Aplicaciones de la Teoría de Conjuntos Descriptiva a la Computación Teórica

Pedro Sánchez Terraf[1]

CIEM-FaMAF — Universidad Nacional de Córdoba

Seminario del IMAL — Santa Fe
06 / 11 / 2015

[1] Financiado por CONICET, proyectos ANPCyT PICT 2012-1823 y SeCyT-UNC 05/B284

Menú de 4 pasos 🍽

1. Modelos de computación: Marcos de Kripke
   - MK Deterministas
   - Determinización
2. Marcos de Kripke medibles
   - Ejemplos
   - MKM deterministas
3. Teoría de conjuntos Descriptiva
   - ¿Qué es?
   - El (hiper)espacio de los conjuntos cerrados
   - Axioma de elección medible
4. Resultados
   - Un problema. . .

Modelos de computación

Diversas "tecnologías" que se desarrollaron en Computación:

1. Computación Secuencial;
2. Comp. Probabilista;
3. Comp. Concurrente;
4. ...

Modelos de computación

Diversas “tecnologías” que se desarrollaron en Computación:

1. Computación Secuencial;
2. Comp. Probabilista;
3. Comp. Concurrente;
4. ...

Modelos de computación

Diversas "tecnologías" que se desarrollaron en Computación:

1. Computación Secuencial;
2. Comp. Probabilista;
3. Comp. Concurrente;
4. ...

Modelos de computación

Diversas “tecnologías” que se desarrollaron en Computación:

1. Computación Secuencial;
2. Comp. Probabilista;
3. Comp. Concurrente;
4. ...

Modelos de computación

Diversas "tecnologías" que se desarrollaron en Computación:

1. Computación Secuencial;
2. Comp. Probabilista;
3. Comp. Concurrente;
4. ...

Definición

Sea L un conjunto de **etiquetas**.
$\mathbf{S} = \langle S, \{R_a\}_{a\in L}\rangle$ tal que $R_a \subseteq S \times S$ para cada $a \in L$.

Notación. $s \xrightarrow{a} s'$ si $s\ R_a\ s'$.

$\mathbf{S}$ es determinista si

$$R_a[s] := \{s' \in S : s\,R\,s'\}$$

es un singulete para cada a y s.
Equivalentemente, puedo presentar $\mathbf{S} = \langle S, \{r_a\}_{a\in L}\rangle$ con $r_a : S \to S$ para cada a.

Marcos de Kripke

Definición

Sea L un conjunto de **etiquetas**.
$\mathbf{S} = \langle S, \{R_a\}_{a \in L}\rangle$ tal que $R_a \subseteq S \times S$ para cada $a \in L$.

Notación. $s \xrightarrow{a} s'$ si $s \, R_a \, s'$.

$\mathbf{S}$ es determinista si

$$R_a[s] := \{s' \in S : s \, R \, s'\}$$

es un singulete para cada a y s.
Equivalentemente, puedo presentar $\mathbf{S} = \langle S, \{r_a\}_{a \in L}\rangle$ con $r_a : S \to S$ para cada a.

Marcos de Kripke

Definición

Sea L un conjunto de **etiquetas**.
$\mathbf{S} = \langle S, \{R_a\}_{a \in L} \rangle$ tal que $R_a \subseteq S \times S$ para cada $a \in L$.

Notación. $s \xrightarrow{a} s'$ si $s \, R_a \, s'$.

$\mathbf{S}$ es determinista si

$$R_a[s] := \{s' \in S : s \, R \, s'\}$$

es un singulete para cada a y s.

Equivalentemente, puedo presentar $\mathbf{S} = \langle S, \{r_a\}_{a \in L} \rangle$ con $r_a : S \to S$ para cada a.

Definición

Sea L un conjunto de **etiquetas**.
$\mathbf{S} = \langle S, \{R_a\}_{a \in L} \rangle$ tal que $R_a \subseteq S \times S$ para cada $a \in L$.

Notación. $s \xrightarrow{a} s'$ si $s \; R_a \; s'$.

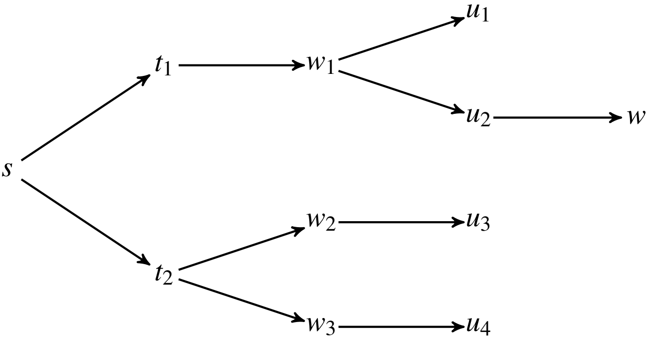
$\mathbf{S}$ es determinista si

$$R_a[s] := \{s' \in S : s \; R \; s'\}$$

es un singulete para cada a y s.
Equivalentemente, puedo presentar $\mathbf{S} = \langle S, \{r_a\}_{a \in L} \rangle$ con $r_a : S \to S$ para cada a.

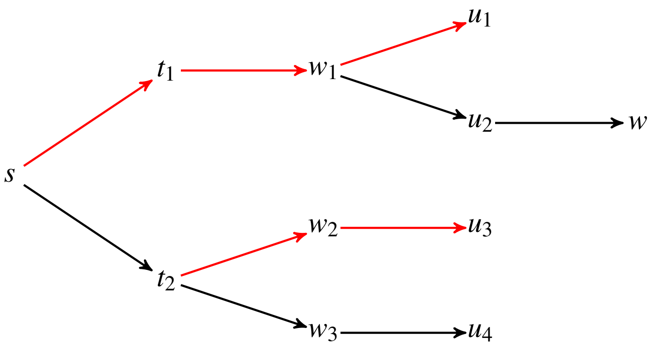
Determinización (I)

Para fijar ideas, una sola relación de accesibilidad R (i.e., L es un singulete).
Descomponemos un marco de Kripke en marcos deterministas:



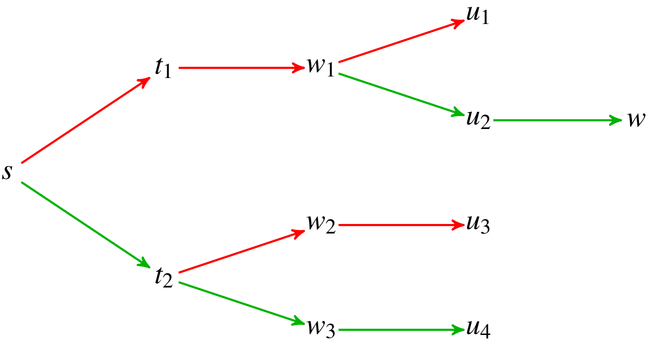
Determinización (I)

Para fijar ideas, una sola relación de accesibilidad R (i.e., L es un singulete). Descomponemos un marco de Kripke en marcos deterministas:



Determinización (I)

Para fijar ideas, una sola relación de accesibilidad R (i.e., L es un singulete).
Descomponemos un marco de Kripke en marcos deterministas:



Determinización (II)

$$\langle S, R \rangle \longrightarrow \langle S, R_1, R_2 \rangle$$

En general, escribimos la relación como una unión.

$$\langle S, R \rangle \longrightarrow \langle S, \{R_i : i \in I\} \rangle$$

con

$$R[s] = \bigcup_{i \in I} R_i[s].$$

Determinización (II)

$$\langle S, R\rangle \longrightarrow \langle S, R_1, R_2\rangle$$

En general, escribimos la relación como una unión.

$$\langle S, R\rangle \longrightarrow \langle S, \{R_i : i \in I\}\rangle$$

con

$$R[s] = \bigcup_{i\in I} R_i[s].$$

Determinización (II)

$$\langle S, R \rangle \longrightarrow \langle S, R_1, R_2 \rangle$$

En general, escribimos la relación como una unión.

$$\langle S, R \rangle \longrightarrow \langle S, \{R_i : i \in I\} \rangle$$

con

$$R[s] = \bigcup_{i \in I} R_i[s].$$

Marcos de Kripke medibles (MKM)

Definición

$\langle S, \mathcal{S}, \{R_a\}_{a \in L} \rangle$ donde

- $\langle S, \mathcal{S} \rangle$ es un espacio medible;
- $R_a[s] \subseteq S$ es medible para todo $s \in S$;
- $\Diamond_a Q := \{s : R_a[s] \cap Q \neq \varnothing\}$ es medible para cada $Q \subseteq S$ medible.

Modelos de juguete de sistemas que involucran probabilidades y no determinismo (NLMP: D'Argenio y Wolovick).

$\Diamond_a Q$ medible: para poder decir *"la probabilidad de saltar a un estado que cumpla ...".*

Nuevamente, una sola relación de accesibilidad R (tiro el subíndice a).

Marcos de Kripke medibles (MKM)

Definición

$\langle S, \mathcal{S}, \{R_a\}_{a\in L}\rangle$ donde

- $\langle S, \mathcal{S}\rangle$ es un espacio medible;
- $R_a[s] \subseteq S$ es medible para todo $s \in S$;
- $\Diamond_a Q := \{s : R_a[s] \cap Q \neq \varnothing\}$ es medible para cada $Q \subseteq S$ medible.

Modelos de juguete de sistemas que involucran probabilidades y no determinismo (NLMP: D'Argenio y Wolovick).

$\Diamond_a Q$ medible: para poder decir *"la probabilidad de saltar a un estado que cumpla . . . "*.

Nuevamente, una sola relación de accesibilidad R (tiro el subíndice a).

Marcos de Kripke medibles (MKM)

Definición

$\langle S, \mathcal{S}, \{R_a\}_{a \in L} \rangle$ donde

- $\langle S, \mathcal{S} \rangle$ es un espacio medible;
- $R_a[s] \subseteq S$ es medible para todo $s \in S$;
- $\Diamond_a Q := \{s : R_a[s] \cap Q \neq \varnothing\}$ es medible para cada $Q \subseteq S$ medible.

Modelos de juguete de sistemas que involucran probabilidades y no determinismo (NLMP: D'Argenio y Wolovick).

$\Diamond_a Q$ medible: para poder decir *"la probabilidad de saltar a un estado que cumpla . . . "*.

Nuevamente, una sola relación de accesibilidad R (tiro el subíndice a).

Ejemplos

BAO $\Diamond 0 = 0, \ \Diamond(x \vee y) = \Diamond x \vee \Diamond y$

Categoría dual a BAO:

$\langle S, R\rangle$, con una topología de Stone $\mathcal{T}$ tal que

1. $\Diamond$ manda clopen en clopen; y
2. $R[s]$ es cerrado para cada $s \in S$.

$\langle S, \mathbf{B}(\mathcal{T}), R\rangle$ es un MKM.

Funciones medibles $f_i : S \to S \quad (i \in \mathbb{N})$

$s\, R\, s' \iff \exists i : f_i(s) = s'$ (i.e., $R[s] := \{f_i(s) : i \in \mathbb{N}\}$).

$$\Diamond Q = \{s : R[s] \cap Q \neq \varnothing\} = \{s : \{f_i(s) : i \in \mathbb{N}\} \cap Q \neq \varnothing\} =$$
$$= \{s : \exists i \in \mathbb{N}\ (f_i(s) \in Q)\} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{s : f_i(s) \in Q\} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} f_i^{-1}[Q]$$

Ejemplos

BAO $\quad \Diamond 0 = 0, \ \Diamond(x \vee y) = \Diamond x \vee \Diamond y$

Categoría dual a BAO:

$\langle S, R\rangle$, con una topología de Stone $\mathcal{T}$ tal que

1. $\Diamond$ manda clopen en clopen; y
2. $R[s]$ es cerrado para cada $s \in S$.

$\langle S, \mathbf{B}(\mathcal{T}), R\rangle$ es un MKM.

Funciones medibles $\quad f_i : S \to S \quad (i \in \mathbb{N})$

$s\,R\,s' \iff \exists i : f_i(s) = s'$ (i.e., $R[s] := \{f_i(s) : i \in \mathbb{N}\}$).

$$\Diamond Q = \{s : R[s] \cap Q \neq \varnothing\} = \{s : \{f_i(s) : i \in \mathbb{N}\} \cap Q \neq \varnothing\} =$$
$$= \{s : \exists i \in \mathbb{N}\ (f_i(s) \in Q)\} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{s : f_i(s) \in Q\} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} f_i^{-1}[Q]$$

BAO $\Diamond 0 = 0, \ \Diamond(x \vee y) = \Diamond x \vee \Diamond y$

Categoría dual a BAO:

$\langle S, R \rangle$, con una topología de Stone $\mathcal{T}$ tal que

1. $\Diamond$ manda clopen en clopen; y
2. $R[s]$ es cerrado para cada $s \in S$.

$\langle S, \mathbf{B}(\mathcal{T}), R \rangle$ es un MKM.

Funciones medibles $f_i : S \to S \quad (i \in \mathbb{N})$

$s\, R\, s' \iff \exists i : f_i(s) = s'$ (i.e., $R[s] := \{f_i(s) : i \in \mathbb{N}\}$).

$$\Diamond Q = \{s : R[s] \cap Q \neq \varnothing\} = \{s : \{f_i(s) : i \in \mathbb{N}\} \cap Q \neq \varnothing\} = \\ = \{s : \exists i \in \mathbb{N}\ (f_i(s) \in Q)\} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{s : f_i(s) \in Q\} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} f_i^{-1}[Q]$$

Ejemplos

BAO $\Diamond 0 = 0,\ \Diamond(x \vee y) = \Diamond x \vee \Diamond y$

Categoría dual a BAO:
$\langle S, R\rangle$, con una topología de Stone $\mathcal{T}$ tal que

1. $\Diamond$ manda clopen en clopen; y
2. $R[s]$ es cerrado para cada $s \in S$.

$\langle S, \mathbf{B}(\mathcal{T}), R\rangle$ es un MKM.

Funciones medibles $f_i : S \to S \quad (i \in \mathbb{N})$

$s\, R\, s' \iff \exists i : f_i(s) = s'$ (i.e., $R[s] := \{f_i(s) : i \in \mathbb{N}\}$).

$$\Diamond Q = \{s : R[s] \cap Q \neq \varnothing\} = \{s : \{f_i(s) : i \in \mathbb{N}\} \cap Q \neq \varnothing\} =$$
$$= \{s : \exists i \in \mathbb{N}\ (f_i(s) \in Q)\} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \{s : f_i(s) \in Q\} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f_i^{-1}[Q]$$

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Ejemplos

BAO $\Diamond 0 = 0,\ \Diamond(x \vee y) = \Diamond x \vee \Diamond y$

Categoría dual a BAO:

$\langle S, R\rangle$, con una topología de Stone $\mathcal{T}$ tal que

1. $\Diamond$ manda clopen en clopen; y
2. $R[s]$ es cerrado para cada $s \in S$.

$\langle S, \mathbf{B}(\mathcal{T}), R\rangle$ es un MKM.

Funciones medibles $f_i : S \to S \quad (i \in \mathbb{N})$

$s\,R\,s' \iff \exists i : f_i(s) = s'$ (i.e., $R[s] := \{f_i(s) : i \in \mathbb{N}\}$).

$$\Diamond Q = \{s : R[s] \cap Q \neq \varnothing\} = \{s : \{f_i(s) : i \in \mathbb{N}\} \cap Q \neq \varnothing\} =$$
$$= \{s : \exists i \in \mathbb{N}\ (f_i(s) \in Q)\} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \{s : f_i(s) \in Q\} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f_i^{-1}[Q]$$

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Ejemplos

BAO $\quad \Diamond 0 = 0, \ \Diamond(x \vee y) = \Diamond x \vee \Diamond y$

Categoría dual a BAO:
$\langle S, R\rangle$, con una topología de Stone $\mathcal{T}$ tal que

1. $\Diamond$ manda clopen en clopen; y
2. $R[s]$ es cerrado para cada $s \in S$.

$\langle S, \mathbf{B}(\mathcal{T}), R\rangle$ es un MKM.

Funciones medibles $\quad f_i : S \to S \quad (i \in \mathbb{N})$

$s\, R\, s' \iff \exists i : f_i(s) = s'$ (i.e., $R[s] := \{f_i(s) : i \in \mathbb{N}\}$).

$$\Diamond Q = \{s : R[s] \cap Q \neq \varnothing\} = \{s : \{f_i(s) : i \in \mathbb{N}\} \cap Q \neq \varnothing\} =$$
$$= \{s : \exists i \in \mathbb{N}\ (f_i(s) \in Q)\} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \{s : f_i(s) \in Q\} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f_i^{-1}[Q]$$

Ejemplos

BAO $\quad \Diamond 0 = 0, \ \Diamond(x \vee y) = \Diamond x \vee \Diamond y$

Categoría dual a BAO:

$\langle S, R\rangle$, con una topología de Stone $\mathcal{T}$ tal que

1. $\Diamond$ manda clopen en clopen; y
2. $R[s]$ es cerrado para cada $s \in S$.

$\langle S, \mathbf{B}(\mathcal{T}), R\rangle$ es un MKM.

Funciones medibles $\quad f_i : S \to S \quad (i \in \mathbb{N})$

$s\, R\, s' \iff \exists i : f_i(s) = s'$ (i.e., $R[s] := \{f_i(s) : i \in \mathbb{N}\}$).

$$\Diamond Q = \{s : R[s] \cap Q \neq \varnothing\} = \{s : \{f_i(s) : i \in \mathbb{N}\} \cap Q \neq \varnothing\} =$$
$$= \{s : \exists i \in \mathbb{N}\ (f_i(s) \in Q)\} = \textstyle\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \{s : f_i(s) \in Q\} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f_i^{-1}[Q]$$

BAO $\Diamond 0 = 0,\ \Diamond(x \vee y) = \Diamond x \vee \Diamond y$

Categoría dual a BAO:
$\langle S, R\rangle$, con una topología de Stone $\mathcal{T}$ tal que

1. $\Diamond$ manda clopen en clopen; y
2. $R[s]$ es cerrado para cada $s \in S$.

$\langle S, \mathbf{B}(\mathcal{T}), R\rangle$ es un MKM.

Funciones medibles $f_i : S \to S \quad (i \in \mathbb{N})$

$s\,R\,s' \iff \exists i : f_i(s) = s'$ (i.e., $R[s] := \{f_i(s) : i \in \mathbb{N}\}$).

$$\Diamond Q = \{s : R[s] \cap Q \neq \varnothing\} = \{s : \{f_i(s) : i \in \mathbb{N}\} \cap Q \neq \varnothing\} =$$
$$= \{s : \exists i \in \mathbb{N}\ (f_i(s) \in Q)\} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \{s : f_i(s) \in Q\} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f_i^{-1}[Q]$$

Lema

Si $\langle S, \mathcal{S}, R\rangle$ es determinista, entonces la función $s \mapsto$ (único s' tal que $s\ R\ s'$) es medible.

Problema

Sea $\mathbf{S}$ MKM tal que $R[s]$ es finito para todo $s \in S$. ¿Puedo determinizarlo con MKMs deterministas? ¿Está hecho de funciones medibles?

Más fácil, $R[s] = \{u_s, v_s\}$ para todo s.

$$\begin{aligned}\Diamond Q &= \{s : R[s] \cap Q \neq \varnothing\}\\ &= \{s : \{u_s, v_s\} \cap Q \neq \varnothing\}\\ &= \{s : u_s \in Q \text{ ó } v_s \in Q\}\\ &= \{s : u_s \in Q\} \cup \{s : v_s \in Q\}\\ &= u^{-1}[Q] \cup v^{-1}[Q].\ ???\end{aligned}$$

Lema

Si $\langle S, \mathcal{S}, R\rangle$ es determinista, entonces la función $s \mapsto$ (único s' tal que $s\,R\,s'$) es medible.

Problema

Sea $\mathbf{S}$ MKM tal que $R[s]$ es finito para todo $s \in S$. ¿Puedo determinizarlo con MKMs deterministas? ¿Está hecho de funciones medibles?

Más fácil, $R[s] = \{u_s, v_s\}$ para todo s.

$$\begin{aligned}\Diamond Q &= \{s : R[s] \cap Q \neq \varnothing\}\\ &= \{s : \{u_s, v_s\} \cap Q \neq \varnothing\}\\ &= \{s : u_s \in Q \text{ ó } v_s \in Q\}\\ &= \{s : u_s \in Q\} \cup \{s : v_s \in Q\}\\ &= u^{-1}[Q] \cup v^{-1}[Q].\ ???\end{aligned}$$

Lema

Si $\langle S, \mathcal{S}, R\rangle$ es determinista, entonces la función $s \mapsto$ (único s' tal que $s\,R\,s'$) es medible.

Problema

Sea $\mathbf{S}$ MKM tal que $R[s]$ es finito para todo $s \in S$. ¿Puedo determinizarlo con MKMs deterministas? ¿Está hecho de funciones medibles?

Más fácil, $R[s] = \{u_s, v_s\}$ para todo s.

$$\begin{aligned}
\Diamond Q &= \{s : R[s] \cap Q \neq \varnothing\} \\
&= \{s : \{u_s, v_s\} \cap Q \neq \varnothing\} \\
&= \{s : u_s \in Q \text{ ó } v_s \in Q\} \\
&= \{s : u_s \in Q\} \cup \{s : v_s \in Q\} \\
&= u^{-1}[Q] \cup v^{-1}[Q].\ ???
\end{aligned}$$

Lema

Si $\langle S, \mathcal{S}, R\rangle$ es determinista, entonces la función $s \mapsto$ (único s' tal que $s\, R\, s'$) es medible.

Problema

Sea $\mathbf{S}$ MKM tal que $R[s]$ es finito para todo $s \in S$. ¿Puedo determinizarlo con MKMs deterministas? ¿Está hecho de funciones medibles?

Más fácil, $R[s] = \{u_s, v_s\}$ para todo s.

$$
\begin{aligned}
\Diamond Q &= \{s : R[s] \cap Q \neq \varnothing\} \\
&= \{s : \{u_s, v_s\} \cap Q \neq \varnothing\} \\
&= \{s : u_s \in Q \text{ ó } v_s \in Q\} \\
&= \{s : u_s \in Q\} \cup \{s : v_s \in Q\} \\
&= u^{-1}[Q] \cup v^{-1}[Q].\ ???
\end{aligned}
$$

Lema

Si $\langle S, \mathcal{S}, R\rangle$ es determinista, entonces la función $s \mapsto$ (único s' tal que $s\, R\, s'$) es medible.

Problema

Sea $\mathbf{S}$ MKM tal que $R[s]$ es finito para todo $s \in S$. ¿Puedo determinizarlo con MKMs deterministas? ¿Está hecho de funciones medibles?

Más fácil, $R[s] = \{u_s, v_s\}$ para todo s.

$$\begin{aligned}\Diamond Q &= \{s : R[s] \cap Q \neq \varnothing\}\\ &= \{s : \{u_s, v_s\} \cap Q \neq \varnothing\}\\ &= \{s : u_s \in Q \text{ ó } v_s \in Q\}\\ &= \{s : u_s \in Q\} \cup \{s : v_s \in Q\}\\ &= u^{-1}[Q] \cup v^{-1}[Q].\ ???\end{aligned}$$

Lema

Si $\langle S, \mathcal{S}, R\rangle$ es determinista, entonces la función $s \mapsto$ (único s' tal que $s \, R \, s'$) es medible.

Problema

Sea $\mathbf{S}$ MKM tal que $R[s]$ es finito para todo $s \in S$. ¿Puedo determinizarlo con MKMs deterministas? ¿Está hecho de funciones medibles?

Más fácil, $R[s] = \{u_s, v_s\}$ para todo s.

$$\begin{aligned}
\Diamond Q &= \{s : R[s] \cap Q \neq \varnothing\} \\
&= \{s : \{u_s, v_s\} \cap Q \neq \varnothing\} \\
&= \{s : u_s \in Q \text{ ó } v_s \in Q\} \\
&= \{s : u_s \in Q\} \cup \{s : v_s \in Q\} \\
&= u^{-1}[Q] \cup v^{-1}[Q]. \ ???
\end{aligned}$$

Lema

Si $\langle S, \mathcal{S}, R\rangle$ es determinista, entonces la función $s \mapsto$ (único s' tal que $s\,R\,s'$) es medible.

Problema

Sea $\mathbf{S}$ MKM tal que $R[s]$ es finito para todo $s \in S$. ¿Puedo determinizarlo con MKMs deterministas? ¿Está hecho de funciones medibles?

Más fácil, $R[s] = \{u_s, v_s\}$ para todo s.

$$
\begin{aligned}
\Diamond Q &= \{s : R[s] \cap Q \neq \varnothing\} \\
&= \{s : \{u_s, v_s\} \cap Q \neq \varnothing\} \\
&= \{s : u_s \in Q \text{ ó } v_s \in Q\} \\
&= \{s : u_s \in Q\} \cup \{s : v_s \in Q\} \\
&= u^{-1}[Q] \cup v^{-1}[Q]. \text{ ???}
\end{aligned}
$$

Lema

Si $\langle S, \mathcal{S}, R\rangle$ es determinista, entonces la función $s \mapsto$ (único s' tal que $s\, R\, s'$) es medible.

Problema

Sea $\mathbf{S}$ MKM tal que $R[s]$ es finito para todo $s \in S$. ¿Puedo determinizarlo con MKMs deterministas? ¿Está hecho de funciones medibles?

Más fácil, $R[s] = \{u_s, v_s\}$ para todo s.

$$
\begin{aligned}
\Diamond Q &= \{s : R[s] \cap Q \neq \varnothing\} \\
&= \{s : \{u_s, v_s\} \cap Q \neq \varnothing\} \\
&= \{s : u_s \in Q \text{ ó } v_s \in Q\} \\
&= \{s : u_s \in Q\} \cup \{s : v_s \in Q\} \\
&= u^{-1}[Q] \cup v^{-1}[Q]. \text{ ???}
\end{aligned}
$$

Lema

Si $\langle S, \mathcal{S}, R\rangle$ es determinista, entonces la función $s \mapsto$ (único s' tal que $s\, R\, s'$) es medible.

Problema

Sea $\mathbf{S}$ MKM tal que $R[s]$ es finito para todo $s \in S$. ¿Puedo determinizarlo con MKMs deterministas? ¿Está hecho de funciones medibles?

Más fácil, $R[s] = \{u_s, v_s\}$ para todo s.

$$\begin{aligned}
\Diamond Q &= \{s : R[s] \cap Q \neq \varnothing\} \\
&= \{s : \{u_s, v_s\} \cap Q \neq \varnothing\} \\
&= \{s : u_s \in Q \text{ ó } v_s \in Q\} \\
&= \{s : u_s \in Q\} \cup \{s : v_s \in Q\} \\
&= u^{-1}[Q] \cup v^{-1}[Q]. \text{ ???}
\end{aligned}$$

Es el estudio de *conjuntos definibles* de espacios separables y completamente metrizables ("**polacos**"). Lebesgue [1905].

Ejemplos

1. Conjuntos Borelianos;
2. Conjuntos **Analíticos**: Son medibles Lebesgue, tienen la BP, la propiedad del conjunto perfecto.
3. Conjuntos Proyectivos: Hipótesis conjuntistas.
4. Conjunto de Vitali: ¡no es un ejemplo!

Es el estudio de *conjuntos definibles* de espacios separables y completamente metrizables ("**polacos**"). Lebesgue [1905].

Ejemplos

1. Conjuntos Borelianos;
2. Conjuntos **Analíticos**: Son medibles Lebesgue, tienen la BP, la propiedad del conjunto perfecto.
3. Conjuntos Proyectivos: Hipótesis conjuntistas.
4. Conjunto de Vitali: ¡no es un ejemplo!

Es el estudio de *conjuntos definibles* de espacios separables y completamente metrizables ("**polacos**"). Lebesgue [1905].

Ejemplos

1. Conjuntos Borelianos;
2. Conjuntos **Analíticos**: Son medibles Lebesgue, tienen la BP, la propiedad del conjunto perfecto.
3. Conjuntos Proyectivos: Hipótesis conjuntistas.
4. Conjunto de Vitali: ¡no es un ejemplo!

Teoría de Conjuntos Descriptiva

Es el estudio de *conjuntos definibles* de espacios separables y completamente metrizables ("**polacos**"). Lebesgue [1905].

Ejemplos

1. Conjuntos Borelianos;
2. Conjuntos **Analíticos**: Son medibles Lebesgue, tienen la BP, la propiedad del conjunto perfecto.
3. Conjuntos Proyectivos: Hipótesis conjuntistas.
4. Conjunto de Vitali: ¡no es un ejemplo!

Teoría de Conjuntos Descriptiva

Es el estudio de *conjuntos definibles* de espacios separables y completamente metrizables ("**polacos**"). Lebesgue [1905].

Ejemplos

1. Conjuntos Borelianos;
2. Conjuntos **Analíticos**: Son medibles Lebesgue, tienen la BP, la propiedad del conjunto perfecto.
3. Conjuntos Proyectivos: Hipótesis conjuntistas.
4. Conjunto de Vitali: ¡no es un ejemplo!

Teoría de Conjuntos Descriptiva

Es el estudio de *conjuntos definibles* de espacios separables y completamente metrizables ("**polacos**"). Lebesgue [1905].

Ejemplos

1. Conjuntos Borelianos;
2. Conjuntos **Analíticos**: Son medibles Lebesgue, tienen la BP, la propiedad del conjunto perfecto.
3. Conjuntos Proyectivos: Hipótesis conjuntistas.
4. Conjunto de Vitali: ¡no es un ejemplo!

El espacio de conjuntos cerrados $F(S)$

Sea S un espacio polaco.

Estructura medible en $F(S)$

σ-álgebra generada por los conjuntos

$$H_U := \{F \in F(S) : F \cap U \neq \varnothing\},$$

donde U se mueve entre los abiertos de S.

Ejemplo

1. La familia de los conjuntos con cardinal menor a n es un conjunto medible en $F(S)$.
2. La familia de los cerrados incluidos en U no es medible.

El espacio de conjuntos cerrados $F(S)$

Sea S un espacio polaco.

Estructura medible en $F(S)$

σ-álgebra generada por los conjuntos

$$H_U := \{F \in F(S) : F \cap U \neq \varnothing\},$$

donde U se mueve entre los abiertos de S.

Ejemplo

1. La familia de los conjuntos con cardinal menor a n es un conjunto medible en $F(S)$.
2. La familia de los cerrados incluidos en U no es medible.

El espacio de conjuntos cerrados $F(S)$

Sea S un espacio polaco.

Estructura medible en $F(S)$

σ-álgebra generada por los conjuntos

$$H_U := \{F \in F(S) : F \cap U \neq \varnothing\},$$

donde U se mueve entre los abiertos de S.

Ejemplo

1. La familia de los conjuntos con cardinal menor a n es un conjunto medible en $F(S)$.
2. La familia de los cerrados incluidos en U no es medible.

El espacio de conjuntos cerrados $F(S)$

Sea S un espacio polaco.

Estructura medible en $F(S)$

σ-álgebra generada por los conjuntos

$$H_U := \{F \in F(S) : F \cap U \neq \varnothing\},$$

donde U se mueve entre los abiertos de S.

Ejemplo

1. La familia de los conjuntos con cardinal menor a n es un conjunto medible en $F(S)$.
2. La familia de los cerrados incluidos en U no es medible.

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Selectores Densos

Teorema (Kuratowski, Ryll-Nardzewski)

Para cada espacio polaco S existen $d_n : F(S) \to S$ medibles tal que para todo $F \in F(S)$,

$$F = \overline{\{d_n(F) : n \in \mathbb{N}\}}.$$

Corolario

Si $\langle S, \mathcal{S}, R\rangle$ es un MKM con S polaco tal que $R[s]$ es cerrado para todo s, entonces hay funciones medibles $r_n : S \to S$ tales que para todo s,

$$R[s] = \overline{\{r_n(s) : n \in \mathbb{N}\}}.$$

Demostración.

Pizarra. . .

Selectores Densos

Teorema (Kuratowski, Ryll-Nardzewski)

Para cada espacio polaco S existen $d_n : F(S) \to S$ medibles tal que para todo $F \in F(S)$,

$$F = \overline{\{d_n(F) : n \in \mathbb{N}\}}.$$

Corolario

Si $\langle S, \mathcal{S}, R \rangle$ es un MKM con S polaco tal que $R[s]$ es cerrado para todo s, entonces hay funciones medibles $r_n : S \to S$ tales que para todo s,

$$R[s] = \overline{\{r_n(s) : n \in \mathbb{N}\}}.$$

Demostración.

Pizarra. . .

de Córdoba AÑOS

Selectores Densos

Teorema (Kuratowski, Ryll-Nardzewski)

Para cada espacio polaco S existen $d_n : F(S) \to S$ medibles tal que para todo $F \in F(S)$,

$$F = \overline{\{d_n(F) : n \in \mathbb{N}\}}.$$

Corolario

Si $\langle S, \mathcal{S}, R\rangle$ es un MKM con S polaco tal que $R[s]$ es cerrado para todo s, entonces hay funciones medibles $r_n : S \to S$ tales que para todo s,

$$R[s] = \overline{\{r_n(s) : n \in \mathbb{N}\}}.$$

Demostración.

Pizarra. . .

Determinización finita

Teorema

*Todo MKM de **imagen finita** sobre un espacio polaco se puede determinizar.*

Demostración.

Un espacio metrizable es Hausdorff $\Longrightarrow$ $R[s]$ es cerrado.

Tomo los selectores densos del Corolario r_n y tengo

$$R[s] := \overline{\{r_n(s) : n \in \mathbb{N}\}} = \{r_n(s) : n \in \mathbb{N}\},$$

pues es finito el conjunto.

Observación

No consigo descomponer en finitos MKM.

Determinización finita

Teorema

*Todo MKM de **imagen finita** sobre un espacio polaco se puede determinizar.*

Demostración.

Un espacio metrizable es Hausdorff $\Longrightarrow R[s]$ es cerrado.
Tomo los selectores densos del Corolario r_n y tengo

$$R[s] := \overline{\{r_n(s) : n \in \mathbb{N}\}} = \{r_n(s) : n \in \mathbb{N}\},$$

pues es finito el conjunto.

Observación

No consigo descomponer en finitos MKM.

Determinización finita

Teorema

*Todo MKM de **imagen finita** sobre un espacio polaco se puede determinizar.*

Demostración.

Un espacio metrizable es Hausdorff $\implies R[s]$ es cerrado.
Tomo los selectores densos del Corolario r_n y tengo

$$R[s] := \overline{\{r_n(s) : n \in \mathbb{N}\}} = \{r_n(s) : n \in \mathbb{N}\},$$

pues es finito el conjunto.

Observación

No consigo descomponer en finitos MKM.

Determinización finita

Teorema

*Todo MKM de **imagen finita** sobre un espacio polaco se puede determinizar.*

Demostración.

Un espacio metrizable es Hausdorff $\implies R[s]$ es cerrado.
Tomo los selectores densos del Corolario r_n y tengo

$$R[s] := \overline{\{r_n(s) : n \in \mathbb{N}\}} = \{r_n(s) : n \in \mathbb{N}\},$$

pues es finito el conjunto.

Observación

No consigo descomponer en finitos MKM.

Lema

Si $\langle S, \mathcal{S}, R\rangle$ es determinista, entonces la función $s \mapsto$ (único s' tal que $s\,R\,s'$) es medible.

Problema

Sea $\mathbf{S}$ MKM tal que $R[s]$ es finito para todo $s \in S$. ¿Puedo determinizarlo con MKMs deterministas? ¿Está hecho de funciones medibles?

Más fácil, $R[s] = \{u_s, v_s\}$ para todo s.

$$\begin{aligned}
\Diamond Q &= \{s : R[s] \cap Q \neq \varnothing\} \\
&= \{s : \{u_s, v_s\} \cap Q \neq \varnothing\} \\
&= \{s : u_s \in Q \text{ ó } v_s \in Q\} \\
&= \{s : u_s \in Q\} \cup \{s : v_s \in Q\} \\
&= u^{-1}[Q] \cup v^{-1}[Q]. \text{ ???}
\end{aligned}$$

Problema

Sea $\mathbf{S}$ MKM tal que $R[s]$ **tiene dos elementos** para todo $s \in S$. ¿Puedo determinizarlo con **dos** MKMs deterministas? ¿Está hecho de **dos** funciones medibles?

¡Gracias!