, and Markov chains, *J. Theor. Probab.* **13**: 871–938 (2000).

P. COHEN, The independence of the continuum hypothesis, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **50**: 1143–1148 (1963).

R. FRAÏSSÉ, Sur la comparaison des types d'ordres, *C. R. Acad. Sci., Paris* **226**: 1330–1331 (1948).

E. GUNTHER, M. PAGANO, P. SÁNCHEZ TERRAF, M. STEINBERG, The formal verification of the ctm approach to forcing, *arXiv e-prints* (2022).

A. KANAMORI, Cantor and continuity, en: The history of continua. Philosophical and mathematical perspectives, pp. 219–254, Oxford: Oxford University Press: 219–254 (2021).

A.S. KECHRIS, "Classical Descriptive Set Theory", Graduate Texts in Mathematics **156**, Springer-Verlag (1994).

R. LAVER, On fraisse's order type conjecture, *Annals of Mathematics* **93**: 89–111 (1971).

P.E. MARUN, Square compactness and Lindelöf trees, (2023).

Bibliografía II

J.T. MOORE, A five element basis for the uncountable linear orders, *Ann. Math. (2)* **163**: 669–688 (2006).

M.S. MORONI, P. SÁNCHEZ TERRAF, The Zhou ordinal of labelled Markov processes over separable spaces, *The Review of Symbolic Logic* (2023). Date of *FirstView* online publication.

L. MOTTO ROS, Classification problems from the descriptive set theoretical perspective, en: M.F. et al. (Ed.), Research Trends in Contemporary Logic, (2021).

G. PAOLINI, S. SHELAH, Torsion-free abelian groups are Borel complete, (2023).

Y. PEQUIGNOT, A Wadge hierarchy for second countable spaces, *Arch. Math. Logic* **54**: 659–683 (2015).

P. SÁNCHEZ TERRAF, Bisimilarity is not Borel, *Mathematical Structures in Computer Science* **27**: 1265–1284 (2017).