Análisis I*

Pedro Sánchez Terraf

Seminario de Alumn∗s
FaMAF, 24 de junio de 2022

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

La (infame) definición de límite

En primer año de la facultad nos enfrentamos a:

- $\lim_{x\to w} f(x) = l$ ***si y sólo si***

$$\forall\varepsilon > 0 \;\exists\delta > 0 \;\forall x : 0 < |x - w| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

La (infame) definición de límite

En primer año de la facultad nos enfrentamos a:

- $\lim_{x\to w} f(x) = l$ *si y sólo si*

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x : 0 < |x - w| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

¿Más complicada que... la definición de un R-módulo? No realmente, pero ¿por qué cuesta tanto?

La (infame) definición de límite

En primer año de la facultad nos enfrentamos a:

- $\lim_{x\to w} f(x) = l$ *si y sólo si*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x : 0 < |x - w| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

¿Más complicada que… la definición de un R-módulo? No realmente, pero ¿por qué cuesta tanto?

Alternancia de cuantificadores

El problema está en tanto cambio. (¿climático?)

La (infame) definición de límite

En primer año de la facultad nos enfrentamos a:

- $\lim_{x \to w} f(x) = l$ *si y sólo si*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x : 0 < |x - w| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

¿Más complicada que... la definición de un R-módulo? No realmente, pero ¿por qué cuesta tanto?

Alternancia de cuantificadores

El problema está en tanto cambio. (¿climático?)

¿Recuerdan otra definición con más cambios? ¿Igual?

Cuantificadores alternados

Sea $P(x, y)$ alguna propiedad de dos números naturales x y y.

Cuantificadores alternados

Sea $P(x, y)$ alguna propiedad de dos números naturales x y y.

Ejercicio (*Propiedad Conmutativa de Cuantificadores*)

¿Son equivalentes?

1. $\forall x\ \exists y\ P(x, y)$;
2. $\exists y\ \forall x\ P(x, y)$;
3. $\exists y\ \forall x\ P(y, x)$;
4. $\forall y\ \exists x\ P(y, x)$.

Cuantificadores alternados

Sea $P(x, y)$ alguna propiedad de dos números naturales x y y.

Ejercicio (*Propiedad Conmutativa de Cuantificadores*)

¿Son equivalentes?

1. $\forall x\ \exists y\ P(x, y)$;
2. $\exists y\ \forall x\ P(x, y)$;
3. $\exists y\ \forall x\ P(y, x)$;
4. $\forall y\ \exists x\ P(y, x)$.

Spoileación

- "Fácil": distinguimos pensando en $P(x, y) := x < y \quad (x \leq y)$.

Cuantificadores alternados

Sea $P(x, y)$ alguna propiedad de dos números naturales x y y.

Ejercicio (*Propiedad Conmutativa de Cuantificadores*)

¿Son equivalentes?

1. $\forall x\ \exists y\ P(x, y)$;
2. $\exists y\ \forall x\ P(x, y)$;
3. $\exists y\ \forall x\ P(y, x)$;
4. $\forall y\ \exists x\ P(y, x)$.

Spoileación

- "Fácil": distinguimos pensando en $P(x, y) := x < y \quad (x \leq y)$.
- ¿Fácil?: *justificar* que 1 y 4 son equivalentes.

Algebrizando existenciales

Dos presentaciones de los axiomas de grupo:

- $\forall x, y, z : x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.
- $\forall x : x \cdot e = x = e \cdot x$.
- $\forall x\ \exists y : x \cdot y = e = y \cdot x$.

Algebrizando existenciales

Dos presentaciones de los axiomas de grupo:

- $\forall x, y, z : x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.
- $\forall x : x \cdot e = x = e \cdot x$.
- $\forall x \; \exists y : x \cdot y = e = y \cdot x$.

- $\forall x, y, z : x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.
- $\forall x : x \cdot e = x = e \cdot x$.
- $\forall x : x \cdot i(x) = e = i(x) \cdot x$.

Algebrizando existenciales

Dos presentaciones de los axiomas de grupo:

- $\forall x, y, z : x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.
- $\forall x : x \cdot e = x = e \cdot x$.
- $\forall x \, \exists y : x \cdot y = e = y \cdot x$.

- $\forall x, y, z : x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.
- $\forall x : x \cdot e = x = e \cdot x$.
- $\forall x : x \cdot i(x) = e = i(x) \cdot x$.

Hay un procedimiento general para eliminar el $\exists$:

Algebrizando existenciales

Dos presentaciones de los axiomas de grupo:

- $\forall x, y, z : x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.
- $\forall x : x \cdot e = x = e \cdot x$.
- $\forall x\ \exists y : x \cdot y = e = y \cdot x$.

- $\forall x, y, z : x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.
- $\forall x : x \cdot e = x = e \cdot x$.
- $\forall x : x \cdot i(x) = e = i(x) \cdot x$.

Hay un procedimiento general para eliminar el $\exists$:

Skolemización

$$\forall x\ \exists y\ P(x, y) \iff \exists Y\ \forall x\ P(x, Y(x))$$

Algebrizando existenciales

Dos presentaciones de los axiomas de grupo:

- $\forall x, y, z : x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.
- $\forall x : x \cdot e = x = e \cdot x$.
- $\forall x \; \exists y : x \cdot y = e = y \cdot x$.

- $\forall x, y, z : x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.
- $\forall x : x \cdot e = x = e \cdot x$.
- $\forall x : x \cdot i(x) = e = i(x) \cdot x$.

Hay un procedimiento general para eliminar el $\exists$:

Skolemización

$$\forall x \; \exists y \; P(x, y) \iff \exists Y \; \forall x \; P(x, Y(x))$$

Notar: La ida es esencialmente AC.

Algebrizando existenciales

Dos presentaciones de los axiomas de grupo:

- $\forall x, y, z : x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.
- $\forall x : x \cdot e = x = e \cdot x$.
- $\forall x\ \exists y : x \cdot y = e = y \cdot x$.

- $\forall x, y, z : x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.
- $\forall x : x \cdot e = x = e \cdot x$.
- $\forall x : x \cdot i(x) = e = i(x) \cdot x$.

Hay un procedimiento general para eliminar el $\exists$:

Skolemización

$$\forall x\ \exists y\ P(x, y) \iff \exists Y\ \forall x\ P(x, Y(x))$$

Notar: La ida es esencialmente AC.

Pero: No hace falta AC para ver que las dos presentaciones de grupo son equivalentes.

Digresión I: Razonamiento ecuacional

(sinceráte, toda la charla lo es)

Digresión I: Razonamiento ecuacional

(sinceráte, toda la charla lo es)

Realmente, escribiríamos los axiomas de grupo así:

- $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.
- $x \cdot e = x = e \cdot x$.
- $x \cdot i(x) = e = i(x) \cdot x$.

Digresión I: Razonamiento ecuacional

(sinceráte, toda la charla lo es)

Realmente, escribiríamos los axiomas de grupo así:

- $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.
- $x \cdot e = x = e \cdot x$.
- $x \cdot i(x) = e = i(x) \cdot x$.

$$\forall x\ \exists y\ P(x,y) \quad \rightsquigarrow \quad P(x, Y(x))$$

De hecho, operamos como si no estuvieran los $\forall$.

Digresión I: Razonamiento ecuacional

(sinceráte, toda la charla lo es)

Realmente, escribiríamos los axiomas de grupo así:

- $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.
- $x \cdot e = x = e \cdot x$.
- $x \cdot i(x) = e = i(x) \cdot x$.

$$\forall x\ \exists y\ P(x, y) \quad \rightsquigarrow \quad P(x, Y(x))$$

De hecho, operamos como si no estuvieran los $\forall$.

Inducción "trivial"

Casi exclusivamente sobre enunciados sin cuantificadores.
Probar "*Para todo* $n \in \mathbb{N}$, $\forall x\ P(n, x)$" ya se pone peludo.

Digresión I: Razonamiento ecuacional

(sinceráte, toda la charla lo es)

Realmente, escribiríamos los axiomas de grupo así:

- $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.
- $x \cdot e = x = e \cdot x$.
- $x \cdot i(x) = e = i(x) \cdot x$.

$$\forall x \, \exists y \, P(x,y) \quad \rightsquigarrow \quad P(x, Y(x))$$

De hecho, operamos como si no estuvieran los $\forall$.

Inducción "trivial"

Casi exclusivamente sobre enunciados sin cuantificadores.
Probar "*Para todo* $n \in \mathbb{N}$*,* $\forall x \; P(n,x)$" ya se pone peludo.

Fijados n y x, las HI $P(m,y)$ con $m < n$ e y necesarias para ver $P(n,x)$ pueden tener complejidad mucho mayor que las de este último.

Back to square one

La mejor oportunidad que tenemos frente a

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x : 0 < |x - w| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

es pensarlo como un juego.

Back to square one

La mejor oportunidad que tenemos frente a

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x : 0 < |x - w| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

es pensarlo como un juego.
Reescribamos, donde

$$\varphi(\varepsilon, \delta, x, w, l) \quad := \quad \varepsilon > 0 \Rightarrow (\delta > 0 \wedge (0 < |x - w| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)).$$

Back to square one

La mejor oportunidad que tenemos frente a

$$\forall\varepsilon\ \exists\delta\ \forall x :\ \varphi(\varepsilon,\delta,x,w,l)$$

es pensarlo como un juego.
Reescribamos, donde

$$\varphi(\varepsilon,\delta,x,w,l) \quad := \quad \varepsilon > 0 \Rightarrow (\delta > 0 \wedge (0 < |x-w| < \delta \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon)).$$

Back to square one

La mejor oportunidad que tenemos frente a

$$\forall\varepsilon\ \exists\delta\ \forall x:\ \varphi(\varepsilon,\delta,x,w,l)$$

es pensarlo como un juego.
Reescribamos, donde

$$\varphi(\varepsilon,\delta,x,w,l) \quad := \quad \varepsilon > 0 \Rightarrow (\delta > 0 \wedge (0 < |x-w| < \delta \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon)).$$

∃loísa quiere demostrarlo y ∀belardo refutarlo.
Partida:

Back to square one

La mejor oportunidad que tenemos frente a

$$\color{red}{\forall\varepsilon}\ \exists\delta\ \forall x:\ \varphi(\varepsilon,\delta,x,w,l)$$

es pensarlo como un juego.
Reescribamos, donde

$$\varphi(\varepsilon,\delta,x,w,l) \quad := \quad \varepsilon > 0 \Rightarrow (\delta > 0 \wedge (0 < |x-w| < \delta \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon)).$$

∃loísa quiere demostrarlo y ∀belardo refutarlo.
Partida:

1. ∀belardo juega ε;

Back to square one

La mejor oportunidad que tenemos frente a

$$\forall \varepsilon \; \exists \delta \; \forall x : \; \varphi(\varepsilon, \delta, x, w, l)$$

es pensarlo como un juego.
Reescribamos, donde

$$\varphi(\varepsilon, \delta, x, w, l) \quad := \quad \varepsilon > 0 \Rightarrow (\delta > 0 \wedge (0 < |x - w| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)).$$

∃loísa quiere demostrarlo y ∀belardo refutarlo.
Partida:

1. ∀belardo juega ε;
2. ∃loísa juega δ;

Back to square one

La mejor oportunidad que tenemos frente a

$$\forall\varepsilon\ \exists\delta\ \forall x:\ \varphi(\varepsilon,\delta,x,w,l)$$

es pensarlo como un juego.
Reescribamos, donde

$$\varphi(\varepsilon,\delta,x,w,l) \quad := \quad \varepsilon>0 \Rightarrow (\delta>0 \wedge (0<|x-w|<\delta \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon)).$$

∃loísa quiere demostrarlo y ∀belardo refutarlo.
Partida:

1. ∀belardo juega ε;
2. ∃loísa juega δ;
3. ∀belardo juega x;

Universidad Nacional de Córdoba — UNC — 1613 - 2013 400 AÑOS

Back to square one

La mejor oportunidad que tenemos frente a

$$\forall\varepsilon\ \exists\delta\ \forall x:\ \varphi(\varepsilon,\delta,x,w,l)$$

es pensarlo como un juego.
Reescribamos, donde

$$\varphi(\varepsilon,\delta,x,w,l) \quad := \quad \varepsilon > 0 \Rightarrow (\delta > 0 \wedge (0 < |x-w| < \delta \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon)).$$

∃loísa quiere demostrarlo y ∀belardo refutarlo.
Partida:

1. ∀belardo juega ε;
2. ∃loísa juega δ;
3. ∀belardo juega x;

Gana ∃loísa si (y sólo si) $\langle\varepsilon,\delta,x\rangle$ está en el conjunto

$$X := \{\langle a,b,c\rangle \in \mathbb{R}^3 : \varphi(a,b,c,w,l)\}.$$

TEG

$$\forall \varepsilon \quad \exists \delta \quad \forall x : \quad \varphi(\varepsilon, \delta, x, w, l). \tag{1}$$

Tenemos

- ∃loísa gana $\iff \langle \varepsilon, \delta, x \rangle \in X := \{\langle a, b, c \rangle \in \mathbb{R}^3 : \varphi(a, b, c, w, l)\}$.
- No hay empates.

TEG

$$\forall \varepsilon \quad \exists \delta \quad \forall x : \quad \varphi(\varepsilon, \delta, x, w, l). \tag{1}$$

Tenemos

- ∃loísa gana $\iff \langle \varepsilon, \delta, x \rangle \in X := \{\langle a, b, c \rangle \in \mathbb{R}^3 : \varphi(a, b, c, w, l)\}$.
- No hay empates.

En este esquema, demostrar (1) equivale a dar una estrategia ganadora para ∃loísa.

TEG

$$\forall\varepsilon \quad \exists\delta \quad \forall x : \quad \varphi(\varepsilon,\delta,x,w,l). \tag{1}$$

Tenemos

- ∃loísa gana $\iff \langle\varepsilon,\delta,x\rangle \in X := \{\langle a,b,c\rangle \in \mathbb{R}^3 : \varphi(a,b,c,w,l)\}$.
- No hay empates.

En este esquema, demostrar (1) equivale a dar una estrategia ganadora para ∃loísa.

¿Qué significa que no tenga una?

TEG

$$\neg\forall\varepsilon \quad \exists\delta \quad \forall x : \quad \varphi(\varepsilon,\delta,x,w,l). \tag{1}$$

Tenemos

- ∃loísa gana $\iff \langle\varepsilon,\delta,x\rangle \in X := \{\langle a,b,c\rangle \in \mathbb{R}^3 : \varphi(a,b,c,w,l)\}$.
- No hay empates.

En este esquema, demostrar (1) equivale a dar una estrategia ganadora para ∃loísa.

¿Qué significa que no tenga una?

TEG

$$\exists\varepsilon\ \neg\exists\delta \quad \forall x : \quad \varphi(\varepsilon,\delta,x,w,l). \tag{1}$$

Tenemos

- ∃loísa gana $\iff \langle\varepsilon,\delta,x\rangle \in X := \{\langle a,b,c\rangle \in \mathbb{R}^3 : \varphi(a,b,c,w,l)\}$.
- No hay empates.

En este esquema, demostrar (1) equivale a dar una estrategia ganadora para ∃loísa.

¿Qué significa que no tenga una?

TEG

$$\exists\varepsilon \quad \forall\delta \neg\forall x : \quad \varphi(\varepsilon, \delta, x, w, l). \tag{1}$$

Tenemos

- ∃loísa gana $\iff \langle\varepsilon, \delta, x\rangle \in X := \{\langle a, b, c\rangle \in \mathbb{R}^3 : \varphi(a, b, c, w, l)\}$.
- No hay empates.

En este esquema, demostrar (1) equivale a dar una estrategia ganadora para ∃loísa.

¿Qué significa que no tenga una?

TEG

$$\exists\varepsilon \quad \forall\delta \quad \exists x : \neg\varphi(\varepsilon, \delta, x, w, l). \tag{1}$$

Tenemos

- ∃loísa gana $\iff \langle\varepsilon, \delta, x\rangle \in X := \{\langle a, b, c\rangle \in \mathbb{R}^3 : \varphi(a, b, c, w, l)\}$.
- No hay empates.

En este esquema, demostrar (1) equivale a dar una estrategia ganadora para ∃loísa.
¿Qué significa que no tenga una?

TEG

$$\exists\varepsilon \quad \forall\delta \quad \exists x : \neg\varphi(\varepsilon, \delta, x, w, l). \tag{1}$$

Tenemos

- ∃loísa gana $\iff \langle\varepsilon, \delta, x\rangle \in X := \{\langle a, b, c\rangle \in \mathbb{R}^3 : \varphi(a, b, c, w, l)\}$.
- No hay empates.

En este esquema, demostrar (1) equivale a dar una estrategia ganadora para ∃loísa.

¿Qué significa que no tenga una?

Que ∀belardo tiene estrategia ganadora (por De Morgan).

Digresión II: Determinación

Ahora imaginemos un juego *largo*.

Digresión II: Determinación

Ahora imaginemos un juego *largo*.

Tenemos cierto $X \subseteq A^{\mathbb{N}}$ $\quad (A := \{0,1\}, \{0,\dots,9\}, \mathbb{N}_0, \mathbb{R}, \dots)$

∃loísa quiere probar:

$$\forall a_1\ \exists a_2\ \forall a_3\ \exists a_4 \cdots : \bar{a} \in X \tag{2}$$

Digresión II: Determinación

Ahora imaginemos un juego *largo*.
Tenemos cierto $X \subseteq A^{\mathbb{N}}$ $\quad (A := \{0,1\}, \{0,\dots,9\}, \mathbb{N}_0, \mathbb{R}, \dots)$
∃loísa quiere probar:

$$\forall a_1\ \exists a_2\ \forall a_3\ \exists a_4 \cdots : \bar{a} \in X \tag{2}$$

Nuevamente, (2) equivale a que ella tenga estrategia ganadora.

Digresión II: Determinación

Ahora imaginemos un juego *largo*.
Tenemos cierto $X \subseteq A^{\mathbb{N}}$ $\quad (A := \{0,1\}, \{0,\dots,9\}, \mathbb{N}_0, \mathbb{R}, \dots)$
∃loísa quiere probar:

$$\forall a_1\ \exists a_2\ \forall a_3\ \exists a_4 \cdots : \bar{a} \in X \tag{2}$$

Nuevamente, (2) equivale a que ella tenga estrategia ganadora. Y si no la tiene, aplicamos De Morgan y…

Digresión II: Determinación

Ahora imaginemos un juego *largo*.
Tenemos cierto $X \subseteq A^{\mathbb{N}}$ $\quad (A := \{0, 1\}, \{0, \ldots, 9\}, \mathbb{N}_0, \mathbb{R}, \ldots)$
∃loísa quiere probar:

$$\forall a_1 \; \exists a_2 \; \forall a_3 \; \exists a_4 \cdots : \bar{a} \in X \tag{2}$$

Nuevamente, (2) equivale a que ella tenga estrategia ganadora. Y si no la tiene, aplicamos De Morgan y…
No.

Ahora imaginemos un juego *largo*.
Tenemos cierto $X \subseteq A^{\mathbb{N}}$ $\quad (A := \{0,1\}, \{0,\dots,9\}, \mathbb{N}_0, \mathbb{R},\dots)$
∃loísa quiere probar:

$$\forall a_1 \,\exists a_2 \,\forall a_3 \,\exists a_4 \cdots : \bar{a} \in X \tag{2}$$

Nuevamente, (2) equivale a que ella tenga estrategia ganadora. Y si no la tiene, aplicamos De Morgan y…

No.

De Morgan infinito no es cierto!

Tomar X un conjunto de Bernstein (por ejemplo, en el conjunto de Cantor $\mathscr{C} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$).

Digresión II: Determinación

Ahora imaginemos un juego *largo*.
Tenemos cierto $X \subseteq A^{\mathbb{N}}$ $\quad (A := \{0,1\}, \{0,\dots,9\}, \mathbb{N}_0, \mathbb{R}, \dots)$
$\exists$loísa quiere probar:

$$\forall a_1\ \exists a_2\ \forall a_3\ \exists a_4 \cdots : \bar{a} \in X \tag{2}$$

Nuevamente, (2) equivale a que ella tenga estrategia ganadora. Y si no la tiene, aplicamos De Morgan y…

No.

De Morgan infinito no es cierto!

Tomar X un conjunto de Bernstein (por ejemplo, en el conjunto de Cantor $\mathscr{C} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$). $\longleftarrow$ requiere AC!

Le sumamos un $\forall$ más:

$$\forall w\ \forall \varepsilon\ \exists \delta\ \forall x : \varphi(\varepsilon, \delta, x, w, f(w)).$$

Continuidad

Le sumamos un $\forall$ más:

$$\forall w\ \forall \varepsilon\ \exists \delta\ \forall x : \varphi(\varepsilon, \delta, x, w, f(w)).$$

La complejidad lógica no aumentó (pero el vivo de ∀belardo tiene dos movidas seguidas).

Le sumamos un $\forall$ más:

$$\forall w\ \forall \varepsilon\ \exists \delta\ \forall x : \varphi(\varepsilon, \delta, x, w, f(w)).$$

La complejidad lógica no aumentó (pero el vivo de ∀belardo tiene dos movidas seguidas).

A Cauchy también le costaba

Aplicó *Conmutatividad de Cuantificadores* alguna vez!

Continuidad

Le sumamos un $\forall$ más:

$$\forall w\ \forall \varepsilon\ \exists \delta\ \forall x : \varphi(\varepsilon, \delta, x, w, f(w)).$$

La complejidad lógica no aumentó (pero el vivo de ∀belardo tiene dos movidas seguidas).

A Cauchy también le costaba

Aplicó *Conmutatividad de Cuantificadores* alguna vez!

Continuidad

Le sumamos un $\forall$ más:

$$\forall \varepsilon \; \forall w \; \exists \delta \; \forall x : \varphi(\varepsilon, \delta, x, w, f(w)).$$

La complejidad lógica no aumentó (pero el vivo de ∀belardo tiene dos movidas seguidas).

A Cauchy también le costaba

Aplicó *Conmutatividad de Cuantificadores* alguna vez!

Continuidad

Le sumamos un $\forall$ más:

$$\forall\varepsilon\ \exists\delta\ \forall w\ \forall x : \varphi(\varepsilon,\delta,x,w,f(w)).$$

La complejidad lógica no aumentó (pero el vivo de ∀belardo tiene dos movidas seguidas).

A Cauchy también le costaba

Aplicó *Conmutatividad de Cuantificadores* alguna vez!

…se le confundió con continuidad uniforme.

…en Topología

$$\forall w\ \forall \varepsilon\ \exists \delta\ \forall x : \varphi(\varepsilon, \delta, x, w, f(w)).$$

…en Topología

$$\forall w \, \forall \varepsilon \, \exists \delta \, \forall x : \varphi(\varepsilon, \delta, x, w, f(w)).$$

¿Qué clase de brujería cambia este esperpento por

“*Preimágenes de abiertos son abiertas*” ?

…en Topología

$$\forall w\ \forall\varepsilon\ \exists\delta\ \forall x : \varphi(\varepsilon, \delta, x, w, f(w)).$$

¿Qué clase de brujería cambia este esperpento por

"*Preimágenes de abiertos son abiertas*" ?

Aparentemente, la complejidad bajó a un solo $\forall$ (*Para todo abierto…*).

. . . en Topología

$$\forall w\ \forall \varepsilon\ \exists \delta\ \forall x : \varphi(\varepsilon, \delta, x, w, f(w)).$$

¿Qué clase de brujería cambia este esperpento por

"*Preimágenes de abiertos son abiertas*" ?

Aparentemente, la complejidad bajó a un solo $\forall$ (*Para todo abierto. . .*).

Enter Alto Orden

La cuantificación ahora es sobre subconjuntos de $\mathbb{R}$ (orden 2), no sobre sus elementos ("primer orden").

…en Topología

$$\forall w\ \forall \varepsilon\ \exists \delta\ \forall x : \varphi(\varepsilon, \delta, x, w, f(w)).$$

¿Qué clase de brujería cambia este esperpento por

"*Preimágenes de abiertos son abiertas*" ?

Aparentemente, la complejidad bajó a un solo $\forall$ (*Para todo abierto…*).

Enter Alto Orden

La cuantificación ahora es sobre subconjuntos de $\mathbb{R}$ (orden 2), no sobre sus elementos ("primer orden").

Las propiedades (expresables en la lógica) de primer orden se dicen "elementales".

Esta reducción es otra “algebrización”, pero ahora pasando al álgebra de subconjuntos del espacio de base.

Esta reducción es otra “algebrización”, pero ahora pasando al álgebra de subconjuntos del espacio de base.

La complejidad está en que esta álgebra es **infinitaria**:

$$\bigcup_{i\in I} A_i \qquad \bigcap_{i\in I} A_i \qquad \prod_{j\in J} A_J$$

Esta reducción es otra “algebrización”, pero ahora pasando al álgebra de subconjuntos del espacio de base.

La complejidad está en que esta álgebra es **infinitaria**:

$$\bigcup_{i \in I} A_i \qquad \bigcap_{i \in I} A_i \qquad \prod_{j \in J} A_J$$

¡Ojo! Cuantificación escondida:

$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \iff \forall i \in I : x \in A_i.$$

Aún si I es numerable (y J es finito!), la cosa es no trivial.

Ejemplo: $B \subseteq \mathbb{R}^n$ Borel

Generados por bolas abiertas mediante complementos y uniones (intersecciones) numerables.

Ejemplo: $B \subseteq \mathbb{R}^n$ Borel

Generados por bolas abiertas mediante complementos y uniones (intersecciones) numerables.

- Borel_1 := abiertos y cerrados.
- Borel_{n+1} := uniones e intersecciones numerables de cosas en Borel_n.
- Borel := $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \text{Borel}_n$.

Ejemplo: $B \subseteq \mathbb{R}^n$ Borel

Generados por bolas abiertas mediante complementos y uniones (intersecciones) numerables.

- $\text{Borel}_1 :=$ abiertos y cerrados.
- $\text{Borel}_{n+1} :=$ uniones e intersecciones numerables de cosas en Borel_n.
- $\text{Borel} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \text{Borel}_n$.

No.

. . . en Topología y Funciones Reales

Ejemplo: $B \subseteq \mathbb{R}^n$ Borel

Generados por bolas abiertas mediante complementos y uniones (intersecciones) numerables.

- Borel_1 := abiertos y cerrados.
- Borel_{n+1} := uniones e intersecciones numerables de cosas en Borel_n.
- Borel := $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \text{Borel}_n$.

No.

Nous pouvons donc appliquer le procédé de M. Cantor aux fonctions $f(t, x)$; posons $\varphi(x) = 0$, sauf quand $f(x, x)$ a un sens et est égal à 0, auquel cas nous prendrons $\varphi(x) = 1$. Il est évident que $\varphi(x)$ est représentable analytiquement et n'est pas de classe égale ou inférieure à α. *Donc il existe des fonctions de toute classe*; c'est-à-dire

…en Topología y Funciones Reales

Ejemplo: $B \subseteq \mathbb{R}^n$ Borel

Generados por bolas abiertas mediante complementos y uniones (intersecciones) numerables.

- $\text{Borel}_1 :=$ abiertos y cerrados.
- $\text{Borel}_{n+1} :=$ uniones e intersecciones numerables de cosas en Borel_n.
- $\text{Borel} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Borel}_n$.

No.

Nous pouvons donc appliquer le procédé de M. Cantor aux fonctions $f(t, x)$; posons $\varphi(x) = 0$, sauf quand $f(x, x)$ a un sens et est égal à 0, auquel cas nous prendrons $\varphi(x) = 1$. Il est évident que $\varphi(x)$ est représentable analytiquement et n'est pas de classe égale ou inférieure à α. *Donc il existe des fonctions de toute classe*; c'est-à-dire

Lebesgue [1905] prueba que existen funciones/conjuntos *propiamente* α*-Borel* para cada $\alpha < \omega_1$.

En el mismo paper,

Lema

Sea $B \subseteq \mathbb{R}^2$ Borel. Entonces $\pi_1(B) \subseteq \mathbb{R}$ es Borel.

En el mismo paper,

Lema

Sea $B \subseteq \mathbb{R}^2$ Borel. Entonces $\pi_1(B) \subseteq \mathbb{R}$ es Borel.

Ni Lebesgue se salvó. . . Este lema es **falso**.

En el mismo paper,

Lema

Sea $B \subseteq \mathbb{R}^2$ Borel. Entonces $\pi_1(B) \subseteq \mathbb{R}$ es Borel.

Ni Lebesgue se salvó. . . Este lema es **falso**. (Pero el resto de los resultados valen!)

En el mismo paper,

Lema

Sea $B \subseteq \mathbb{R}^2$ Borel. Entonces $\pi_1(B) \subseteq \mathbb{R}$ es Borel.

Ni Lebesgue se salvó. . . Este lema es **falso**. (Pero el resto de los resultados valen!)

Teoría de Conjuntos Descriptiva

Estudio de la complejidad de funciones y subconjuntos de espacios métricos completos y separables.

Digresión III: Cebáte con la algebrización

Otro Pedro cita y reflexiona:

> *Mumford writes* "Algebraic geometry seems to have acquired the reputation of being esoteric, exclusive, and very abstract, with adherents who are secretly plotting to take over all the rest of mathematics. In one respect this last point is accurate." *For some reason, this secret plot has so far stopped short of taking over analysis. The goal of this course is to launch a new attack, turning functional analysis into a branch of commutative algebra* [...]

Digresión III: Cebáte con la algebrización

Otro Pedro cita y reflexiona:

> *Mumford writes* "Algebraic geometry seems to have acquired the reputation of being esoteric, exclusive, and very abstract, with adherents who are secretly plotting to take over all the rest of mathematics. In one respect this last point is accurate." *For some reason, this secret plot has so far stopped short of taking over analysis. The goal of this course is to launch a new attack, turning functional analysis into a branch of commutative algebra* [...]

Scholze [2019b,a] propone reemplazar la categoría de los espacios topológicos por una que se comporta mejor, los **conjuntos condensados**.

Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

¿¿Alguien puede pensar en los épsilons??

Volvamos al problema inicial

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x : 0 < |x - w| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

¿¿Alguien puede pensar en los épsilons??

Volvamos al problema inicial

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x : 0 < |x - w| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

De hecho, Newton y Leibnitz no escribieron así.

¿¿Alguien puede pensar en los épsilons??

Volvamos al problema inicial

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x : 0 < |x - w| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

De hecho, Newton y Leibnitz no escribieron así.

Si x está infinitamente cerca a w, entonces $f(x)$ está infinitamente cerca a l

$$\forall x : x \approx w \implies f(x) \approx l$$

¡Apa! Un solo $\forall$.

¿¿Alguien puede pensar en los épsilons??

Volvamos al problema inicial

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x : 0 < |x - w| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

De hecho, Newton y Leibnitz no escribieron así.

Si x está infinitamente cerca a w, entonces $f(x)$ está infinitamente cerca a l

$$\forall x : x \approx w \implies f(x) \approx l$$

¡Apa! Un solo $\forall$. Y por el mismo precio, ¡derivadas!

$$\Delta x \approx 0 \implies \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \approx D$$

¿¿Alguien puede pensar en los ceros??

$$\Delta x \approx 0 \implies \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \approx D$$

¿¿Alguien puede pensar en los ceros??

$$\Delta x \approx 0 \implies \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \approx D$$

Si acaso no se da $0 \approx 0$, no sé qué krj significa “infinitamente cerca”.

¿¿Alguien puede pensar en los ceros??

$$\Delta x \approx 0 \implies \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \approx D$$

Si acaso no se da $0 \approx 0$, no sé qué krj significa “infinitamente cerca”.

…tan blds no eran, pero ¿tienen sentido los infinitésimos?

¿¿Alguien puede pensar en los ceros??

$$\Delta x \approx 0 \implies \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \approx D$$

Si acaso no se da $0 \approx 0$, no sé qué krj significa "infinitamente cerca".

…tan blds no eran, pero ¿tienen sentido los infinitésimos?

Análisis no estándar (Robinson [1961, 1996])

Existe una extensión de cuerpo ordenado $^* : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^*$ (**hiperreales**) que satisface

¿¿Alguien puede pensar en los ceros??

$$\Delta x \approx 0 \implies \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \approx D$$

Si acaso no se da $0 \approx 0$, no sé qué krj significa “infinitamente cerca”.

…tan blds no eran, pero ¿tienen sentido los infinitésimos?

Análisis no estándar (Robinson [1961, 1996])

Existe una extensión de cuerpo ordenado $^* : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^*$ (**hiperreales**) que satisface

- Existe $0 \neq \varepsilon \in \mathbb{R}^*$ tal que $\forall x \in \mathbb{R} : 0 < x \implies |\varepsilon| < x$.

¿¿Alguien puede pensar en los ceros??

$$\Delta x \approx 0 \implies \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \approx D$$

Si acaso no se da $0 \approx 0$, no sé qué krj significa "infinitamente cerca".

. . . tan blds no eran, pero ¿tienen sentido los infinitésimos?

Análisis no estándar (Robinson [1961, 1996])

Existe una extensión de cuerpo ordenado $^* : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^*$ (**hiperreales**) que satisface

- Existe $0 \neq \varepsilon \in \mathbb{R}^*$ tal que $\forall x \in \mathbb{R} : 0 < x \implies |\varepsilon| < x$.
- Para toda función real f existe una **extensión natural** f^*.
  - (estructura de $\mathbb{R}$) $\xmapsto{*}$ (estructura de $\mathbb{R}^*$).

¿¿Alguien puede pensar en los ceros??

$$\Delta x \approx 0 \implies \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \approx D$$

Si acaso no se da $0 \approx 0$, no sé qué krj significa "infinitamente cerca".

...tan blds no eran, pero ¿tienen sentido los infinitésimos?

Análisis no estándar (Robinson [1961, 1996])

Existe una extensión de cuerpo ordenado $^* : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^*$ (**hiperreales**) que satisface

- Existe $0 \neq \varepsilon \in \mathbb{R}^*$ tal que $\forall x \in \mathbb{R} : 0 < x \implies |\varepsilon| < x$.
- Para toda función real f existe una **extensión natural** f^*.
  - (estructura de $\mathbb{R}$) $\xmapsto{*}$ (estructura de $\mathbb{R}^*$).
- (Keisler [1976]) **Transferencia**: Sean S y T sistemas de (in)ecuaciones. Son equivalentes:
  1. Toda solución real de S es una solución real de T
  2. Toda solución hiperreal de S^* es una solución hiperreal de T^*.

Cálculo Infinitesimal

- $\varepsilon \in \mathbb{R}^* \setminus \mathbb{R}$ es **infinitésimo**

- $\varepsilon \in \mathbb{R}^* \setminus \mathbb{R}$ es **infinitésimo** $\implies$ ε^{-1} es **infinito**.

Cálculo Infinitesimal

- $\varepsilon \in \mathbb{R}^* \setminus \mathbb{R}$ es **infinitésimo** $\implies \varepsilon^{-1}$ es **infinito**.
- ${}^* : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^*$.
- $f \mapsto f^*$;

Cálculo Infinitesimal

- $\varepsilon \in \mathbb{R}^* \setminus \mathbb{R}$ es **infinitésimo** $\implies$ ε^{-1} es **infinito**.
- $^* : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^*$.
- $f \mapsto f^*$; $\quad A \mapsto A^*$ $\quad$ (vía $\chi_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$).

Cálculo Infinitesimal

- $\varepsilon \in \mathbb{R}^* \setminus \mathbb{R}$ es **infinitésimo** $\implies$ ε^{-1} es **infinito**.
- ${}^* : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^*$.
- $f \mapsto f^*$; $\quad A \mapsto A^*$ $\quad$ (vía $\chi_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$).

Definimos $x \approx y \iff x - y$ es infinitésimo.

Lema

*Si $|x| < r$ para algún $r \in \mathbb{R}$ (x **finito**), entonces existe un único $\mathrm{st}(x) \in \mathbb{R}$ tal que $\mathrm{st}(x) \approx x$.*

Cálculo Infinitesimal

- $\varepsilon \in \mathbb{R}^* \setminus \mathbb{R}$ es **infinitésimo** $\implies \varepsilon^{-1}$ es **infinito**.
- ${}^* : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^*$.
- $f \mapsto f^*$; $\quad A \mapsto A^*$ $\quad$ (vía $\chi_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$).

Definimos $x \approx y \iff x - y$ es infinitésimo.

Lema

*Si $|x| < r$ para algún $r \in \mathbb{R}$ (x **finito**), entonces existe un único $\mathrm{st}(x) \in \mathbb{R}$ tal que $\mathrm{st}(x) \approx x$. El mapa $\mathrm{st} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ es un homomorfismo de anillos.*

- $\varepsilon \in \mathbb{R}^* \setminus \mathbb{R}$ es **infinitésimo** $\implies \varepsilon^{-1}$ es **infinito**.
- ${}^*: \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^*$.
- $f \mapsto f^*$; $\quad A \mapsto A^*$ (vía $\chi_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$).

Definimos $x \approx y \iff x - y$ es infinitésimo.

Lema

*Si $|x| < r$ para algún $r \in \mathbb{R}$ (x **finito**), entonces existe un único $\mathrm{st}(x) \in \mathbb{R}$ tal que $\mathrm{st}(x) \approx x$. El mapa $\mathrm{st} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ es un homomorfismo de anillos.*

Ejemplo de Transferencia: Existencia de raíces

Sea $sqrt : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ la raíz cuadrada positiva.

- $\varepsilon \in \mathbb{R}^* \setminus \mathbb{R}$ es **infinitésimo** $\implies$ ε^{-1} es **infinito**.
- ${}^*: \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^*$.
- $f \mapsto f^*$; $\quad A \mapsto A^*$ $\quad$ (vía $\chi_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$).

Definimos $x \approx y \iff x - y$ es infinitésimo.

Lema

*Si $|x| < r$ para algún $r \in \mathbb{R}$ (x **finito**), entonces existe un único $\mathrm{st}(x) \in \mathbb{R}$ tal que $\mathrm{st}(x) \approx x$. El mapa $\mathrm{st} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ es un homomorfismo de anillos.*

Ejemplo de Transferencia: Existencia de raíces

Sea $sqrt : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ la raíz cuadrada positiva.
Toda solución real x de $x \geq 0$ es solución de $sqrt(x) \cdot sqrt(x) = x$.

- $\varepsilon \in \mathbb{R}^* \setminus \mathbb{R}$ es **infinitésimo** $\implies$ ε^{-1} es **infinito**.
- ${}^* : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^*$.
- $f \mapsto f^*$; $\quad A \mapsto A^*$ $\quad$ (vía $\chi_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$).

Definimos $x \approx y \iff x - y$ es infinitésimo.

Lema

*Si $|x| < r$ para algún $r \in \mathbb{R}$ (x **finito**), entonces existe un único $\mathrm{st}(x) \in \mathbb{R}$ tal que $\mathrm{st}(x) \approx x$. El mapa $\mathrm{st} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ es un homomorfismo de anillos.*

Ejemplo de Transferencia: Existencia de raíces

Sea $sqrt : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ la raíz cuadrada positiva.
Toda solución real x de $x \geq 0$ es solución de $sqrt(x) \cdot sqrt(x) = x$. Luego, toda solución hiperreal x de $x \geq^* 0$ es solución de $sqrt^*(x) \cdot^* sqrt^*(x) = x$.

Muy mono Leibnitz, viaja en servicio diferencial

Definamos $\operatorname{monad}(x) := \{y \in \mathbb{R}^* : y \approx x\}$.

Muy mono Leibnitz, viaja en servicio diferencial

Definamos $\operatorname{monad}(x) := \{y \in \mathbb{R}^* : y \approx x\}$. Sean $c \in \mathbb{R}$ y $Y \subseteq \mathbb{R}$.

Lema ([Keisler, 1976, 1.28 y 1.30])

- $c \in \operatorname{int}(Y) \iff \operatorname{monad}(c) \subseteq Y^*$.

Muy mono Leibnitz, viaja en servicio diferencial

Definamos $\mathrm{monad}(x) := \{y \in \mathbb{R}^* : y \approx x\}$. Sean $c \in \mathbb{R}$ y $Y \subseteq \mathbb{R}$.

Lema ([Keisler, 1976, 1.28 y 1.30])

- $c \in \mathrm{int}(Y) \iff \mathrm{monad}(c) \subseteq Y^*$.
- f *está definida en algún intervalo abierto alrededor de* $c \iff f^*$ *está definida en* $\mathrm{monad}(c)$.

Es decir, la mónada de x es como un "germen" de intervalos abiertos.

Muy mono Leibnitz, viaja en servicio diferencial

Definamos $\operatorname{monad}(x) := \{y \in \mathbb{R}^* : y \approx x\}$. Sean $c \in \mathbb{R}$ y $Y \subseteq \mathbb{R}$.

Lema ([Keisler, 1976, 1.28 y 1.30])

- $c \in \operatorname{int}(Y) \iff \operatorname{monad}(c) \subseteq Y^*$.
- f *está definida en algún intervalo abierto alrededor de* $c \iff f^*$ *está definida en* $\operatorname{monad}(c)$.

Es decir, la mónada de x es como un "germen" de intervalos abiertos.

Dada la ecuación $y = f(x)$, sea Δx una variable nueva y agreguemos la ecuación $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Muy mono Leibnitz, viaja en servicio diferencial

Definamos $\operatorname{monad}(x) := \{y \in \mathbb{R}^* : y \approx x\}$. Sean $c \in \mathbb{R}$ y $Y \subseteq \mathbb{R}$.

Lema ([Keisler, 1976, 1.28 y 1.30])

- $c \in \operatorname{int}(Y) \iff \operatorname{monad}(c) \subseteq Y^*$.
- f *está definida en algún intervalo abierto alrededor de* $c \iff f^*$ *está definida en* $\operatorname{monad}(c)$.

Es decir, la mónada de x es como un "germen" de intervalos abiertos. Dada la ecuación $y = f(x)$, sea Δx una variable nueva y agreguemos la ecuación $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Definición (Derivada)

Si existe $D \in \mathbb{R}$ tal que para todo $0 \neq \Delta x \approx 0$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx D$, decimos $f'(x) := D$.

Muy mono Leibnitz, viaja en servicio diferencial

Definamos $\operatorname{monad}(x) := \{y \in \mathbb{R}^* : y \approx x\}$. Sean $c \in \mathbb{R}$ y $Y \subseteq \mathbb{R}$.

Lema ([Keisler, 1976, 1.28 y 1.30])

- $c \in \operatorname{int}(Y) \iff \operatorname{monad}(c) \subseteq Y^*$.
- f *está definida en algún intervalo abierto alrededor de* $c \iff f^*$ *está definida en* $\operatorname{monad}(c)$.

Es decir, la mónada de x es como un "germen" de intervalos abiertos.
Dada la ecuación $y = f(x)$, sea Δx una variable nueva y agreguemos la ecuación $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Definición (Derivada)

Si existe $D \in \mathbb{R}$ tal que para todo $0 \neq \Delta x \approx 0$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx D$, decimos $f'(x) := D$.
En ese caso,

$$dx := \Delta x \qquad dy := f'(x) \cdot \Delta x \qquad \therefore \quad f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Una cuenta al menos

- Dado $y = f(x)$: $\quad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x); \qquad f'(x) := \operatorname{st}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \frac{dy}{dx}$.

Una cuenta al menos

- Dado $y = f(x)$: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$; $f'(x) := \mathrm{st}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \frac{dy}{dx}$.

Teorema

Si $y = u + v$, entonces $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$ (si el lado derecho existe).

Una cuenta al menos

- Dado $y = f(x)$: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$; $f'(x) := \mathrm{st}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \frac{dy}{dx}$.

Teorema

Si $y = u + v$, entonces $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$ *(si el lado derecho existe).*

Demostración.

1. $\Delta y = g(x + \Delta x) + h(x + \Delta x) - (g(x) + h(x))$ $\quad$ $u{=}g(x)$, $v{=}h(x)$

Una cuenta al menos

- Dado $y = f(x)$: $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$; $\quad f'(x) := \mathrm{st}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \frac{dy}{dx}$.

Teorema

Si $y = u + v$, entonces $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$ (si el lado derecho existe).

Demostración.

1. $$\begin{aligned} \Delta y &= g(x+\Delta x) + h(x+\Delta x) - (g(x)+h(x)) \\ &= (\Delta u + u) + (\Delta v + v) - (u+v) = \Delta u + \Delta v \end{aligned}$$

$u = g(x)$
$v = h(x)$

Una cuenta al menos

- Dado $y = f(x)$: $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$; $f'(x) := \mathrm{st}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \frac{dy}{dx}$.

Teorema

Si $y = u + v$, *entonces* $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$ *(si el lado derecho existe).*

Demostración.

1. $$\begin{aligned}\Delta y &= g(x+\Delta x) + h(x+\Delta x) - (g(x)+h(x)) \\ &= (\Delta u + u) + (\Delta v + v) - (u+v) = \Delta u + \Delta v\end{aligned}$$ $u{=}g(x)$ $v{=}h(x)$
2. $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Una cuenta al menos

- Dado $y = f(x)$: $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$; $\quad f'(x) := \operatorname{st}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \frac{dy}{dx}$.

Teorema

Si $y = u + v$*, entonces* $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$ *(si el lado derecho existe).*

Demostración.

$u = g(x)$
$v = h(x)$

1. $$\begin{aligned}\Delta y &= g(x+\Delta x) + h(x+\Delta x) - (g(x)+h(x)) \\ &= (\Delta u + u) + (\Delta v + v) - (u+v) = \Delta u + \Delta v\end{aligned}$$
2. $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$$
3. $$\operatorname{st}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \operatorname{st}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}\right)$$

Una cuenta al menos

- Dado $y = f(x)$: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$; $f'(x) := \mathrm{st}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \frac{dy}{dx}$.

Teorema

Si $y = u + v$, entonces $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$ (si el lado derecho existe).

Demostración.

1. $$\begin{aligned} \Delta y &= g(x + \Delta x) + h(x + \Delta x) - (g(x) + h(x)) \\ &= (\Delta u + u) + (\Delta v + v) - (u + v) = \Delta u + \Delta v \end{aligned}$$ $u=g(x)$ $v=h(x)$
2. $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$$
3. $$\mathrm{st}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \mathrm{st}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}\right) = \mathrm{st}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) + \mathrm{st}\left(\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)$$ st homomorfismo

Una cuenta al menos

- Dado $y = f(x)$: $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$; $f'(x) := \mathrm{st}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \frac{dy}{dx}$.

Teorema

Si $y = u + v$, *entonces* $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$ *(si el lado derecho existe).*

Demostración.

1. $\Delta y = g(x+\Delta x) + h(x+\Delta x) - (g(x)+h(x))$ $\qquad u = g(x)$, $v = h(x)$
   $= (\Delta u + u) + (\Delta v + v) - (u+v) = \Delta u + \Delta v$
2. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$
3. $\mathrm{st}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \mathrm{st}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}\right) = \mathrm{st}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) + \mathrm{st}\left(\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)$ $\qquad$ st homomorfismo
4. $\frac{dy}{dx} = \cdots = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$ $\qquad$ $\frac{\varepsilon}{2}$ sos un muerto!

Dos grandes maestros: Abraham Robinson

La maestría de Robinson fue mostrar que existe al menos una extensión hiperreal $\mathbb{R}^*$.

Pero su método de construcción no sólo sirve para los reales: se puede aplicar a cualquier objeto matemático.

Dos grandes maestros: Abraham Robinson

La maestría de Robinson fue mostrar que existe al menos una extensión hiperreal $\mathbb{R}^*$.
Pero su método de construcción no sólo sirve para los reales: se puede aplicar a cualquier objeto matemático.

- Solución al Problema del Subespacio Invariante (Bernstein y Robinson [1966], Pacific J Math).

Dos grandes maestros: Abraham Robinson

La maestría de Robinson fue mostrar que existe al menos una extensión hiperreal $\mathbb{R}^*$.
Pero su método de construcción no sólo sirve para los reales: se puede aplicar a cualquier objeto matemático.

- Solución al Problema del Subespacio Invariante (Bernstein y Robinson [1966], Pacific J Math).
- Construcción simplificada del *cono asintótico* de Gromov (van den Dries y Wilkie [1984], J. Algebra).

Dos grandes maestros: Abraham Robinson

La maestría de Robinson fue mostrar que existe al menos una extensión hiperreal $\mathbb{R}^*$.

Pero su método de construcción no sólo sirve para los reales: se puede aplicar a cualquier objeto matemático.

- Solución al Problema del Subespacio Invariante (Bernstein y Robinson [1966], Pacific J Math).
- Construcción simplificada del *cono asintótico* de Gromov (van den Dries y Wilkie [1984], J. Algebra).
- Clasificación de los *grupos aproximados* (Breuilliard, Green y Tao).

Dos grandes maestros: Abraham Robinson

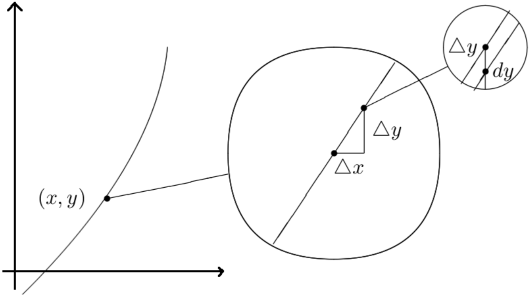
La maestría de Robinson fue mostrar que existe al menos una extensión hiperreal $\mathbb{R}^*$.

Pero su método de construcción no sólo sirve para los reales: se puede aplicar a cualquier objeto matemático.

- Solución al Problema del Subespacio Invariante (Bernstein y Robinson [1966], Pacific J Math).
- Construcción simplificada del *cono asintótico* de Gromov (van den Dries y Wilkie [1984], J. Algebra).
- Clasificación de los *grupos aproximados* (Breuilliard, Green y Tao).
- …más en Goldbring y Walsh [2019] (Notices AMS), y comentarios de Tao [2012] (su blog).

Dos grandes maestros: H. Jerome Keisler

El principio ecuacional de Transferencia permite llevar los conceptos a un libro de texto (Keisler [1986])!



$\Delta y - dy$ es un infinitésimo de orden mayor al de Δx.

El Teorema de Keisler-Shelah es otro aporte importantísimo a la "algebrización" de la lógica.

Disclaimer

No vengo a hacer la revolución en primer año.

Pero… ¿podemos prepararnos para 3er año?

Un Cálculo Avanzado para FaMAF

Pero… ¿podemos prepararnos para 3er año?

Un Cálculo Avanzado para FaMAF

- Conjuntos parcialmente ordenados ($\liminf$ y $\limsup$);

Pero. . . ¿podemos prepararnos para 3er año?

Un Cálculo Avanzado para FaMAF

- Conjuntos parcialmente ordenados ($\liminf$ y $\limsup$);
- AC, ~~Lema de Zorn~~ Principio Maximal de Hausdorff, buen orden;

Pero… ¿podemos prepararnos para 3er año?

Un Cálculo Avanzado para FaMAF

- Conjuntos parcialmente ordenados ($\liminf$ y $\limsup$);
- AC, ~~Lema de Zorn~~ Principio Maximal de Hausdorff, buen orden;
- Cardinalidad (¡numerabilidad!);

Pero… ¿podemos prepararnos para 3er año?

Un Cálculo Avanzado para FaMAF

- Conjuntos parcialmente ordenados ($\liminf$ y $\limsup$);
- AC, ~~Lema de Zorn~~ Principio Maximal de Hausdorff, buen orden;
- Cardinalidad (¡numerabilidad!);
- Operaciones infinitarias;

Pero… ¿podemos prepararnos para 3er año?

Un Cálculo Avanzado para FaMAF

- Conjuntos parcialmente ordenados ($\liminf$ y $\limsup$);
- AC, ~~Lema de Zorn~~ Principio Maximal de Hausdorff, buen orden;
- Cardinalidad (¡numerabilidad!);
- Operaciones infinitarias;
- Espacios métricos;

… y algo más seguramente*.

cardinal κ and use only profinite sets S of cardinality less than κ to define a site $*_{\kappa\text{-proét}}$. We will always assume that κ is an uncountable strong limit cardinal, i.e. κ is uncountable and for all $\lambda < \kappa$, also $2^\lambda < \kappa$. It is easy to construct such κ: For example, define $\beth_\alpha$ inductively for all ordinals α via $\beth_0 = \aleph_0$, $\beth_{\alpha^+} = 2^{\beth_\alpha}$ for a successor ordinal and for a limit ordinal as the union of all smaller $\beth_\alpha$'s. Then for any limit ordinal α, the cardinal $\kappa = \beth_\alpha$ is an uncountable strong limit cardinal.

For any uncountable strong limit cardinal κ, the category of κ-condensed sets is the category

¡Gracias!

DEFINITION 1.54. *The hyperreal number system built from the ultrafilter U is the structure $(*, \mathbb{R}, \mathbb{R}^*)$ where $\mathbb{R}^* = \prod_U \mathbb{R}$, $<^*$ is the natural extension of $<$, and f^* is the natural extension of f for each real function f.*

THEOREM 1.55. *For each free ultrafilter U on a countable index set I, the hyperreal number system $(*, \mathbb{R}, \mathbb{R}^*)$ built from U satisfies Axioms A–E.*

Bibliografía I

A.R. BERNSTEIN, A. ROBINSON, Solution of an invariant subspace problem of K. T. Smith and P. R. Halmos, *Pacific J. Math.* **16**: 421–431 (1966).

L. VAN DEN DRIES, A.J. WILKIE, Gromov's theorem on groups of polynomial growth and elementary logic, *J. Algebra* **89**: 349–374 (1984).

I. GOLDBRING, S. WALSH, An invitation to nonstandard analysis and its recent applications, *Notices Amer. Math. Soc.* **66**: 842–851 (2019).

H.J. KEISLER, "Foundations of infinitesimal calculus", Prindle, Weber & Schmidt Inc. (Boston, Mass): ix+214pp. (1976). Disponible con correcciones en `https://people.math.wisc.edu/~keisler/foundations.html`.

H.J. KEISLER, "Elementary calculus. An infinitesimal approach", Prindle, Weber & Schmidt Inc. (Boston, Mass): xviii + 941pp (1986), segunda edición. Disponible con correcciones en `https://people.math.wisc.edu/~keisler/calc.html`.

H. LEBESGUE, Sur les fonctions représentables analytiquement, *Journ. de Math. (6)* **1**: 139–216 (1905).

A. ROBINSON, Non-standard analysis, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 64 = Indag. Math.* **23**: 432–440 (1961).

A. ROBINSON, "Non-standard analysis", Princeton Landmarks in Mathematics, Princeton University Press, Princeton, NJ: xx+293 (1996). Reimpresión de la segunda edición de 1974. Con prefacio de Wilhelmus A. J. Luxemburg.

Bibliografía II

P. Scholze, Lectures on analytic geometry, Webpage, (2019).
http://www.math.uni-bonn.de/people/scholze/Condensed.pdf. Accedido en junio 2022.
Resultados junto a D. Clausen.

P. Scholze, Lectures on condensed mathematics, Webpage, (2019).
https://www.math.uni-bonn.de/people/scholze/Analytic.pdf. Accedido en junio 2022.
Resultados junto a D. Clausen.

T. Tao, A cheap version of nonstandard analysis, Webpage, (2012). https://terrytao.wordpress.com/2012/04/02/a-cheap-version-of-nonstandard-analysis/.
Accedido en junio 2022.